

電磁場中のシュレディンガー方程式の解の波面集合

東京理科大学大学院 理学研究科 数学専攻 D3

村松 亮

東京理科大学大学院 理学研究科 数学専攻 D3

安部 文人

異分野異業種研究交流会 2022

Abstract

波面集合は、関数の特異点の位置と微分できない方向を記述する集合である。シュレディンガー方程式の解には、初期値の特異性が伝播する特異性伝播現象が見られるが、これはシュレディンガー方程式特有の性質が反映されており、重要かつ興味深い。

本講演では、電磁場中のシュレディンガー方程式の解の特異性伝播現象を、波束変換と波面集合を用いて明らかにする。

電磁場中のシュレディンガー方程式

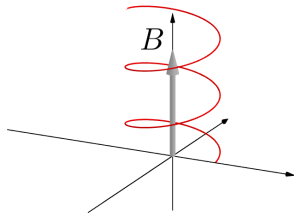
$$(MS) \quad \begin{cases} i\partial_t u(t, x) + \frac{1}{2}(\nabla - i\mathbf{a}(t, x))^2 u(t, x) = 0, & (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n. \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

$$\nabla \times \mathbf{a} = \mathbf{B}$$

仮定 A (空間一様な磁場)

$$(A) \quad a_k(t, x) = \sum_{l=1}^n a_{k,l}(t)x_l, \quad a_{k,l} \in C^\infty(\mathbb{R}), \quad (k, l = 1, \dots, n)$$

例. $n = 3$, $B \in \mathbb{R}$, $\mathbf{B} = (0, 0, B)$.



波面集合

$u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $(x_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$.

$(x_0, \xi_0) \notin WF(u)$

: $\stackrel{\text{def}}{\iff} \exists \Gamma: \xi_0 \text{ の錐近傍}, \exists \chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ s.t. } \chi(x_0) \neq 0, \forall N \in \mathbb{N};$

$$|\widehat{\chi u}(\xi)| \leq \exists C_N (1 + |\xi|)^{-N}, \quad \xi \in \Gamma.$$

波束変換

$\varphi \in \mathcal{S} \setminus \{0\}, f \in \mathcal{S}'$.

$$W_\varphi f(x, \xi) := \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\varphi(y-x)} f(y) e^{-iy \cdot \xi} dy, \quad (x, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n.$$

Known result:

$$(1) \quad \begin{cases} i\partial_t u(t, x) + \frac{1}{2}\Delta u(t, x) = V(t, x)u(t, x), & (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

$$(\text{古典軌道}) \quad \begin{cases} \dot{x}(s) = \xi(s), & x(t) = x, \\ \dot{\xi}(s) = -\nabla V(s, x(s)), & \xi(t) = \lambda\xi. \end{cases}$$

- ▶ Kato-Kobayashi-Ito (2011): $V(t, x) = |x|^2/2$,
Kato-Ito(2014), $V(t, x) = o(|x|^2)$ (劣2次)

$$(x_0, \xi_0) \notin WF(u(t_0, \cdot))$$

$$\Leftrightarrow \exists V : (x_0, \xi_0) \text{ の (錐) 近傍, } \forall N, a \geq 1;$$

$$|W_{\varphi_\lambda^{(-t_0)}} u_0(x(0), \xi(0))| \leq C\lambda^{-N} \text{ on } V, \quad a^{-1} \leq |\xi| \leq a$$

上記の結果を、時間依存する電磁場中の場合について考察したのが次の主結果である:

$$\begin{cases} i\partial_t u(t, x) + \frac{1}{2}(\nabla - i\mathbf{a}(t, x))^2 u(t, x) = 0, & (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n. \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

主結果

$u(t, x)$ を (MS) の $(L^2\text{-})$ 解とし, $\mathbf{a}(t, x)$ は (A) をみたすとする. このとき, 任意の $t_0 \in \mathbb{R}$ に対し, $(x_0, \xi_0) \notin WF(u(t_0, \cdot))$ であることと次は同値:

x_0 の近傍 K , ξ_0 の錐近傍 Γ が存在して, 任意の $N \in \mathbb{N}$, $a \geq 1$, $\varphi_0(x) \in \mathcal{S} \setminus \{0\}$ に対し, $C_{N,a,\varphi_0} > 0$ が存在し, 任意の $\lambda \geq 1$, $x \in K$, $\xi \in \Gamma_a := \{\xi \in \Gamma \mid a^{-1} \leq |\xi| \leq a\}$ に対し

$$(2) \quad \left| W_{\varphi_\lambda(-t_0)} u_0(x(0; t_0, x, \lambda\xi), \xi(0; t_0, x, \lambda\xi)) \right| \leq C_{N,a,\varphi_0} \lambda^{-N}.$$

ただし

- ▶ $\varphi_\lambda^{(t)}(x)$ は $\lambda^{n/4} \varphi_0(\sqrt{\lambda}x)$ を初期値とする (MS) の解
- ▶ $x(\tau) = x(\tau; t_0, x, \lambda\xi)$ と $\xi(\tau) = \xi(\tau; t_0, x, \lambda\xi)$ は以下のハミルトン方程式の解:

$$\begin{cases} \dot{x}(\tau) = \xi(\tau) - \mathbf{a}(\tau, x(\tau)), & x(t_0) = x, \\ \dot{\xi}(\tau) = \sum_{j=1}^n (\nabla_x a_j)(\tau, x(\tau)) (\xi_j(\tau) - a_j(\tau, x(\tau))), & \xi(t_0) = \lambda\xi. \end{cases}$$