

制御工学1 レポート問題 解答

出題日 2015 年 6 月 23 日

問 1

ヒント： $\sin$ 関数があるので、微分やテーラ展開、オイラーの式などが使えそう。

$$\text{微分してみる。}\dot{f}(t) = \frac{d}{dt}(t) \sin(at) + t \frac{d}{dt}\{\sin(at)\} = \sin(at) + t a \cos(at)$$

$$\text{更に微分してみる。}\ddot{f}(t) = a \cos(at) + a \cos(at) - t a a \sin(at) = 2a \cos(at) - a^2 f(t)$$

1 回微分、2 回微分に関するラプラス変換を利用する。初期値は 0 とする。

$$\mathcal{L}\{\ddot{f}\} = s^2 \mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{2a \cos(at) - a^2 f(t)\} = \mathcal{L}\{2a \cos(at)\} - a^2 \mathcal{L}\{f(t)\}$$

$$(s^2 + a^2) \mathcal{L}\{f(t)\} = 2a \mathcal{L} \cos(at) = 2a \frac{s^2}{s^2 + a^2}$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \frac{2as^2}{(s^2 + a^2)^2}$$

問 2

ヒント： ラプラス変換の定義式、ラプラス変換表や公式を見渡して、以下の式が使えないか検討する。

$$\mathcal{L}(e^{-at}) = \frac{1}{s+a}, \quad \mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a), \quad \int f(t)\dot{g}(t)dt = f(t)g(t) - \int \dot{f}(t)g(t)dt$$

定義式に代入すると、

$$\mathcal{L}\{t^2 e^{-2t}\} = \int_0^\infty t^2 e^{-2t} e^{-st} dt = \int_0^\infty t^2 e^{-2t} e^{-st} dt = \int_0^\infty t^2 e^{-(s+2)t} dt = \int f(t)\dot{g}(t)dt$$

g を積分すると、

$$g(t) = \frac{1}{-(s+2)} e^{-(s+2)t}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{t^2 e^{-2t}\} &= \left[t^2 \frac{1}{-(s+2)} e^{-(s+2)t} \right]_0^\infty - \int_0^\infty 2t \frac{1}{-(s+2)} e^{-(s+2)t} dt = 0 - \left[2t \frac{1}{(s+2)^2} e^{-(s+2)t} \right]_0^\infty \\ &\quad + \int_0^\infty 2 \frac{1}{(s+2)^2} e^{-(s+2)t} dt = 0 - 0 + \left[2 \frac{1}{-(s+2)^3} e^{-(s+2)t} \right]_0^\infty \\ &\quad - \int_0^\infty 0 \frac{-1}{(s+2)^3} e^{-(s+2)t} dt = \frac{2}{(s+2)^3} \end{aligned}$$

問 3

ヒント： オイラーの公式、三角関数の公式から、

$$\sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}, \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$f(t) = \frac{1}{2j} \{e^{jat} - e^{-jat}\} \times \frac{1}{2} \{e^{at} - e^{-at}\} = \frac{1}{2j} \{e^{a^2 t^2} - e^{-ja^2 t^2}\} = \sin(a^2 t^2)$$

$$\int_0^{\infty} \sin(a^2 t^2) e^{-st} dt = \frac{2a^2 s}{(s^4 + a^4)}$$

※上記の式は部分積分を繰り返すことで算出できるが，簡単ではない。

以下の式をラプラス変換せよ。初期値に注意のこと。

問 4

ヒント： 導関数を求めればよい。 $\mathcal{L}\dot{x} = s\mathcal{L}x - x(0)$, $\mathcal{L}\ddot{x} = s^2\mathcal{L}x - sx(0) - \dot{x}(0)$

$$\mathcal{L}\dot{x} = s\mathcal{L}x - x_0, \mathcal{L}\ddot{x} = s^2\mathcal{L}x - sx_0$$

$$m(s^2\mathcal{L}x - sx_0) + c(s\mathcal{L}x - x_0) + k\mathcal{L}x = 0$$

m で割って，おなじみの粘性係数，固有振動数に変形し，

$$s^2\mathcal{L}x - sx_0 + 2\zeta\omega_n(s\mathcal{L}x - x_0) + \omega_n^2\mathcal{L}x = 0$$

$$\mathcal{L}x = X(s) = \frac{sx_0 + 2\zeta\omega_n x_0}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

以下の式をラプラス変換およびラプラス逆変換して解答せよ。

問 5

ヒント： 導関数を求めればよい。 $\mathcal{L}\dot{x} = s\mathcal{L}x - x(0)$, $\mathcal{L}\dot{y} = s\mathcal{L}y - y(0)$

$$\begin{cases} s\mathcal{L}x - x(0) = 3\mathcal{L}x - 2\mathcal{L}y \\ s\mathcal{L}y - y(0) = -\mathcal{L}x + 2\mathcal{L}y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} sX(s)\mathcal{L}x + 1 = 3X(s) - 2Y(s) \\ sY(s) - 3 = -X(s) + 2Y(s) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} X(s) = \frac{1}{s-1} + \frac{-2}{s-4} \\ Y(s) = \frac{-1}{s-1} + \frac{4}{s-4} \end{cases}$$

逆ラプラス変換すれば，

$$\begin{cases} x(t) = e^t - 2e^{4t} \\ y(t) = -e^t + 4e^{4t} \end{cases}$$

