

球面カンドルの埋め込み

ー本公演の概要ー

カンドルはD.JoyceとS.V.Matveevにより、1982年定義された代数系で、結び目理論への応用が数多く知られています。そのなかでも、講演者はK.Ishikawaにより定義されたsmooth quandleと呼ばれるカンドルのクラスに興味があります。この発表で、球面カンドルと呼ばれるカンドルのあるLie群への埋め込みとその応用を紹介します。

九州大学大学院数理学府博士3年

米村拳太郎

(Email:3MA20009Y@s.kyushu-u.ac.jp)

令和4年 10月29日 土曜日

本講演のキーワードの説明

講演題目に出ていた用語と講演の目的を簡単に説明する.

結び目理論 (Knot Theory)

紐の結び方を数学的手法を駆使して分類する学問.

DNA の構造解析, 暗号理論, そしてトポロジカル量子コンピューターなどの新技術への応用も模索されている.

カンドル (Quandle)

結び目理論を研究するために作られた代数系.

つまり, 集合 X とその上の演算 $\triangleright : X \times X \rightarrow X$ の組 $(X, \triangleright)$.

この講演の目的

このポスターでは、球面カンドルをはじめとした等質空間としての構造も併せ持つカンドルの構造に関する予想と応用を概説する。

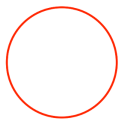
結び目を数学を用いて調べる理由

問題提起

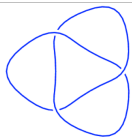
2次元的な単純な絵で描けるもの (例えば結び目) であっても、2つが異なることを示すのは難しい → 応用: 画像認識によるロボット判定

問題例

自明な結び目 (輪っか、図左) と 3_1 (真結び、図右) を区別出来るか？



$$\Delta_{0_1}(t) = 1$$



$$\Delta_{3_1}(t) = t^{-1} - 1 + t$$

問題への解：不変量の構成

結び目が同値であることの必要条件(不変量)を構成する。

例：図下のAlexander多項式 (Alexander 1923)
樹下・寺阪結び目等に対する脆弱性が知られている。

不変量の不完全性

一般に、不変量を通して見ても見分けられない結び目の組がある。

球面カンドルと結び目の不変量

球面カンドル [Azcan-Fenn 1994]

n 次元球面 $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle x, x \rangle = 1\}$ 上に二項演算

$$x \triangleright y = 2\langle x, y \rangle y - x$$

を定めると、 $(S^n, \triangleright)$ はカンドルとなる。これを球面カンドルという。

球面カンドルによる既存の結び目不変量

[Clark-Saito 2019] による longitudinal map がある。

今後、球面カンドルとの関係を調べたい結び目の不変量

[講演者 2021] により、球面カンドルは結び目群の $SU(2)$ 表現との関係が知られているため、Casson-Lin 不変量、インスタントン Floer ホモロジー、Alexander 多項式 etc... と球面カンドルの関係を記述できないか？

講演者の研究

Eisermann が 2014 年に証明なしで言及した事実を証明した。

[Eisermann, 講演者]

球面カンドル $S_{\mathbb{R}}^n$ は $Spin(n+1)$ へ埋め込むことが出来る。

予想 (講演者)

代数的連結な smooth quandle X に対し、ある Lie 群 G が存在し、滑らかな埋め込み $\iota: X \rightarrow \text{Conj } G$ でカンドル準同型であるものが存在する。

今後の研究

- 予想が成り立つ smooth quandle のクラスのリストの作成
- 予想の反例の構成
- もっと広いカンドルクラス (ex. smooth quandle) 予想への拡張