

Left Regular Band を用いた推移確率行列の固有値と重複度の考察

中川 由宇斗

東北大学大学院 理学研究科数学専攻 博士課程後期 1 年

自己紹介

東北大学大学院 理学研究科数学専攻 博士課程後期 1 年
中野研究室 中川 由宇斗

平成 28 年	東北大学	理学部数学科	入学
令和 2 年	東北大学	理学研究科数学専攻博士課程前期	進学
令和 4 年	東北大学	理学研究科数学専攻博士課程後期	進学

発表概要

$x^2 = x, xyx = xy$ を満たす半群を Left Regular Band という。半群の各元に重みを付け、重みにしたがって元を左からかけることにより、それに対応したマルコフ連鎖を考えることができる。「Semigroups, rings, and Markov chains (Brown (2000))」によって、このようなマルコフ連鎖を表す推移確率行列の固有値と重複度の求め方が示された。この論文の手法を用い、具体的なマルコフ連鎖の問題に対して、その推移確率行列の固有値と重複度を求めた。

研究の動機・位置づけ

直前の状態にのみ依存し、それ以前の状態に依存しないような確率過程をマルコフ連鎖という。このとき、ある正方行列 P を用いてマルコフ連鎖を表現することができる。この行列 P を推移確率行列といい、本研究では推移確率行列の固有値と重複度を求めた。その手法として、マルコフ連鎖を Left Regular Band と呼ばれる代数的なもので表現を行い、代数的な観点から、固有値と重複度を求めた。また、マルコフ連鎖は物理学をはじめとした数学以外の分野でも広く用いられる。将来的には、異分野で用いられるマルコフ連鎖にこの手法を用いることによる影響の考察を行いたい。

キーワード

確率論 ; マルコフ連鎖 ; 推移確率行列 ; Left Regular Band

Left Regular Band を用いた推移確率行列の固有値と重複度の考察

中川 由宇斗

東北大学大学院 理学研究科数学専攻 博士課程後期 1 年

研究課題

- **Left Regular Band** を用いてマルコフ連鎖を表現する
- Left Regular Band の代数的性質を用いてマルコフ連鎖を分析する
- Left Regular Band で表現されるマルコフ連鎖の推移確率行列の固有値と重複度を求める

研究の目的

物理学をはじめとする様々な分野においてマルコフ連鎖が用いられる。
Left Regular Band を用いたマルコフ連鎖の分析を、異分野で用いられるマルコフ連鎖に対応させたときの影響の考察を行う。

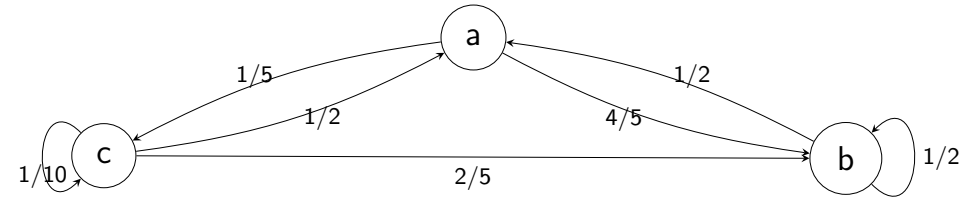
参考文献

- [1] K. S. Brown, *Semigroups, rings, and Markov chains*, J. Theoret. Probab. **13** (2000), no. 3, 871–938, DOI 10.1023/A:1007822931408.
- [2] W. Y. C. Chen and G.-C. Rota, *q-analogs of the inclusion-exclusion principle and permutations with restricted position*, Discrete Math. **104** (1992), no. 1, 7–22, DOI 10.1016/0012-365X(92)90622-M.

マルコフ連鎖

Ω を有限集合, Ω 上の確率変数列を $\{X_n\}_{n \geq 0}$ とする. X_{t+1} における状態が, 直前の状態 X_t にのみ依存し, それ以前の状態 $\{X_0, \dots, X_{t-1}\}$ に依存しないとき, 確率変数列 $\{X_n\}_{n \geq 0}$ が有限 **マルコフ連鎖** であるという.
マルコフ連鎖の例: カードシャッフル, ページランク
このとき, $|\Omega| \times |\Omega|$ の推移確率行列 P が存在して, 時刻 $t+1$ の分布 μ_{t+1} を時刻 t の分布 μ_t を用いて $\mu_{t+1} = P\mu_t$ と書くことができる.

例 $|\Omega| = 3$ のときの遷移図と推移確率行列



$$\mu_{t+1} = (x \ y \ z) \begin{pmatrix} 0 & 4/5 & 1/5 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 2/5 & 1/10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2y + 1/2z \\ 4/5x + 1/2y + 2/5z \\ 1/5x + 1/10z \end{pmatrix}$$

$$P^n = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2/11 \\ 1 & 1 & -5/22 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/10 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1/3 & 16/27 & 2/27 \\ -1/3 & 2/9 & 1/9 \\ 0 & -22/27 & 22/27 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1/3 & 16/27 & 2/27 \\ 1/3 & 16/27 & 2/27 \\ 1/3 & 16/27 & 2/27 \end{pmatrix}$$

Left Regular Band を用いた推移確率行列の固有値と重複度の考察

中川 由宇斗

東北大学大学院 理学研究科数学専攻 博士課程後期 1 年

Left Regular Band

集合 S 上の演算 $(*)$ が結合則 $((x * y) * z = x * (y * z))$ を満たすとき, S は**半群**であるという. 即ち半群とは, 群の公理から逆元と単位元の存在を除いたものである.

半群 S が $x^2 = x$, $xyx = xy \quad \forall x, y \in S$ を満たすとき, S は **Left Regular Band (LRB)** であるという.

LRB である S に適当な同値関係を定めたときの商集合を L とし, S から L への自然な全射を supp とかく.

$\forall x \in S, cx = c$ を満たす $c \in S$ を**チャンバー**といい, チャンバー全体の集合を C とかく. このとき, $\forall x \in S, c \in C \rightarrow xc \in C$ となる.

半群の各元に重みを置き $(\{w_x\}_{x \in S})$, 左から確率 w_x で x をかけるとすれば, 半群を用いてマルコフ連鎖を表現することができる.

先行研究 (Brown (2000))[1]

S を単位元を持つ有限の LRB とする. $\{w_x\}$ を S 上の確率分布とする. P を C 上のランダムウォークの推移確率行列として下のように定義する.

$$P(c, d) = \sum_{xc=d} w_x, \quad \forall c, d \in C, \quad x \in S$$

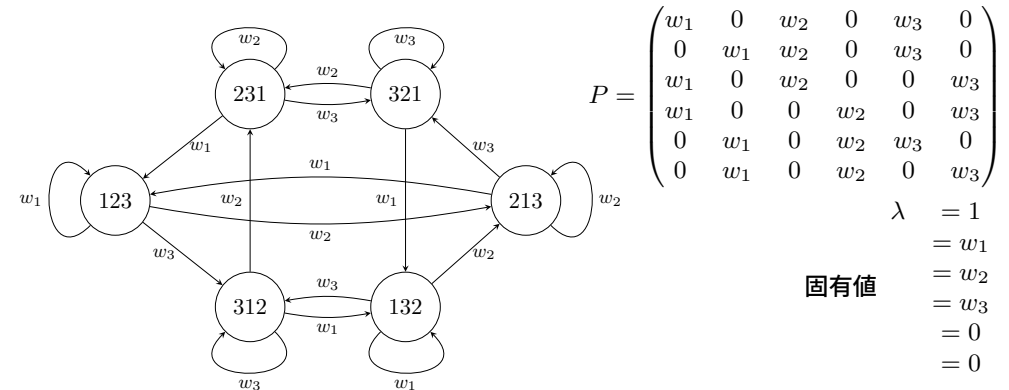
このとき, P は対角化可能であり, 各 $X \in L$ に対して, 重複度が m_X である固有値 λ_X を持ち, それぞれ次のように表される.

$$\lambda_X = \sum_{\text{supp } y \leq X} w_y \quad m_X = \sum_{Y \geq X} \mu(X, Y) c_Y$$

先行研究 (Brown (2000))[1] Tsetlin library

Tsetlin library とは, 「本棚に n 冊の異なる種類の本があるときに, 一冊の本を適当な確率分布に従って取り除き, それを一番左に戻す」という操作を考える. この操作を繰り返すことによって得られる置換群 S_n 上のマルコフ連鎖である.

$n = 8$ のときの Tsetlin library

$$\begin{array}{cccccccc} w_4 & 7 & 3 & 5 & 1 & 4 & 2 & 8 & 6 \\ \rightarrow & 4 & 7 & 3 & 5 & 1 & & 2 & 8 & 6 \\ \rightarrow & & 4 & 7 & 3 & 5 & 1 & 2 & 8 & 6 \end{array}$$


結果 (Brown (2000))[1] (本の選び方を一様とする)

$$\lambda_X = |X|/n \quad (X \subset [n])$$

$$m_X = d_{n-|X|} \quad d_k = k! \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^j}{j!}$$

(d_k : 任意の i に対して i 番目が i でない順列の個数モンモール数)

例: $S_3 = \{123, 132, 213, 231, 312, 321\} \quad d_3 = 2$

Left Regular Band を用いた推移確率行列の固有値と重複度の考察

中川 由宇斗

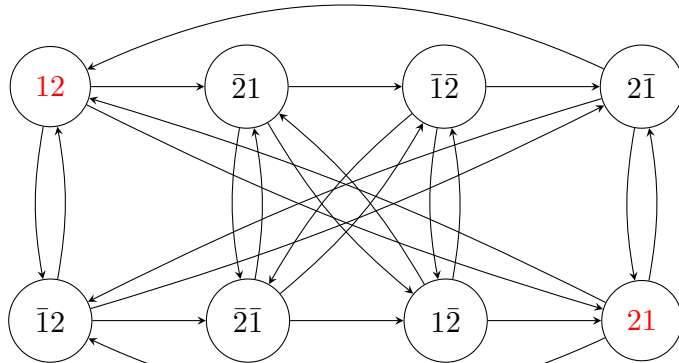
東北大学大学院 理学研究科数学専攻 博士課程後期 1 年

拡張 1 p 色版 Tsetlin library

十分薄い p 色のカバーを用意し、「適当に選んだ一冊の本に適当に選んだカバーを付けてから一番左に戻す」という操作を考える. この操作を繰り返すことによって得られる色つき置換群 $G_{n,p}$ 上のマルコフ連鎖を **p 色版 Tsetlin library** という.

$n = 8, p = 3$ のときのランダム操作. 但し, $(a, 0) = a, (b, 1) = \bar{b}, (c, 2) = c$ と書く.

w_4 7 3 5 1 4 2 8 6
 数字 4 を選ぶ $\rightarrow$ 4 7 3 5 1 2 8 6
 色 1 に変える $\rightarrow$ 4 7 3 5 1 2 8 6
 c_1 4 7 3 5 1 2 8 6



結果 1 (本と色の選び方を一様とする)

$$\lambda_X = |X|/n \quad (X \subset [n])$$

$$m_X = D_{n-|X|,p} \quad D_{k,p} = p^k k! \sum_{l=0}^k \frac{(-1)^l}{p^l l!}$$

固有値は同じである. 重複度 $D_{k,p}$ は p 色版モンモール数と呼ばれ, モンモール数 d_k の拡張になっている.

拡張 2 Tsetlin library の q 類似

q 類似とは, $q \rightarrow 1$ としたときに元の形となるようなものである. 一次独立な n 本のベクトルがあるとする. 「ランダムに外からベクトルを 1 本持ってきて一番左に置き, 左にあるベクトルの線形和で表されるベクトルを削除する」という操作を考える. この操作によって得られる $GL_n(\mathbb{F}_q)$ (各元が $\mathbb{F}_q$ (位数 q の有限体) であるような $n \times n$ 正則行列) 上のマルコフ連鎖を, **Tsetlin library の q 類似** という.

n = 3 のときの Tsetlin library の q 類似のランダム操作

$$\begin{aligned} & w \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow{\text{左に非 0 のベクトルをかける}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow{\text{既出の元の線形和で表せるのを消す}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ & \therefore \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (q-1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

結果 2 (ベクトルの選び方を一様とする)

$$\lambda_X = [\dim X]_q / [n]_q \quad (X = \text{span}\{x_1, \dots, x_l\})$$

$$m_X = \langle n - \dim X \rangle! \sum_{j=0}^{n-\dim X} \frac{(-1)^j q^{\binom{j}{2}} q^{\dim X(n-\dim X-j)}}{\langle j \rangle!} = F_n(\dim X)$$

固有値は $\dim X/n$ の q 類似となる. 重複度 $F_n(k)$ は [2] に出てくる式を改良したものである. (モンモール数 d_k の q 類似とは異なる)

Left Regular Band を用いた推移確率行列の固有値と重複度の考察

中川 由宇斗

東北大学大学院 理学研究科数学専攻 博士課程後期 1 年

先行研究 (Brown (2000))[1] Tsetlin library を表現する LRB

$S = F_n = \{x \mid x = (x_1, \dots, x_l) \mid 0 \leq l \leq n\}$ ($x_i \in [n] = \{1, \dots, n\}$) とする. また, $l = 0$ のときは F_n の単位元とし, e とかく. 演算を次で定める.

$$(x_1, \dots, x_l) * (y_1, \dots, y_m) = (x_1, \dots, x_l, y_1, \dots, y_m) \%$$

但し, $\%$ は「左に既出ならばその元を削除する」という意味とする.

例: $(21) * (35416) = (2\color{red}{1}354\color{red}{1}6) \% = (2\color{red}{1}3546)$

これは半群で LRB である. また, チャンバー $c = (x_1, \dots, x_n)$ ($l = n$).

S 上の確率分布 $\{w_x\}_{x \in S}$ を $w_x = \begin{cases} w_i & x = (i) \quad (l = 1) \\ 0 & \text{otherwise} \quad (l \neq 1) \end{cases}$ と定義する.

チャンバー c に, 確率 w_x で選んだ $x \in S$ を左からかけることにより, Tsetlin library の状態の変化を表すことが出来る.

$(1234) \rightarrow (3124)$ の変化: $(3) * (1234) = (\color{red}{3}12\color{red}{3}4) \% = (\color{red}{3}124).$

p 色版 Tsetlin library を表現する LRB

$S = G_{n,p} = \{x = ((x_1, a_1), \dots, (x_l, a_l)) \mid (1 \leq l \leq n), x_i \in [n], a_i \in C_p = \{0, \dots, p-1\}\}$ とする. また, $l = 0$ のときは $G_{n,p}$ の単位元とし, e とかく. 演算を次で定める.

$$\begin{aligned} xy &= ((x_1, a_1), \dots, (x_l, a_l)) * ((y_1, b_1), \dots, (y_m, b_m)) \\ &= ((x_1, a_1), \dots, (x_l, a_l), (y_1, b_1), \dots, (y_m, b_m)) \% \end{aligned}$$

のように, 続けて並べることで定義する. $\%$ は, 「 $[n]$ の元において左に既出ならば, 削除する」という意味とする.

Tsetlin library の q 類似を表現する LRB

$V = \mathbb{F}_q^n \setminus \{\vec{0}\}$ とする. $F_{n,q} = \{(x_1, \dots, x_l) \mid x_i \in V \mid 0 \leq l \leq n\}$ とする. 但し, $(x_1, \dots, x_l)$ は一次独立とする. また, $l = 0$ のときは $F_{n,q}$ の単位元とし, e とかく. 演算を

$$(x_1, \dots, x_l) * (y_1, \dots, y_m) = (x_1, \dots, x_l, y_1, \dots, y_m) \%$$

但し, $\%$ は「左の元の線形和で表せるならば, 削除する」という意味とする.

$$({}^t(1, 0), {}^t(1, 1), {}^t(0, 1)) \% = {}^t(1, 0), {}^t(1, 1) \cdots {}^t(0, 1) = (q-1){}^t(1, 0) + {}^t(1, 1)$$

今後の展望

- p 色版 Tsetlin library を別の LRB で表現する
- LRB で表されるマルコフ連鎖の研究
- 定常分布や全変動距離といったマルコフ連鎖の性質の分析
- 異分野への応用