

空間2次元線形放物型確率偏微分方程式モデルの 係数パラメータの推定

渡名喜 庸蔵¹, 貝野 友祐², 内田 雅之¹

1. 大阪大学大学院 基礎工学研究科,
2. 神戸大学大学院 海事科学研究科

発表者紹介

氏 名 渡名喜 庸蔵

所 属 大阪大学大学院 基礎工学研究科 D2

研究分野 数理統計学, 確率過程の統計的推測

確率偏微分方程式 (SPDE) モデルとは

- ランダム項をもつ偏微分方程式で, 時間と空間に依存して確率的に変化する現象を記述するモデル.
- 物理学, 生物学, 経済学など様々な分野で用いられる.
- 線形放物型 SPDE モデルは確率熱方程式を含む重要なモデルであり, 多くの場面で現れる.

応用例 海水の温度変化 (Piterbarg and Ostrovskii, 1997), 神経細胞の膜電位 (Tuckwell, 2013).

研究の動機, 位置づけ

- 先行研究として, Bibinger and Trabs [1], Kaino and Uchida [3], Hildebrandt and Trabs [2] は, 高頻度時空間データに基づく空間 1 次元線形放物型 SPDE モデルのパラメータ推定について研究を行った.
- 海水温度を解析する場合, 空間 1 次元線形放物型 SPDE モデルでは直線上の海水温度しか解析できない.
⇒ 海面温度の解析をしたい.
- しかし, 高頻度時空間データに基づく空間 2 次元線形放物型 SPDE モデルの統計的推測を扱った研究はこれまでなかった.
- そこで, 空間 2 次元線形放物型 SPDE モデルの統計的推測の第一歩として, パラメータ推定を考える.
- 本研究は, 高頻度時空間データに基づく空間 2 次元線形放物型 SPDE モデルのパラメータ推定を扱ったはじめての研究である.

空間 2 次元線形放物型確率偏微分方程式モデル

$D = [0, 1]^2$ 上の確率偏微分方程式

$$\begin{cases} dX_t(y, z) = \left\{ \theta_2 \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + \theta_1 \frac{\partial}{\partial y} + \eta_1 \frac{\partial}{\partial z} + \theta_0 \right\} X_t(y, z) dt \\ \quad + \sigma dW_t^Q(y, z), \quad (t, y, z) \in [0, 1] \times D, \\ X_0(y, z) = \xi(y, z), \quad (y, z) \in D, \\ X_t(y, z) = 0, \quad (t, y, z) \in [0, 1] \times \partial D \end{cases} \quad (1)$$

を考える. ただし

- $\{W_t^Q\}$ は D 上のソボレフ空間における Q -ウィーナー過程,
- 初期値 ξ は W^Q と独立,
- パラメータ空間 $\Theta \subset \mathbb{R}^3 \times (0, \infty)^2$ はコンパクト凸集合,
- $(\theta, \sigma) := (\theta_0, \theta_1, \eta_1, \theta_2, \sigma) \in \Theta$ は未知パラメータ,
- $\theta^* = (\theta_0^*, \theta_1^*, \eta_1^*, \theta_2^*), \sigma^*$ は真値で $(\theta^*, \sigma^*) \in \text{Int } \Theta$.

高頻度時空間データ

$\mathbb{X}_{N,M} = \{X_{t_i}(y_{j_1}, z_{j_2})\}_{0 \leq i \leq N, 0 \leq j_1 \leq M_1, 0 \leq j_2 \leq M_2}$ を考える. ただし, $t_i = i\Delta = i/N$, $y_{j_1} = j_1/M_1$, $z_{j_2} = j_2/M_2$, $M := M_1 M_2$ とする.

記法, 設定

- $-A_\theta = \theta_2 \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + \theta_1 \frac{\partial}{\partial y} + \eta_1 \frac{\partial}{\partial z} + \theta_0$,
- $e_{k,l}(y, z) = 2 \sin(\pi k y) \sin(\pi l z) e^{-(\kappa y + \eta z)/2}$,
- $\lambda_{k,l} = -\theta_0 + \frac{\theta_1^2 + \eta_1^2}{4\theta_2} + \pi^2(k^2 + l^2)\theta_2$

$(k, l \in \mathbb{N}, (y, z) \in D)$ とおく. ただし, $\kappa = \theta_1/\theta_2$, $\eta = \eta_1/\theta_2$ とする. このとき $e_{k,l}$ は微分作用素 A_θ の固有関数で $\lambda_{k,l}$ はそれに付随する固有値である.

$$A_\theta e_{k,l} = \lambda_{k,l} e_{k,l}.$$

また $\{e_{k,l}\}_{k,l \geq 1}$ は重み付き L^2 -内積

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle_\theta &= \int_0^1 \int_0^1 u(y, z) v(y, z) e^{\kappa y + \eta z} dy dz, \\ \|u\|_\theta &= \langle u, u \rangle_\theta^{1/2} \end{aligned}$$

に関する完全正規直交系であり, SPDE の解の状態空間を

$$H_\theta = \{u : D \rightarrow \mathbb{R} \mid \|u\|_\theta < \infty, u(x, y) = 0 \text{ for } (y, z) \in \partial D\}$$

とする.

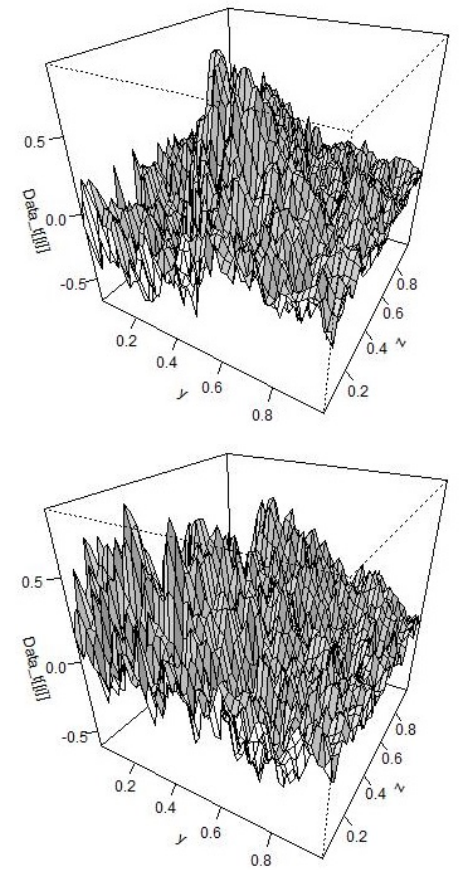


Figure 1: $t = 0.1$ (上図), $t = 0.5$ (下図) における $X_t(y, z)$ のサンプルパス.

- $\xi \in H_\theta$ に適当な初期条件を課す ([4] 参照).
- $\lambda_{1,1}^* = -\theta_0^* + \frac{(\theta_1^*)^2 + (\eta_1^*)^2}{4\theta_2^*} + 2\pi^2\theta_2^* > 0$ とする.
- 既知の $\alpha \in (0, 1)$ に対して Q -ウィーナー過程を

$$W_t^Q = \sum_{k,l \geq 1} \lambda_{k,l}^{-\alpha/2} w_{k,l}(t) e_{k,l}$$

で定める. ただし $\{w_{k,l}\}_{k,l \geq 1}$ は独立な 1 次元標準ブラウン運動である.

→ SPDE (1) の軟解が存在するために減衰因子を含める必要がある.

このとき

- SPDE (1) の軟解が唯一つ存在し,

$$X_t = e^{-tA_\theta} \xi + \sigma \int_0^t e^{-(t-s)A_\theta} dW_s^Q \quad \text{a.s.}$$

で与えられる. ただし $u \in H_\theta$ に対して

$$e^{-tA_\theta} u = \sum_{k,l \geq 1} e^{-\lambda_{k,l} t} \langle u, e_{k,l} \rangle_\theta e_{k,l}.$$

- 座標過程 $x_{k,l}(t) = \langle X_t, e_{k,l} \rangle_\theta$ に対して軟解 X_t は次のようにスペクトル分解できる.

$$X_t = \sum_{k,l \geq 1} x_{k,l}(t) e_{k,l}.$$

ただし $\{x_{k,l}\}_{k,l \geq 1}$ は独立な 1 次元オルンシュタイン・ウーレンベック過程である.

$$\begin{cases} dx_{k,l}(t) = -\lambda_{k,l} x_{k,l}(t) dt + \sigma \lambda_{k,l}^{-\alpha/2} dw_{k,l}(t), \\ x_{k,l}(0) = \langle \xi, e_{k,l} \rangle_\theta. \end{cases}$$

$s = \sigma^2/\theta_2, \kappa, \eta$ の最小コントラスト推定

空間間引きデータ

$\mathbb{X}_{N,m}^{(1)} = \{X_{t_i}(\tilde{y}_{j_1}, \tilde{z}_{j_2})\}_{0 \leq i \leq N, 0 \leq j_1 \leq m_1, 0 \leq j_2 \leq m_2}$ を考える. ただし, ある $0 < \rho < 1 \wedge 2(1 - \alpha)$ と $b \in (0, 1/2)$ について $m := m_1 m_2 = O(N^\rho)$,

$$b \leq \tilde{y}_0 < \tilde{y}_1 < \cdots < \tilde{y}_{m_1} \leq 1 - b,$$

$$b \leq \tilde{z}_0 < \tilde{z}_1 < \cdots < \tilde{z}_{m_2} \leq 1 - b$$

とする.

$$\bullet Z_N(y, z) = \frac{1}{N \Delta^\alpha} \sum_{i=1}^N \left\{ X_{t_i}(y, z) - X_{t_{i-1}}(y, z) \right\}^2,$$

$$\bullet f(y, z : s, \kappa, \eta) = \frac{\Gamma(1 - \alpha)}{4\pi\alpha} s e^{-(\kappa y + \eta z)},$$

$$\bullet \Xi \subset (0, \infty) \times \mathbb{R}^2 \text{ はコンパクト凸集合,}$$

$$\bullet (s^*, \kappa^*, \eta^*) \in \text{Int } \Xi \text{ は真値}$$

とする. ただし, Γ はガンマ関数を表す. このとき (s, κ, η) の最小コントラスト推定量を空間間引きデータ $\mathbb{X}_{N,m}^{(1)}$ を用いて

$$\begin{aligned} U_{N,m}(s, \kappa, \eta) \\ = \sum_{j_2=1}^{m_2} \sum_{j_1=1}^{m_1} \left\{ Z_N(\tilde{y}_{j_1}, \tilde{z}_{j_2}) - f(\tilde{y}_{j_1}, \tilde{z}_{j_2} : s, \kappa, \eta) \right\}^2, \end{aligned}$$

$$(\hat{s}, \hat{\kappa}, \hat{\eta}) = \underset{(s, \kappa, \eta) \in \Xi}{\operatorname{argmin}} U_{N,m}(s, \kappa, \eta)$$

で定める.

Theorem 1

正則条件の下, $\gamma < 1/2 \wedge (1 - \alpha) - \rho/2$ に対して
 $N, m_1, m_2 \rightarrow \infty$ のとき

$$m^{1/2} N^\gamma (\hat{s} - s^*, \hat{\kappa} - \kappa^*, \hat{\eta} - \eta^*) \xrightarrow{p} 0.$$

係数パラメータの適応的推定

時間間引きデータ

$\mathbb{X}_{n,M}^{(2)} = \{X_{\tilde{t}_i}(y_{j_1}, z_{j_2})\}_{0 \leq i \leq n, 0 \leq j_1 \leq M_1, 0 \leq j_2 \leq M_2}$ を考える. ただし, $n \leq N$ に対して

$$\tilde{t}_i = \left\lfloor \frac{N}{n} \right\rfloor \frac{i}{N}, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

とする.

座標過程 $x_{k,l}(t)$ を時間間引きデータ $\mathbb{X}_{n,M}^{(2)}$ を用いて

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k,l}(\tilde{t}_i) &= \frac{2}{M} \sum_{j_2=1}^{M_2} \sum_{j_1=1}^{M_1} X_{\tilde{t}_i}(y_{j_1}, z_{j_2}) \\ &\quad \times \sin(\pi k y_{j_1}) \sin(\pi l z_{j_2}) e^{(\hat{\kappa} y_{j_1} + \hat{\eta} z_{j_2})/2} \end{aligned}$$

で近似する. このとき座標過程のボラティリティパラメータ $\sigma_{k,l} := \sigma \lambda_{k,l}^{-\alpha/2}$ の推定量を

$$\hat{\sigma}_{k,l}^2 = \sum_{i=1}^n \{ \hat{x}_{k,l}(\tilde{t}_i) - \hat{x}_{k,l}(\tilde{t}_{i-1}) \}^2$$

で定める.

SPDE (1) の係数パラメータの適応的推定量を

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_2 &= \left\{ \frac{3\pi^2}{\hat{s}^{1/\alpha}} \left(\frac{1}{(\hat{\sigma}_{1,2}^2)^{1/\alpha}} - \frac{1}{(\hat{\sigma}_{1,1}^2)^{1/\alpha}} \right)^{-1} \right\}^{\alpha/(1-\alpha)}, \\ \hat{\theta}_1 &= \hat{\kappa} \hat{\theta}_2, \quad \hat{\eta}_1 = \hat{\eta} \hat{\theta}_2, \quad \hat{\sigma}^2 = \hat{s} \hat{\theta}_2, \\ \hat{\theta}_0 &= - \left(\frac{\hat{s} \hat{\theta}_2}{\hat{\sigma}_{1,1}^2} \right)^{1/\alpha} + \left(\frac{\hat{\kappa}^2 + \hat{\eta}^2}{4} + 2\pi^2 \right) \hat{\theta}_2 \end{aligned}$$

で定め, $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_0, \hat{\theta}_1, \hat{\eta}_1, \hat{\theta}_2)$ とする.

$$\begin{aligned} J_{1,1} &= (\lambda_{1,1}^*)^2 \left(\frac{\lambda_{1,2}^*}{\alpha} - \frac{\theta_0^*}{1-\alpha} \right)^2 + (\lambda_{1,2}^*)^2 \left(\frac{\lambda_{1,1}^*}{\alpha} - \frac{\theta_0^*}{1-\alpha} \right)^2, \\ c_{1,2} &= \frac{-1}{1-\alpha} \left\{ (\lambda_{1,1}^*)^2 \left(\frac{\lambda_{1,2}^*}{\alpha} - \frac{\theta_0^*}{1-\alpha} \right) + (\lambda_{1,2}^*)^2 \left(\frac{\lambda_{1,1}^*}{\alpha} - \frac{\theta_0^*}{1-\alpha} \right) \right\}, \\ c_{2,2} &= \frac{1}{(1-\alpha)^2} \{ (\lambda_{1,1}^*)^2 + (\lambda_{1,2}^*)^2 \}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{1,2} &= c_{1,2} (\theta_1^*, \eta_1^*, \theta_2^*, (\sigma^*)^2), \\ J_{2,2} &= c_{2,2} (\theta_1^*, \eta_1^*, \theta_2^*, (\sigma^*)^2)^\top (\theta_1^*, \eta_1^*, \theta_2^*, (\sigma^*)^2), \end{aligned}$$

$$\mathcal{J} = \frac{2}{9\pi^4 (\theta_2^*)^2} \begin{pmatrix} J_{1,1} & J_{1,2} \\ J_{1,2}^\top & J_{2,2} \end{pmatrix}$$

とおく. ただし $\top$ は転置を表す.

Theorem 2

正則条件の下, $n, M_1, M_2 \rightarrow \infty$ のとき $(\hat{\theta}, \hat{\sigma}^2)$ は $(\theta^*, (\sigma^*)^2)$ の一致推定量で

$$\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta^*, \hat{\sigma}^2 - (\sigma^*)^2) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \mathcal{J}).$$

数値シミュレーション

設定

SPDE (1) の数値解を

$$\widetilde{X}_{t_i}(y_{j_1}, z_{j_2}) = \sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^L \widetilde{x}_{k,l}(t_i) e_{k,l}(y_{j_1}, z_{j_2}),$$

$$\begin{aligned} \widetilde{x}_{k,l}(t_i) = & \exp(-\lambda_{k,l}\Delta) \widetilde{x}_{k,l}(t_{i-1}) \\ & + \sqrt{\frac{\sigma^2(1 - \exp(-2\lambda_{k,l}\Delta))}{2\lambda_{k,l}^{1+\alpha}}} \mathcal{N}(0, 1), \end{aligned}$$

$i = 1, \dots, N$, $j_1 = 1, \dots, M_1$, $j_2 = 1, \dots, M_2$ で生成する.

- 真値 $(\theta_0^*, \theta_1^*, \eta_1^*, \theta_2^*, \sigma^*) = (0, 0.2, 0.2, 0.2, 1)$.
- $N = 10^3$, $M_1 = M_2 = 200$, $K = L = 10^4$.
- $\xi = 0$, $\alpha = 0.5$, $\lambda_{1,1}^* \approx 4.05$.
- イテレーション: 120 回.

参考文献

- [1] M. Bibinger and M. Trabs. (2020). Volatility estimation for stochastic PDEs using high-frequency observations. *Stochastic Processes and their Applications*, 130(5):3005–3052.
- [2] F. Hildebrandt and M. Trabs. (2021). Parameter estimation for SPDEs based on discrete observations in time and space. *Electronic Journal of Statistics*, 15(1):2716–2776.
- [3] Y. Kaino and M. Uchida. (2020). Parametric estimation for a parabolic linear SPDE model based on discrete observations. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 211:190–220.
- [4] Y. Tonaki, Y. Kaino, and M. Uchida. (2022). Parameter estimation for linear parabolic SPDEs in two space dimensions based on high frequency data. arXiv:2201.09036.

[i] (s, κ, η) の推定.

- $m_1 = m_2 = 5$, $(\rho, \gamma) = (0.47, 0.26)$ とする.

Table 1: $\hat{s}$, $\hat{\kappa}$, $\hat{\eta}$ の平均および標準偏差

	$\hat{s}$	$\hat{\kappa}$	$\hat{\eta}$
真 値	5	1	1
平 均	4.776	0.989	0.996
標準偏差	(0.138)	(0.039)	(0.028)

⇒ バイアスが小さく、よい結果となっている.

[ii] $(\theta_0, \theta_1, \eta_1, \theta_2, \sigma^2)$ の推定.

- $n = 100$ とする.

Table 2: $\hat{\theta}_0$, $\hat{\theta}_1$, $\hat{\eta}_1$, $\hat{\theta}_2$, $\hat{\sigma}^2$ の平均および標準偏差

	$\hat{\theta}_0$	$\hat{\theta}_1$	$\hat{\eta}_1$	$\hat{\theta}_2$	$\hat{\sigma}^2$
真 値	0	0.2	0.2	0.2	1
平 均	-0.665	0.189	0.191	0.190	0.913
標準偏差	(2.750)	(0.083)	(0.084)	(0.086)	(0.408)

⇒ $\hat{\theta}_0$ はバイアスがあるが、 $\hat{\theta}_1$, $\hat{\eta}_1$, $\hat{\theta}_2$, $\hat{\sigma}^2$ はよい結果となっている.