トロピカル幾何学とChow群

背景

- 代数幾何学（代数多様体 X（多項式の零点）を調べる分野）
  Chow群 $\mathrm{CH}(X)^p \otimes \mathbb{R}$（≒部分代数多様体全体）は難しい
- 最近、トロピカル幾何学（代数幾何学の組み合わせ的な類似）→様々な応用！

長期目標

トロピカル幾何学を用い$\mathrm{CH}^p(X) \otimes \mathbb{R}$の難問（標準予想など）の解決

主結果

$\mathrm{CH}(X)^p \otimes \mathbb{R} \cong H^{p,p}_{\mathrm{Trop,Dol}}(\text{“}\mathrm{Trop}(X)\text{”})$（トロピカル化“$\mathrm{Trop}(X)$”の微分幾何的不変量）
→今後、微分幾何などを使って難問にアプローチ

氏名：三上 陵太

所属：台湾中央研究院 数学研究所（ポスドク）

email：mikami@gate.sinica.edu.tw

2022年10月29日

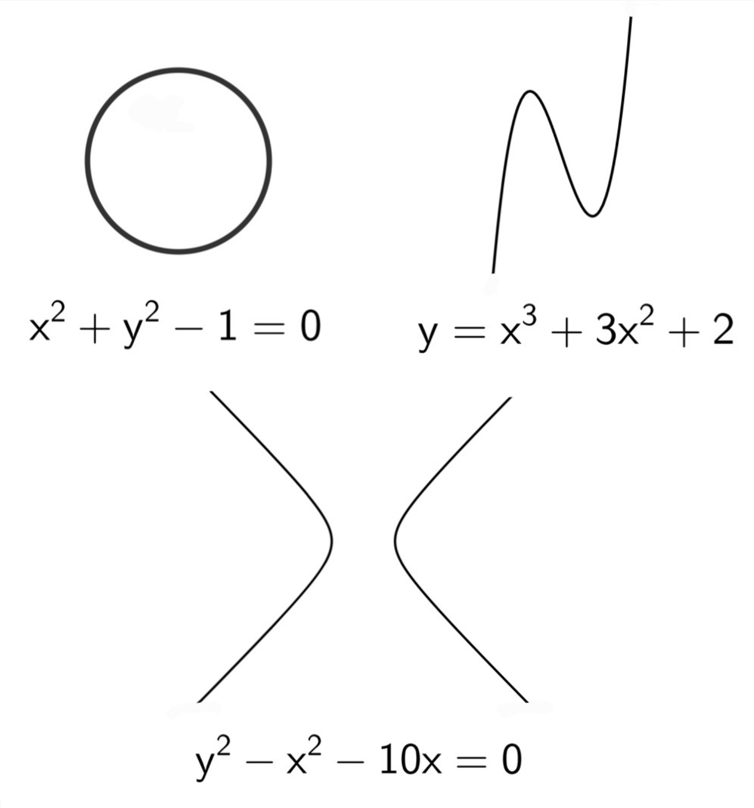
代数幾何学とトロピカル幾何学

代数幾何学

代数多様体（多項式

$$\varphi(x_1,\ldots,x_n)=\sum_i a_i x_1^{b_{i,1}}\ldots x_n^{b_{i,n}}$$

の零点）を調べる分野

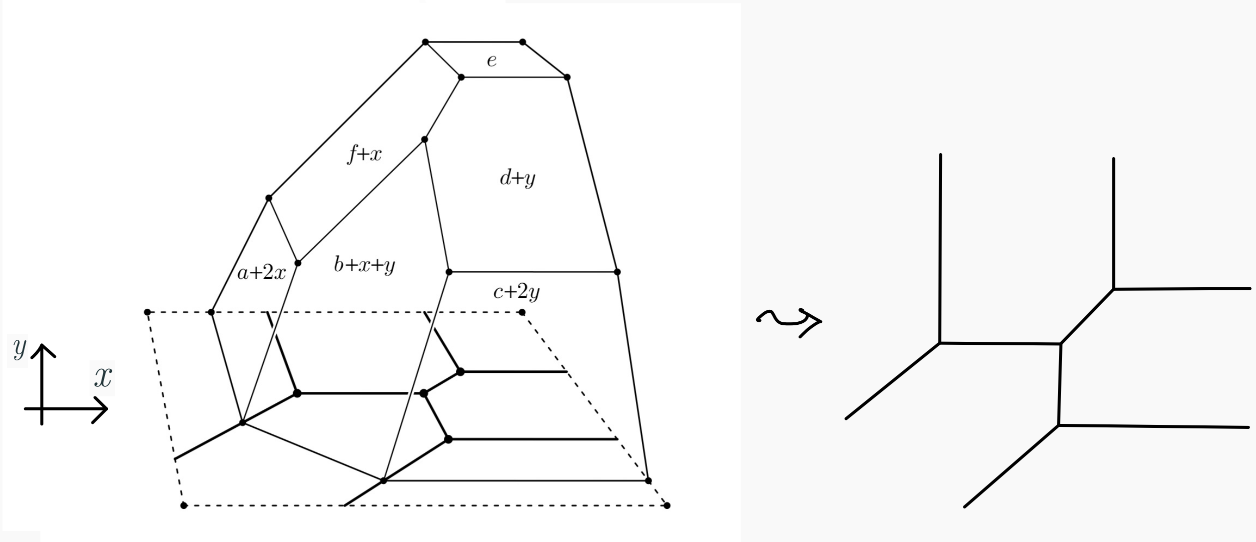


トロピカル幾何学

- 代数幾何学の組み合わせ的類似
- トロピカル多様体（トロピカル多項式

$$\varphi(x_1,\ldots,x_n)=\min_i\{c_i+b_{i,1}x_1+\cdots+b_{i,n}x_n\}$$

が折れ曲がる点）を調べる分野



$\varphi(x,y):=\min\{a+2x,b+x+y,c+2y,f+x,d+y,\}$
のグラフ（左）とトロピカル多様体（右）

（引用元 Maclagan-Sturmfels, “Introduction to Tropical Geometry”）

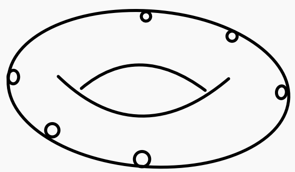
代数多様体のトロピカル化

$X : \varphi(x_1, \ldots, x_n) = \sum_i a_i x_1^{b_{i,1}} \ldots x_n^{b_{i,n}}$ の零点

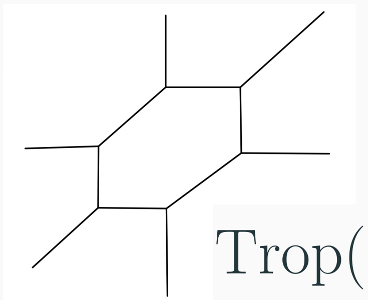
$\to \mathrm{Trop}(X) : \mathrm{Trop}(\varphi)(x_1, \ldots, x_n) = \min_i \{-\log a_i + b_{i,1}x_1 + \cdots + b_{i,n}x_n\}$の折れ曲がる点

（おおむね $-\log$ をとって、$-\log x_i$ を x_i としてる。$-\log(uv) = -\log u + -\log v$）

例：（幾何的な説明）$X(\mathbb{C}) : x_1^2x_2 + x_1x_2^2 + x_1^2 + tx_1x_2 + x_2^2 + x_1 + x_2$ の複素零点



トーラス(ドーナッツの表面) ー 6点



$\mathrm{Trop}(X)$

応用例

- （Mikhalkin 2005, J. Amer. Math. Soc.）
  平面内で固定した点を通る代数曲線の数＝トロピカル曲線の数

Chow 群 $\mathrm{CH}(X) \otimes \mathbb{R}$ と未解決問題

Chow 群（≒部分代数多様体全体）

$$\mathrm{CH}^p(X) \otimes \mathbb{Q} := \bigoplus_{\substack{V \subset X \\ \text{:部分代数多様体}}} \mathbb{Q}[V]/(\text{とある部分ベクトル空間（有理同値）})$$

→ Chow 群は古典的だが難しい！

未解決問題の例

- Grothendieck の標準予想（1969）
  部分代数多様体の交差（積構造）などの標準的な（？）性質
- Hodge 予想（1950、クレイ研究所のミレニアム問題の１つ）
  $\mathrm{CH}^p(X) \otimes \mathbb{Q}$（の商空間）$=$ Hodge 類 $H^{p,p}_{\mathrm{Dol}}(X(\mathbb{C})) \cap H^{2p}_{\mathrm{sing}}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q})$（複素微分幾何と位相幾何的不変量）

主結果と今後の展望

- ((Chambert-Loir)-Ducros 2012, Jell 2016)

$H^{p,p}_{\mathrm{Trop,Dol}}(\text{“}\mathrm{Trop}(X)\text{”})$：トロピカル Dolbeault コホモロジー（微分幾何的不変量）

(Hodge 類 $H^{p,p}_{\mathrm{Dol}}(X(\mathbb{C})) \cap H^{2p}_{\mathrm{sing}}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q})$ のトロピカル類似)

主結果（三上、2020）

$$\mathrm{CH}^p(X) \otimes \mathbb{R} \cong H^{p,p}_{\mathrm{Trop,Dol}}(\text{“}\mathrm{Trop}(X)\text{”})$$

今後の展望

- Grothendieck の標準予想（広いクラス）
  →複素微分幾何の基本定理（Hodge 理論）のトロピカル類似を示せばいい。
  (cf. 特別なトロピカル多様体の場合　Adiprasito-Huh-Katz 2018 Ann. of Math.)
- Hodge 予想
  → $H^{p,p}_{\mathrm{Trop,Dol}}(\text{“}\mathrm{Trop}(X)\text{”})$（$\cong H^{p,p}_{\mathrm{Trop,sing}}(\text{“}\mathrm{Trop}(X)\text{”}, \mathbb{Q}) \otimes \mathbb{R}$）の商空間
  $=$ Hodge 類 $H^{p,p}_{\mathrm{Dol}}(X(\mathbb{C})) \cap H^{2p}_{\mathrm{sing}}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q})$