多重 Poly ベルヌーイ数の拡張について

上智大学　修士２年　馬場結菜

動機

学部４年	修士１年	修士２年
ゼータ関数 ベルヌーイ数	多重ゼータ関数 多重 (Poly) ベルヌーイ数	本研究 拡張

ベルヌーイ数の多重化である多重 Poly ベルヌーイ数は，導入以来，様々な研究者によって，双対性をはじめとするいくつかの性質が報告されている．本研究では，組合せ論的構造をもつ hook 型多重 Poly ベルヌーイ数を導入し，その性質を研究した．

ゼータ関数とベルヌーイ数/Poly ベルヌーイ数

定義 (ベルヌーイ数)

$$\frac{te^t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!}$$

定義 (ゼータ関数)

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad (Re(s) > 1)$$

定理

$\zeta(s)$ は $s = 1$ に 1 位の極.
全 $\mathbb{C}$ 上に解析接続できる.

$$\zeta(1 - m) = -\frac{B_m}{m} \quad (m \in \mathbb{Z}_{\geq 1})$$

定義 (Poly ベルヌーイ数)

$z \in \mathbb{C}$ $(|z| < 1)$, $k \in \mathbb{Z}$,

$$\mathrm{Li}_k(z) := \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{m^k} (\text{対数関数})$$

$$\frac{\mathrm{Li}_k(1 - e^{-x})}{1 - e^{-x}} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(k)} \frac{x^n}{n!}$$

とくに, $B_n^{(1)} = B_n$

定理 (Kaneko)(双対性)

$n, k \geq 0$ に対し,

$$B_n^{(-k)} = B_k^{(-n)}$$

多重 Poly ベルヌーイ数, η 関数

定義 (多重 Poly ベルヌーイ数)

$\mathbf{k} = (k_1, \cdots, k_r) \in \mathbb{Z}^r, z \in \mathbb{C}$ $(|z| < 1)$,

$$\mathrm{Li}_{\mathbf{k}}(z) := \sum_{1 \le m_1 < \cdots < m_r} \frac{z^{m_r}}{m_1^{k_1} m_2^{k_2} \cdots m_r^{k_r}}$$

$$\frac{\mathrm{Li}_{\mathbf{k}}(1-e^{-t})}{(1-e^{-t})^r} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{\mathbf{k}} \frac{t^n}{n!}$$

定義 (η 関数)

$s \in \mathbb{C}$, $\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$,
$Re(s) > 1 - r$ に対し,

$$\eta(\mathbf{k}; s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty t^{s-1} \frac{\mathrm{Li}_{\mathbf{k}}(1-e^t)}{1-e^t} dt$$

例

$r = 1, \mathbf{k} = (1)$ のとき

$\eta(1; s) = s\zeta(s+1)$

定理

$\mathbf{k} = (k_1, \cdots, k_r) \in \mathbb{Z}_{\ge 1}^r$
で $\eta(\mathbf{k}; s)$ は全 $\mathbb{C}$ 上に
解析接続できる.

$$\eta(\mathbf{k}; -m) = B_m^{\mathbf{k}}$$

とくに,

$\eta(1; -m) = B_m^{(1)} = B_m$

多重 Poly ベルヌーイ数, η 関数

定義 (多重対数関数)

$\mathbf{s} = (s_1, \cdots, s_r) \in \mathbb{C}^r$,
$\mathbf{z} = (z_1, \cdots, z_r) \in \mathbb{C}^r$,
$|z_j| \le 1 (1 \le j \le r)$ で

$$\mathrm{Li}^*_{\mathbf{s}}(\mathbf{z}) := \sum_{1 \le m_1 < \cdots < m_r} \prod_{j=1}^{r} \frac{z_j^{m_j}}{m_j^{s_j}}$$

定義 (多重 Poly ベルヌーイ数)

$$\mathbf{e}^{\chi} = \left(\frac{1-e^{\chi_1}}{1-e^{\chi_2}}, \frac{1-e^{\chi_2}}{1-e^{\chi_3}}, \ldots, \frac{1-e^{\chi_r}}{1} \right)$$

$$\frac{\mathrm{Li}^*_{\mathbf{s}}(\mathbf{e}^{-\chi})}{\prod_j (1 - e^{-\chi_j})} = \sum_{\mathbf{m}=0}^{\infty} \mathbb{B}^{\mathbf{s}}_{\mathbf{m}} \prod_{j=1}^{r} \frac{x_j^{m_j}}{m_j!}$$

定義 (η 関数)

$Re(s_j) > 0$ $(1 \le j \le r)$ で

$$\eta(-\mathbf{k}; \mathbf{s}) := \frac{1}{\prod_{j=1}^{r} \Gamma(s_j)} \times \int_0^\infty \prod_{j=1}^{r} t_j^{s_j - 1} \frac{\mathrm{Li}^*_{-\mathbf{k}}(\mathbf{e}^{\mathbf{t}})}{\prod_{j=1}^{r}(1-e^{t_j})} d\mathbf{t}$$

定理 (KanekoTsumura 1999, BSN 2022+)

$\eta(-\mathbf{k}; \mathbf{s})$ は全 $\mathbb{C}^r$ 上に解析接続できる.
$\mathbf{m} = (m_1, \cdots, m_r) \in \mathbb{Z}^r_{\ge 0}$ に対し，$\eta(-\mathbf{k}; -\mathbf{m}) = \mathbb{B}^{-\mathbf{k}}_{\mathbf{m}}$
さらに，次が成り立つ.

$$\mathbb{B}^{-\mathbf{k}}_{\mathbf{m}} = \mathbb{B}^{-\mathbf{m}}_{\mathbf{k}}$$

hook 型への拡張

s_{11}	s_{12}	$\cdots$	s_{1h}
s_{21}			
$\cdots$			
$s_{\ell 1}$			

z_{11}	z_{12}	$\cdots$	z_{1h}
z_{21}			
$\cdots$			
$z_{\ell 1}$			

定義 (hook 型多重対数関数)

$\lambda = (h, 1^{\ell-1})$, $\boldsymbol{s}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{C}^{h+\ell-1}$

$$\mathrm{Li}^{\lambda}_{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{z}) = \sum_{\substack{m_{11} \le \cdots \le m_{1h} \\ m_{11} < \cdots < m_{\ell 1}}} \prod \frac{z_{ij}^{m_{ij}}}{m_{ij}^{s_{ij}}}$$

定義 (hook 型 η 関数)

$\boldsymbol{s} \in \mathbb{C}^{h+\ell-1}, Re(s_{ij}) > 0$

$$\eta^{\lambda}_{-\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{s}) := \frac{1}{\prod \Gamma(s_{ij})} \cdot \int_0^\infty \prod t_{ij}^{s_{ij}-1} \frac{\mathrm{Li}^{\lambda}_{-\boldsymbol{k}}(1-e^{\mathfrak{t}})}{\mathfrak{t}^{-1} \prod (1-e^{t_{ij}})} d\boldsymbol{t}$$

定義 (hook 型 M.Poly ベルヌーイ数)

$\boldsymbol{k}, \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^{h+\ell-1}, |x_{ij}| < 1$,

$$\frac{\mathrm{Li}^{\lambda}_{-\boldsymbol{k}}(1-e^{-\chi})}{(-\chi)^{-1} \prod (1-e^{-x_{ij}})} = \sum_{\boldsymbol{m}=0}^{\infty} \mathbb{B}^{\lambda,-\boldsymbol{k}}_{\boldsymbol{m}} \prod \frac{x_{ij}^{m_{ij}}}{m_{ij}!}$$

定理 (Baba,2022+)

$Re(s_{ij}) > 0, m_{ij} \ge 1$ で $\eta^{\lambda}_{-\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{s})$ は全 $\mathbb{C}^{h+\ell-1}$ 上に解析接続できる．

$$\eta^{\lambda}_{-\boldsymbol{k}}(-\boldsymbol{m}) = \mathbb{B}^{\lambda,-\boldsymbol{k}}_{\boldsymbol{m}}$$

今後の課題． hook 型多重 Poly ベルヌーイ数の双対性