

Spectral characterization of some properties of quantum graphs

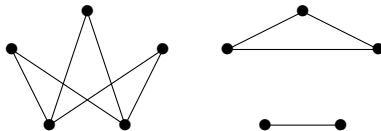
発表者: 松田 隼一朗 (京都大学 数学教室 D2)

研究対象: 量子グラフ, 作用素環, 量子群, 量子情報

量子グラフ: 古典グラフの非可換幾何的な類似物.

- 2010 年頃に**量子情報理論**に触発されて生まれ, **作用素環論**や**量子群論**などとの関わりの中で発展してきた新しい分野. 古典グラフと対比しながら各分野の視点から研究されている.
- 正則古典グラフについては**連結性**, **二部性**などの性質を隣接行列のスペクトル (固有値) を利用して特徴付けられることが知られている.

Q. 量子グラフにもこうした結果を一般化できるだろうか?



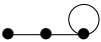
Introduction

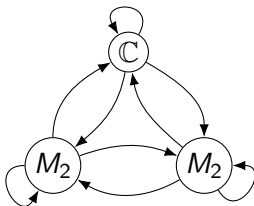
- 古典グラフ $\mathcal{G} = (V, E \subset V \times V)$.

- 隣接行列 $A = (A_{ij})_{i,j \in V}$:

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } (i, j) \in E, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \iff A : \mathbb{C}^V \rightarrow \mathbb{C}^V$$

Schur 積で冪等 .


$$\iff \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$$



$$\iff A : M_2 \oplus M_2 \oplus \mathbb{C} \rightarrow M_2 \oplus M_2 \oplus \mathbb{C}$$

Quantum graphs

Definition

量子グラフ $\mathcal{G} = (B, \psi, A)$:

- 有限次元 C^* -環 B (量子頂点集合)
- tracial δ -form ψ (B 上の一様分布)
- 隣接行列 $A : B \rightarrow B$ s.t. **Schur 冪等**: $A \bullet A = A$.

$(A \bullet A' := m(A \otimes A')m^\dagger$ where $m : B \otimes B \ni a \otimes b \mapsto ab \in B)$

Definition

量子グラフ (B, ψ, A) が

- **real** ($*$ -preserving) $\iff A(x^*) = (Ax)^*$;
- **無向/向きを持たない** $\iff A : \text{real}$ かつ 自己共役 $A^\dagger = A$;
- **d -正則** $\iff A1_B = d1_B$ かつ $A^\dagger 1_B = d1_B$. (d : 次数)

Example/Results1

例 1: ループのみから成る量子グラフ $(B, \psi, A = \text{id}_B)$.

例 2: 完備量子グラフ $(B, \psi, A = \delta^2 \psi(\cdot) 1_B = \delta^2 |1\rangle \langle 1|)$.

$$\begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ \circ \quad \circ \quad \circ \end{array} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

グラフラプラシアン $\Delta = d \text{id}_B - A$ の正値性から以下を得る.

Theorem

無向 d -正則量子グラフ (B, ψ, A) について, $\text{Spec}(A) \subset [-d, d]$.
特にそのスペクトル半径は最大固有値 d である.

⇒ 最大固有値 d に関する議論が意味を持つ!

Definition

量子グラフ $\mathcal{G} = (B, \psi, A)$ が;

- 二部 $\iff \exists$ 全射グラフ準同型 $\mathcal{G} \rightarrow$  .
- 連結 $\iff \nexists$ 全射グラフ準同型 $\mathcal{G} \rightarrow$  .

Remark: $B = B_1 \oplus B_2$ に分ける定義では上手くいかない.

Theorem

無向 d -正則量子グラフ $\mathcal{G} = (B, \psi, A)$ について,

- $\mathcal{G}$ が連結である $\iff d \in \text{Spec}(A)$ が重複度 1 である.
- $\mathcal{G}$ が二部な連結成分を持つ $\iff -d \in \text{Spec}(A)$.
- 特に $\mathcal{G}$ が連結なとき, $\mathcal{G}$ が二部である $\iff -d \in \text{Spec}(A)$.