

ビョーリング問題の観点からの極大面の構成

松下 尚生

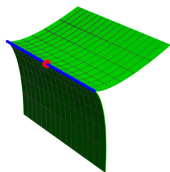
(九州大学大学院数理学府博士 2 年; matsushita.yoshiki.297@s.kyushu-u.ac.jp)

—講演概要—

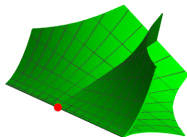
曲線や曲面に現れる特異点 (一般に尖った点) は, そうでない点に比べて, 複雑な幾何構造を一般に持つことが知られている. 本講演では, その構造に関する研究の成果を紹介する.

研究内容 (曲線や曲面の特異点論)

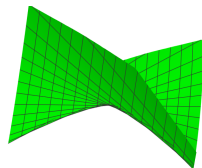
曲線や曲面の特異点とは、多くの場合、**尖った点**として現れる。



cuspidal edge



cuspidal cross cap



cuspidal butterfly

これら以外にも様々な特異点が知られているが、それらの種類は無数に存在する。従って、それらの中で重要な特異点に注目し、幾何学的な性質や判定法の研究を行うことが重要になる。

極大曲面と極大面

$$ds_{\mathbb{L}_3}^2 := (dx^1)^2 + (dx^2)^2 - (dx^3)^2,$$

$\mathbb{L}^3 := (\mathbb{R}^3, ds_{\mathbb{L}_3}^2)$; 3次元ローレンツ・ミンコフスキー空間,

$D \subset \mathbb{C}$; 単連結領域, $f : D \rightarrow \mathbb{L}^3$; C^∞ 級写像, H ; f の平均曲率.

定義 (極大曲面)

- f が極大曲面であるとは, $H \equiv 0$ であるときをいう.
- 極大曲面は, 3次元ローレンツ・ミンコフスキー空間内で, 面積の極大値を与えるような曲面.
- 極大面とは、極大曲面を少し拡張した概念であり、cuspidal edge や cuspidal cross cap 等の特異点を持つ場合がある曲面.

注意

本講演で紹介する結果は, 全て **3次元ローレンツ・ミンコフスキー空間内の曲面**に関する結果である.

研究成果 (特異点の構成に関する成果)

- 与えた実解析的な空間曲線 γ が特異点集合の像となるような極大面を構成する方法を紹介する.

$$\gamma: J \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{L}^3; \gamma'(u) = \alpha(u)(\cos \theta(u), \sin \theta(u), 1),$$

$$\mathcal{L}: J \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{L}^3; \mathcal{L}(u) = \beta(u)(\cos \theta(u), \sin \theta(u), 1).$$

$$\alpha(u) = A_0 + A_1 u + A_2 u^2 + \cdots, \beta(u) = B_0 + B_1 u + B_2 u^2 + \cdots.$$

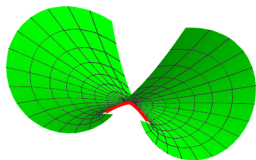
$\alpha(z), \beta(z)$; J を含む単連結領域への解析接続. このときの極大面は

$$f = \operatorname{Re} \left[\int_{u_0}^z (\cos \theta(u), \sin \theta(u), 1)(\alpha(z) - i\beta(z)) dz \right]. \quad (1)$$

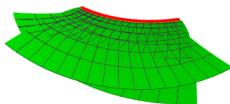
定理 (特異ビョーリング問題 [松下])

- (1) f が $z = 0$ でカスプ的蝶を持つ $\iff A_0 = 0, A_1 = 0, A_2 \neq 0, B_0 \neq 0$.
- (2) f が $z = 0$ で cuspidal S_1^- singularity を持つ $\iff A_0 \neq 0, B_0 = 0, B_1 = 0, B_2 \neq 0$.
- (3) f が $z = 0$ でカスプ辺を持つ $\iff A_0 \neq 0, B_0 \neq 0$.

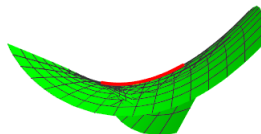
研究成果 (特異点の構成に関する成果)



カスプ的蝶



cuspidal S_1^-
singularity



カスプ辺

- このように, 特異点を持つ曲面を構成する際, **与えた曲線のテイラー展開の低次数項の係数**のみに注目する事で, 考えたい特異点を持つ曲面を**一意的に**構成出来る.