

冪乗系の反応拡散近似方程式の収束性について

塚本悠暉

明治大学 PD(研究・知財戦略機構)

専門: 反応拡散系, 反応拡散近似, 熱方程式

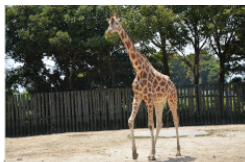
化学, 物理学, 生物学など様々な分野で現れる反応拡散系は多様な形状の解を構成でき, 近似方程式に有用である. 本発表では二成分の冪乗系反応拡散近似方程式の収束性について考察する. 条件によって, 二成分が分離, ある速度で浸食, 一瞬で一成分になることを紹介する.

October, 2022

反応拡散近似方程式

$$\partial_t \mathbf{u}_\varepsilon = D\Delta \mathbf{u}_\varepsilon + \mathbf{F}(\mathbf{u}_\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{G}(\mathbf{u}_\varepsilon)$$

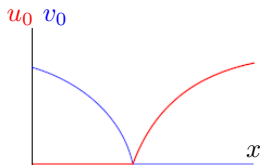
$\varepsilon \rightarrow 0$ のときの $\mathbf{u}_\varepsilon$ の挙動を考える. 解 $\mathbf{u}_\varepsilon$ は集合 $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m; \mathbf{G}(\mathbf{x}) = 0\}$ 内に収束することが期待される. また極限解 $\mathbf{u}_0$ は $\partial_t \mathbf{u}_0 = D\Delta \mathbf{u}_0 + \mathbf{F}(\mathbf{u}_0)$ を満たすことが期待される.



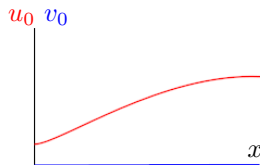
$$\begin{cases} \partial_t u_\varepsilon = \Delta u_\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon} u_\varepsilon^{m_1} v_\varepsilon^{m_2} & \text{in } Q_T = \Omega \times (0, T], \\ \partial_t v_\varepsilon = -\frac{1}{\varepsilon} u_\varepsilon^{m_3} v_\varepsilon^{m_4} & \text{in } Q_T, \\ \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n} = 0 & \text{on } S_T = \partial\Omega \times (0, T], \\ u_\varepsilon(\cdot, 0) = f \geq 0, \quad v_\varepsilon(\cdot, 0) = g \geq 0, \quad fg \equiv 0 & \text{in } \Omega. \end{cases}$$

- ① $m_1 > 3$ のとき, u_ε はノイマン境界条件の熱方程式の解に一様収束する.
- ② $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = 1$ または $m_2 > 1$ または $1 < m_4 < 2$ のとき, u_ε はあるステファン問題の解に関連する関数に収束する.
- ③ $m_3 > 1$ のとき, u_ε はあるディリクレ境界条件の熱方程式の解に収束する.

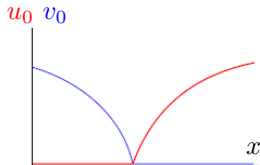
(m_i は記述していないときは 1 で考える.)



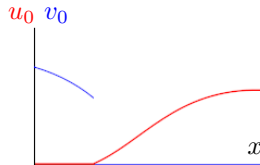
t 秒後
→



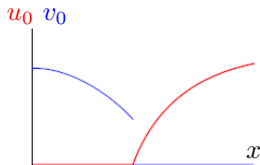
条件 1: ノイマン境界の熱方程式



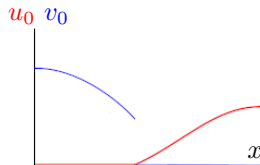
t 秒後
→



条件 2: ステファン問題



t 秒後
→



条件 3: ディリクレ境界の熱方程式

主定理

$$\begin{cases} \partial_t u_\varepsilon = \Delta u_\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon} u_\varepsilon^{m_1} v_\varepsilon & \text{in } Q_T, \\ \partial_t v_\varepsilon = -\frac{1}{\varepsilon} u_\varepsilon v_\varepsilon & \text{in } Q_T, \\ \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n} = 0 & \text{on } S_T, \\ u_\varepsilon(\cdot, 0) = f \geq 0, \quad v_\varepsilon(\cdot, 0) = g \geq 0, \quad fg \equiv 0 & \text{in } \Omega. \end{cases}$$

$m_1 > 2$ のとき, u_ε はノイマン境界条件の熱方程式の解に一様収束する.

Key Point

ε によらない $0 < \alpha < 1$, 十分小さい $t^* > 0$, 十分大きい $\delta > 0$ について

$$\begin{cases} \partial_t \underline{u} = \Delta \underline{u} - \delta \underline{u}^\alpha & \text{in } Q_{t^*}, \\ \frac{\partial \underline{u}}{\partial n} = 0 & \text{on } S_{t^*}, \\ \underline{u}(\cdot, 0) = f & \text{in } \Omega. \end{cases}$$

を満たす解が $u_\varepsilon \geq \underline{u} > 0$ in $(0, t^*]$ を満たす.