

Large Deviation Principle for Persistent Diagrams of Random Cubical Filtrations

(ランダム方体集合の増大列から定まるパーシステント図の大偏差原理)

＊本発表は京都大学高等研究院の平岡氏と金澤氏、ならびに九州大学数理学
研究院の角田氏との共同研究に基づくものである。

自己紹介

氏名：宮永 潤 (みやなが じゅん)

略歴：

2011-2016

九州大学 21世紀プログラム (現・共創学部)

＊1留 (ロシア留学10ヶ月 & 留年)

2016-2018

東北大学大学院理学研究科数学専攻

2018-現在

京都大学大学院理学研究科数学・数理解析専攻数学系

＊博士5年目

趣味： (最近あまりできてない.....)

読書 [SF小説], 筋トレ, 美術館巡り, など

研究の動機

- ・ 稀な事象の確率を記述する大偏差原理に興味があったから
- ・ 修士の結果の際に用いたものと似た手法を使った大偏差原理の先行研究の存在

研究の位置付け

- ・ パーシステント図の大偏差原理について初めて得られた結果である
- ・ パーシステント図の大偏差原理を示す際の一般論を構築した

用語の説明

ランダム方体集合

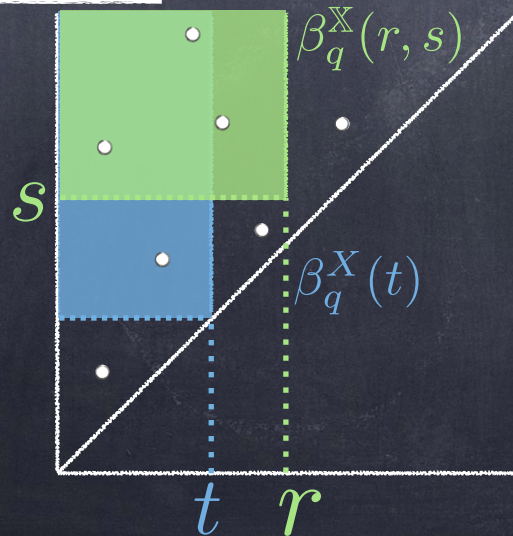
- 方体集合；格子上の正方形や立方体 Q の集まり

各基本方体上の分布 t_Q に以下を仮定

- 定常性；格子点の平行移動 $z \in \mathbb{Z}^d$ の前後での $\{t_Q\}$ と $\{t_{z+Q}\}$ の分布は同じ.
- 局所依存性； $A, B \subset \mathbb{R}^d$ が十分に離れれば, $\{t_Q, Q \subset A\}$ と $\{t_Q, Q \subset B\}$ は独立.

パーシステント図

- 幾何学的対象の穴を生成消滅時刻でプロット
- 測度とみることもできる



極限定理

- 大数の法則 (LLN)

典型的な値

- 中心極限定理 (CLT)

典型的な値からのゆらぎ・ズレ

- 大偏差原理 (LDP)

典型的な値から離れた状況とその確率

$\mathcal{X}$ -値確率変数列 $\{S_n\}$ が LDP をみたす $\iff$ 下半連続な関数 $I: \mathcal{X} \rightarrow [0, \infty]$ が存在し, 可測集合 Γ に対し

$$-\inf_{x \in \Gamma^\circ} I(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n^{-1} \log P(S_n \in \Gamma) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n^{-1} \log P(S_n \in \Gamma) \leq -\inf_{x \in \bar{\Gamma}} I(x).$$

ここで, $\mathcal{X}$: ハウスドルフ, $\{a_n\}$: 正の数列, $a_n \rightarrow \infty (n \rightarrow \infty)$.

任意の $\alpha > 0$ に対し, $\{x; I(x) \leq \alpha\}$ がコンパクトなら, I は良いという.

主結果

$C_c(\Delta)$: Δ 上のコンパクトな台をもつ実数値連続関数全体
 $\mathcal{I}_l$: Δ 上のある特定の矩形領域

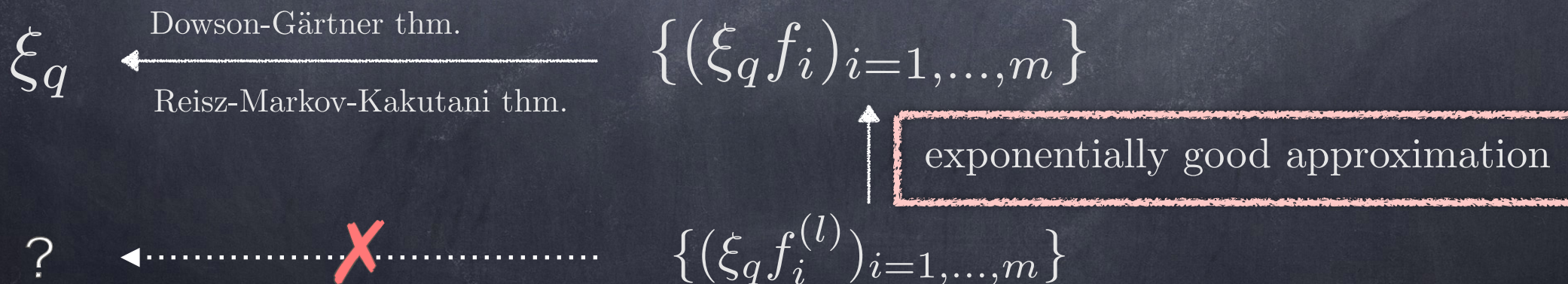
定理 (Hiraoka, Kanazawa, M., Tsunoda)

正規化された q -次パーシステント図の過程 $\{\xi_q(\mathbb{X}^n)/|\Lambda_n|\}$ に対して以下の良いレート関数で LDP が成立する,

$$I(\xi) := \sup_{m \in \mathbb{N}} \sup_{f_1, \dots, f_m \in C_c(\Delta)} \sup_{\delta > 0} \liminf_{\substack{H \in \mathbb{R}^{\mathcal{I}_l}: \\ \left| \sum_{I \in \mathcal{I}_l} f_i(\text{UR}(I)) H(I) - \xi f_i \right| < \delta \\ \text{for all } i=1, \dots, m}} \Lambda_l^*(H).$$

証明の方針 (同値なLDPを遺伝させる)

射影極限の構成



LDP cf. Sepäläinen-Yukich thm.

証明の概略

$\mathcal{Y}$: 距離 d をもつ距離空間

$$\Gamma_\delta := \{y, \tilde{y}: d(y, \tilde{y}) > \delta\} \subset \mathcal{Y} \times \mathcal{Y}$$

定義 exponentially good approximation

各 $n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し, $\{\Omega, \mathcal{B}_n, P_{n,m}\}$ を確率空間, $\mathcal{Y}$ -値確率変数 $\tilde{Z}_n$ と $Z_{n,m}$ はそれぞれ周辺分布が $\tilde{\mu}_n, \mu_{n,m}$ となる結合分布 $P_{n,m}$ に従うとする. このとき, $\{Z_{n,m}\}$ が $\{\tilde{Z}_n\}$ の指数的良近似列であるとは, すべての $\delta > 0$ に対し, $\{\omega: (\tilde{Z}_n, Z_{n,m}) \in \Gamma_\delta\}$ が $\mathcal{B}_n$ -可測であり,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log P_{n,m}(\Gamma_\delta) = -\infty$$

が成立するときをいう. 同様に, このような確率空間 $\{\Omega, \mathcal{B}_n, P_{n,m}\}$ が構成できるとき測度 $\mu_{n,m}$ は $\tilde{\mu}_n$ の指数的良近似列であるという.

大偏差原理としてみると同じにみえる (近似)

$f_1, f_2, \dots, f_m \in C_c(\Delta)$ と $f_I^{(l)} := \sum_{I \in \mathcal{I}^l} f_i(\text{UR}(I)) \mathbb{1}_{I_i}$ に対し, 以下を示す.

$\left\{ \left(|\Lambda_n|^{-1} \xi_q^{\mathbb{X}_n} f_1^{(l)}, \dots, |\Lambda_n|^{-1} \xi_q^{\mathbb{X}_n} f_m^{(l)} \right)_{n=1}^\infty \right\}_{l=1}^\infty$ は $\left\{ |\Lambda_n|^{-1} \xi_q^{\mathbb{X}_n} f_1, \dots, |\Lambda_n|^{-1} \xi_q^{\mathbb{X}_n} f_m \right\}_{n=1}^\infty$ の指数的良近似列.

$\delta > 0$ を固定. $f_1, f_2, \dots, f_m$ は一様連続よりある $\rho > 0$ が存在し, 任意の $x, y \in \Delta$ に対し $d_\Delta(x, y) < \rho$ ならば, $|f_i(x) - f_i(y)| \leq 3^{-d}\delta$ が任意の i で成立. ここで, 関数 f の台を $\text{supp}(f)$ で表し, $L \in \mathbb{N}$ を $\bigcup_{i=1}^m \text{supp}(f_i) \subset \bigcup_{I \in \mathcal{I}_L} I$ と $\max \{ \text{diam}(I) : I \in \mathcal{I}_L, I \cap \bigcup_{i=1}^m \text{supp}(f_i) \neq \emptyset \} < \rho$ をみたすようにとると, 任意の $l \geq L$ と $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ に対し,

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \Delta} |f_i(x) - f_i^{(l)}(x)| &= \sup_{x \in \bigcup_{I \in \mathcal{I}_L} I} |f_i(x) - f_i^{(l)}(x)| \\ &\leq \max_{I \in \mathcal{I}_L} \max_{\substack{J \in \mathcal{I}^L \\ J \subset I}} \sup_{x \in J} |f_i(x) - f_i^{(l)}(x)| \leq \frac{\delta}{3^d}. \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} \left\| \left(\frac{\xi_q^{\mathbb{X}_n} f_1}{|\Lambda_n|}, \dots, \frac{\xi_q^{\mathbb{X}_n} f_m}{|\Lambda_n|} \right) - \left(\frac{\xi_q^{\mathbb{X}_n} f_1^{(l)}}{|\Lambda_n|}, \dots, \frac{\xi_q^{\mathbb{X}_n} f_m^{(l)}}{|\Lambda_n|} \right) \right\|_\infty &\leq \frac{1}{|\Lambda_n|} \int_{x \in \Delta} |f_i(x) - f_i^{(l)}(x)| d\xi_q^{\mathbb{X}_n}(x) \\ &\leq \frac{1}{|\Lambda_n|} \cdot \frac{\delta}{3^d} \cdot \xi_q^{\mathbb{X}_n}(\Delta) = \delta. \end{aligned}$$

これより

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|\Lambda_n|} \log P \left(\left\| \left(\frac{\xi_q^{\mathbb{X}_n} f_1}{|\Lambda_n|}, \dots, \frac{\xi_q^{\mathbb{X}_n} f_m}{|\Lambda_n|} \right) - \left(\frac{\xi_q^{\mathbb{X}_n} f_1^{(l)}}{|\Lambda_n|}, \dots, \frac{\xi_q^{\mathbb{X}_n} f_m^{(l)}}{|\Lambda_n|} \right) \right\|_\infty > \delta \right) = -\infty.$$

今後の展望

中心極限定理の証明や大偏差原理のより一般の測度への拡張

参考文献

- [1] Dembo, A., Zeitouni, O. : Large deviations techniques and applications. Springer, New York, (2009).
- [2] Kaczyński, T., Mishaikow, K., Mrozek, M. : Computational Homology. Springer-Verlag, New York (2004).
- [3] Hiraoka, Y., Tsunoda, K. : Limit theorems for random cubical homology. Discrete Comput. Geom. 60(3), 665–687 (2018).
- [4] Seppäläinen, T., Yukich, J., E. : Large deviation principles for Euclidean functionals and other nearly additive processes. Probab. Theory Relat. Fields 120, 309–345 (2001).