

問題 1. 次の文を下線部の言葉の定義が分かるように書き直せ. 論理式で書いても日本語で書いても良い. ただし, 解釈が一意になるようにせよ.

- (1) 実数の数列 $\{a_n\}$ が $\alpha \in \mathbb{R}$ に収束する.
- (2) $\alpha \in \mathbb{R}$ は空でない集合 $A \subseteq \mathbb{R}$ の上 $\underline{\text{限}}$ である.
- (3) 実数の数列 $\{a_n\}$ は $\underline{\text{コーシー列}}$ である.
- (4) 関数 $f(x)$ は $x \rightarrow a$ のときに α に収束する.
- (5) 関数 $f(x)$ の閉区間 $[a, b]$ での $\underline{\text{定積分}}$ $\int_a^b f(x)dx$
- (6) 関数 $f(x)$ は区間 I で $\underline{\text{一様連続}}$ である.

5 点 $\times 6$

解答. (1) $(\forall \epsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geq N)|a_n - \alpha| < \epsilon$.

(2) $(\forall x \in A)[x \leq \alpha] \wedge (\forall x < \alpha)(\exists y \in A)[x < y]$

(3) $(\forall \epsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n, m > N)[|a_n - a_m| < \epsilon]$

(4) $(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x)[0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - \alpha| < \epsilon]$

(5) $\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i)(x_i - x_{i-1})$ ただし, Δ は $a = x_0 < \dots < x_n = b$ という分割で, すべての i で $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $|\Delta| = \max_i |x_i - x_{i-1}|$ である.

(6) $(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, y)[|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon]$

□

問題 2. 数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ が収束するとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ であることを示せ.

10 点

解答. $a_n \rightarrow \alpha, b_n \rightarrow \beta$ とおく. $\epsilon > 0$ を固定する. $a_n \rightarrow \alpha$ より, この ϵ に対してある $N \in \mathbb{N}$ が存在して, $n \geq N$ のとき $|a_n - \alpha| < \epsilon/2$. $b_n \rightarrow \beta$ より, ある $M \in \mathbb{N}$ が存在して, $n \geq N$ のとき $|b_n - \beta| < \epsilon/2$. よって, 任意の $n \geq \max\{N, M\}$ に対して,

$$|a_n + b_n - (\alpha + \beta)| \leq |a_n - \alpha| + |b_n - \beta| < \epsilon.$$

ϵ は任意だったので, $a_n + b_n \rightarrow \alpha + \beta$.

□

問題 3. 数列 $\{a_n\}$ が収束するならば, コーシー列であることを示せ.

10 点

解答. $a_n \rightarrow \alpha$ とする. $\epsilon > 0$ を固定する. $a_n \rightarrow \alpha$ より, この ϵ に対してある $N \in \mathbb{N}$ が存在して, $n \geq N$ のとき $|a_n - \alpha| < \epsilon/2$. よって, 任意の $n, m \geq N$ に対して,

$$|a_n - a_m| = |a_n - \alpha - (a_m - \alpha)| \leq |a_n - \alpha| + |a_m - \alpha| < \epsilon.$$

ϵ は任意だったので, a_n はコーシー列である.

□

問題 4. 以下の「中間値の定理」の証明を与えよ.

関数 $f(x)$ は閉区間 $[a, b]$ で連続で, $f(a) < 0 < f(b)$ とする. このとき, $f(c) = 0$ を満たす実数 $c \in (a, b)$ が存在する.

ただし, 区間縮小法の原理は認めて良い.

15 点

解答. $a_0 = a, b_0 = b$ とする. 以下 n に関して帰納的に, $c_n = \frac{a_n + b_n}{2}$ として, 「 $f(c_n) < 0$ ならば $a_{n+1} = c_n, b_{n+1} = b_n$ 」 「 $f(c_n) > 0$ ならば $a_{n+1} = a_n, b_{n+1} = c_n$ 」 で定義する. もし $f(c_n) = 0$ となる n が存在すればこの c_n が求める実数であるから, 以下ではそのような n は存在しないと仮定する. 区間 $I_n = [a_n, b_n]$ は n に関して単調に縮小し $|I_n| = 2^{-n}(b - a) \rightarrow 0$ であるから, 区間縮小法の原理より, 実数 $c \in \bigcap_n I_n$ が唯一存在する.

$a_n \rightarrow c$ であることを示す。 a_n, b_n の定義より、 $b_n = a_n + 2^{-n}(b-a)$ で、 $c \in [a_n, b_n]$ なので、 $|a_n - c| \leq 2^{-n}(b-a)$ である。 $n \rightarrow \infty$ とすると右辺は0に収束するので、 $a_n \rightarrow c$ である。同様に $b_n \rightarrow c$ である。

$f(c) = 0$ であることを示す。 a_n, b_n の定義より $f(a_n) < 0, f(b_n) < 0$ である。 $a_n \rightarrow c$ で、 f は連続なので、 $f(c) \leq 0$ 。同様に $b_n \rightarrow c$ より $f(c) \geq 0$ 。よって、 $f(c) = 0$ である。

また、 $c \in I_0 = [a, b]$ であるが、 $f(a) < 0$ より $c \neq a$ 、 $f(b) > 0$ より $c \neq b$ なので、 $c \in (a, b)$ である。□

問題 5. 以下の「微積分学の基本定理」の証明を与えよ。

$$\text{区間 } [a, b] \text{ で連続な関数 } f(x) \text{ に対し, } \frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x), (a < x < b).$$

ただし、連続な関数が積分可能であることは認めて良い。

15 点

解答. $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ とおく. $F(x+h) - F(x) = \int_x^{x+h} f(t)dt$ である. $[x, x+h]$ または $[x+h, x]$ での $f(t)$ の最大値を $\bar{f}$, 最小値を $\underline{f}$ とすると, $h\underline{f} \leq F(x+h) - F(x) \leq h\bar{f}$ である. f は連続なので, $h \rightarrow 0$ とすると, $\bar{f}, \underline{f} \rightarrow f(x)$ で, $\frac{F(x+h)-F(x)}{h} \rightarrow f(x)$ である. □

問題 6. $f(x)$ が $I = [a, b]$ で一様連続であれば, $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x)$ が存在することを示せ。

20 点

逆は明らかであることを注意しよう。 $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x)$ が存在すれば、その値を $f(b)$ とすることで、 $f(x)$ は区間 $[a, b]$ で連続となる。よって $f(x)$ は区間 $[a, b]$ で一様連続なので、 $[a, b)$ でも一様連続である。

証明の流れ. $c_n = b - \frac{b-a}{n}$ とすると $\{f(c_n)\}$ はコーシー列で、その収束先を α とする。 b に近い x に対して、十分大きな k をとることで、 $|f(x) - \alpha| \leq |f(x) - f(c_k)| + |f(c_k) - \alpha| < \epsilon$ を示す。□

解答. $c_n = b - \frac{b-a}{n} \in I$ とする。 $\{f(c_n)\}$ はコーシー列であることを示す。 $\epsilon > 0$ を固定すると、一様連続性からある $\delta > 0$ が存在して、 $|x - y| < \delta$ のとき $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ となる。 $\frac{b-a}{\delta}$ より大きい最小の自然数を N とすれば、任意の $n, m \geq N$ に対し、

$$|c_n - c_m| \leq \frac{b-a}{N} < \delta$$

より、 $|f(c_n) - f(c_m)| < \epsilon$ である。 ϵ は任意であったから、これは $f(c_n)$ がコーシー列であることを意味する。

$\{f(c_n)\}$ はコーシー列なので収束する。その極限値を α とする。

$\lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = \alpha$ を示す。 $\epsilon > 0$ を固定する。一様連続性からある $\delta > 0$ が存在して、 $|x - y| < \delta$ のとき $|f(x) - f(y)| < \epsilon/2$ となる。この δ に対し自然数 k を、 $\frac{b-a}{k} < \frac{\delta}{2}$ かつ $|f(c_k) - \alpha| < \epsilon/2$ を満たす最小のものとしてとる。すると、 $0 < |x - b| < \delta/2$ となるすべての x に対し、

$$|x - c_k| \leq |x - b| + |b - c_k| < \delta$$

なので、

$$|f(x) - \alpha| \leq |f(x) - f(c_k)| + |f(c_k) - \alpha| < \epsilon$$

となる。 ϵ は任意なので、 $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = \alpha$ が示された。□

別解. **Step 1:** $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = b, c_n \in [a, b)$ となる $\{c_n\}$ をとれば、 $\{f(c_n)\}$ はコーシー列である。

$\epsilon > 0$ を固定する。 f は一様連続なので、ある $\delta > 0$ が存在して、 $|x - y| < \delta$ のとき $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ となる。 $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = b$ より、この δ に対し、ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して、 $n, m \geq N$ のとき $|c_n - c_m| < \delta$ 。よって、 $|f(c_n) - f(c_m)| < \epsilon$ 。これは $\{f(c_n)\}$ がコーシー列であることを意味する。

Step 2: $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = b, d_n \in [a, b)$ となる任意の $\{d_n\}$ について、 $\{f(d_n)\}$ は同じ値 α に収束する。

Step 1 での $\{f(c_n)\}$ はコーシー列なので、収束し、その値を α とする。 $\epsilon > 0$ を固定する。 f は一様連続なので、ある $\delta > 0$ が存在し、 $|x - y| < \delta$ のとき $|f(x) - f(y)| < \epsilon/2$ となる。 $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} d_n = b$ より、この δ に対し、ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して、 $n \geq N$ のとき $|c_n - b| < \delta/2$ かつ $|d_n - b| < \delta/2$ 。よって、 $|c_n - d_n| < \delta$ で、 $|f(c_n) - f(d_n)| < \epsilon/2$ 。更に $\lim_{n \rightarrow \infty} f(c_n) = \alpha$ より、ある $M \in \mathbb{N}$ が存在して、 $n \geq M$ のとき $|f(c_n) - \alpha| < \epsilon/2$ 。これらより $n \geq \max\{N, M\}$ のとき $|f(d_n) - \alpha| \leq |f(d_n) - f(c_n)| + |f(c_n) - \alpha| < \epsilon$ 。

Step 3: $f(b) = \alpha$ とすれば、 f は $[a, b]$ で連続である。

Step 2 は f が $x = b$ で連続となるための必要十分条件であり、背理法を使った証明を講義の中で与えた。□

問題 1. (1) よくできていた.

(2) 上界だけ書いている. 数列の上限を書いている. 日本語で書いている場合に上界が $x \in A$ に依存しているかのように読める場合. 上界の定義で $\exists m$ が最初に書いてあるものは大目に見た.

(3) よくできていた.

(4) $|x - a| < \delta$ として 0 を除いていない.

(5) できている人とできていない人が分かれたところか.

(6) 一様収束の定義を書いている人もいた. $0 < |x - y| < \delta$ として 0 を除いても定義としては同値であるが不自然.

問題 2. ϵ に対し, N をどのようにとったのかを明確にする必要がある.

問題 3. 異なる N を取る必要はない.

問題 4. 「以下同様に」では説明不足.

$f(c_n) < 0$ で f が抜けた人がいた.

$f(c) = 0$ の証明で, 「 $f(a_n) < 0$ 」や「 f は連続」などの理由をきちんと書くこと.

問題 5. $f(t)$ の最大値・最小値を取るときに, どの範囲でのことなのかを明確にせよ.

$\bar{f} \rightarrow f(x)$ となるのは, f が連続であるからであり, ここがこの証明の鍵なので, きちんと書くべきところ.

問題 6. 「 $\{f(c_n)\}$ がコーシー列であることを確認する」までで 15 点として採点した.