# 腫瘍血管新生モデルの数理構造の解明

千代 祐太朗

（東京理科大学大学院　理学研究科 数学専攻 博士後期課程2年）

## 概要

内皮細胞下組織に血管の塊ができることにより
腫瘍が形成される過程を記述する数理モデルを考える.
これまでの研究では，方程式に現れる感受性関数を
定数関数に限定した場合が扱われている. 本研究では，
発表者が開発した指数・感受度組込型エネルギー法により，
感受性関数を定数関数に限定しない場合に，
方程式の解の有界性を初めて証明することができた.

# 1. 問題

腫瘍血管新生方程式系：

$$
\boxed{\begin{cases}
u_t = \Delta u \underline{- \nabla\cdot(u\chi_1(v)\nabla v)} \; \underline{+ \nabla\cdot(u\chi_2(w)\nabla w)}, \\
v_t = \Delta v + \nabla\cdot(v\xi(w)\nabla w) - v + u, \\
w_t = \Delta w - w + u
\end{cases}}
$$

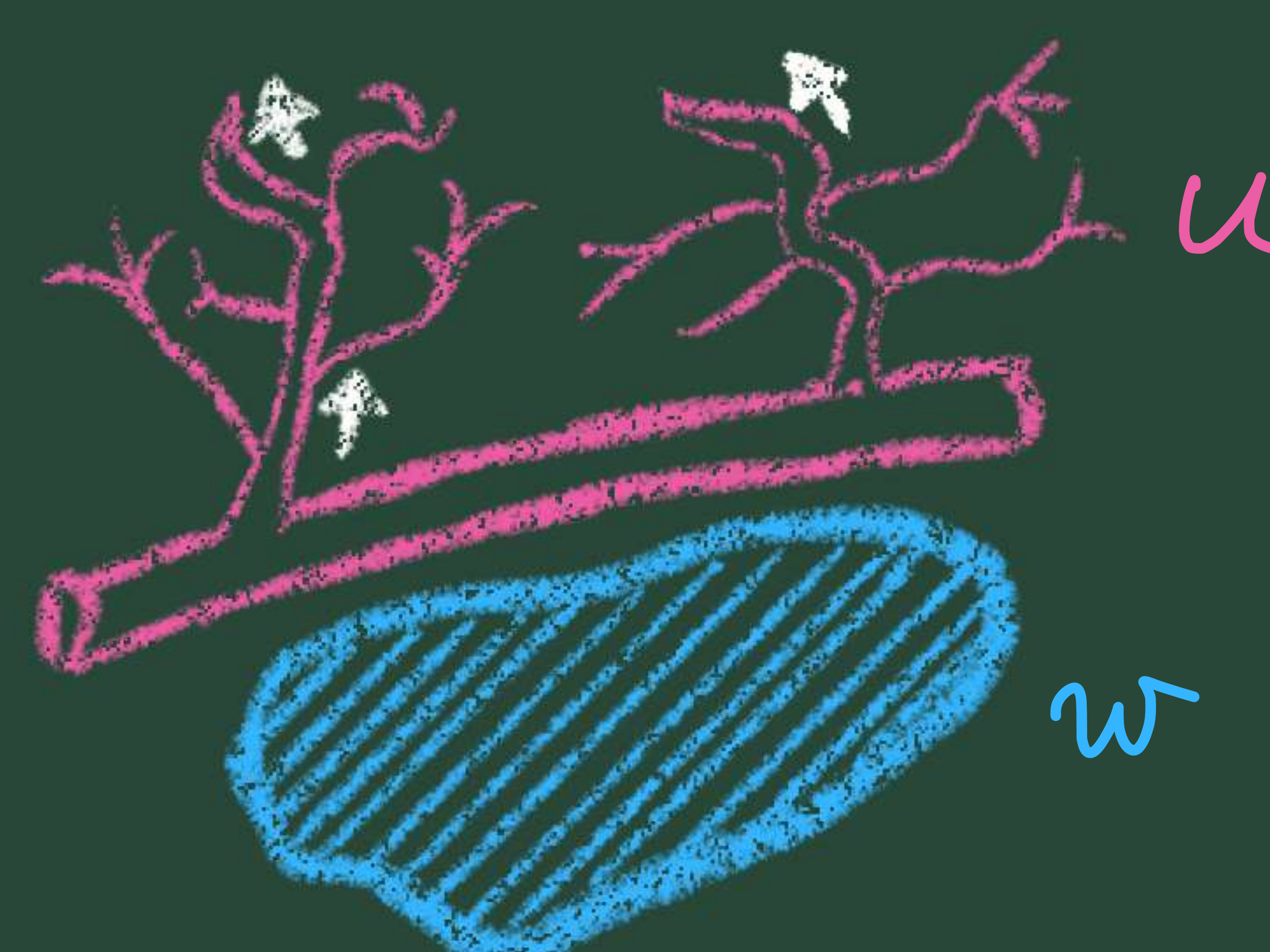
$u$：内皮細胞の密度

$v$：内皮細胞の動きを促す酵素

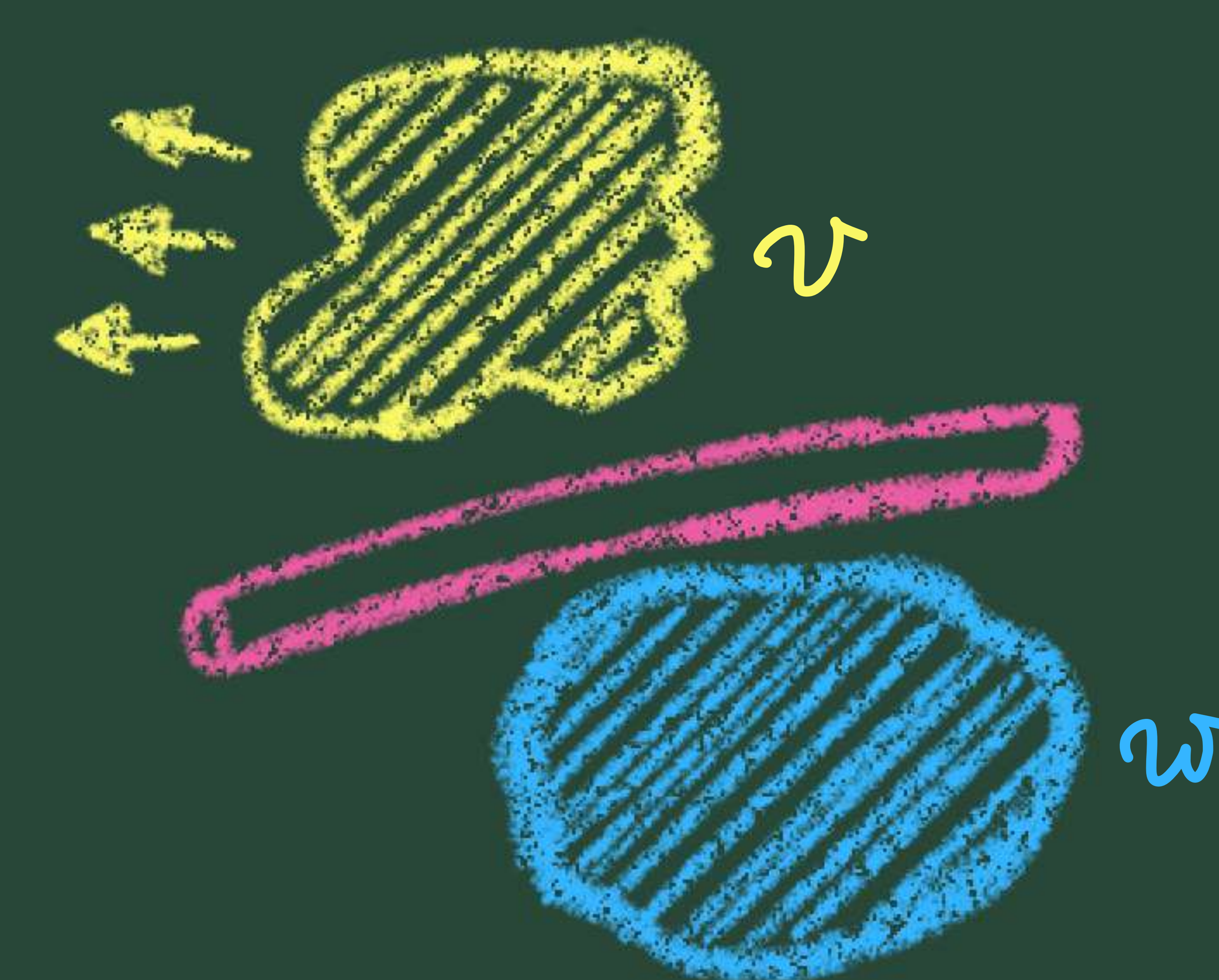
$w$：細胞外基質

$-\nabla\cdot(u\chi_1(v)\nabla v)$


$+\nabla\cdot(u\chi_2(w)\nabla w)$




$+\nabla\cdot(v\xi(w)\nabla w)$



## 2. 誘引・反発型走化性方程式系

腫瘍血管新生方程式系において $\xi=0$ の場合:

$$\boxed{\begin{cases} u_t = \Delta u - \nabla\cdot(u\chi(v)\nabla v) + \nabla\cdot(u\xi(w)\nabla w), \\ v_t = \Delta v - v + u, \\ w_t = \Delta w - w + u \end{cases}}$$

$u$:生物の密度

$v$:誘引物質の濃度

$w$:忌避物質の濃度

C.-Mizukami-Yokota (2020, 2021):

指数・感受度組込型エネルギー法による有界性の導出

⇒ $f(v,w) := \exp\left(-r\int_0^v \chi(s)\,ds - \sigma\int_0^w \xi(s)\,ds\right)$ $(r, \sigma > 0)$ を用いて

$\int_\Omega u^p f \le C$ (正定数) となることを示す方法

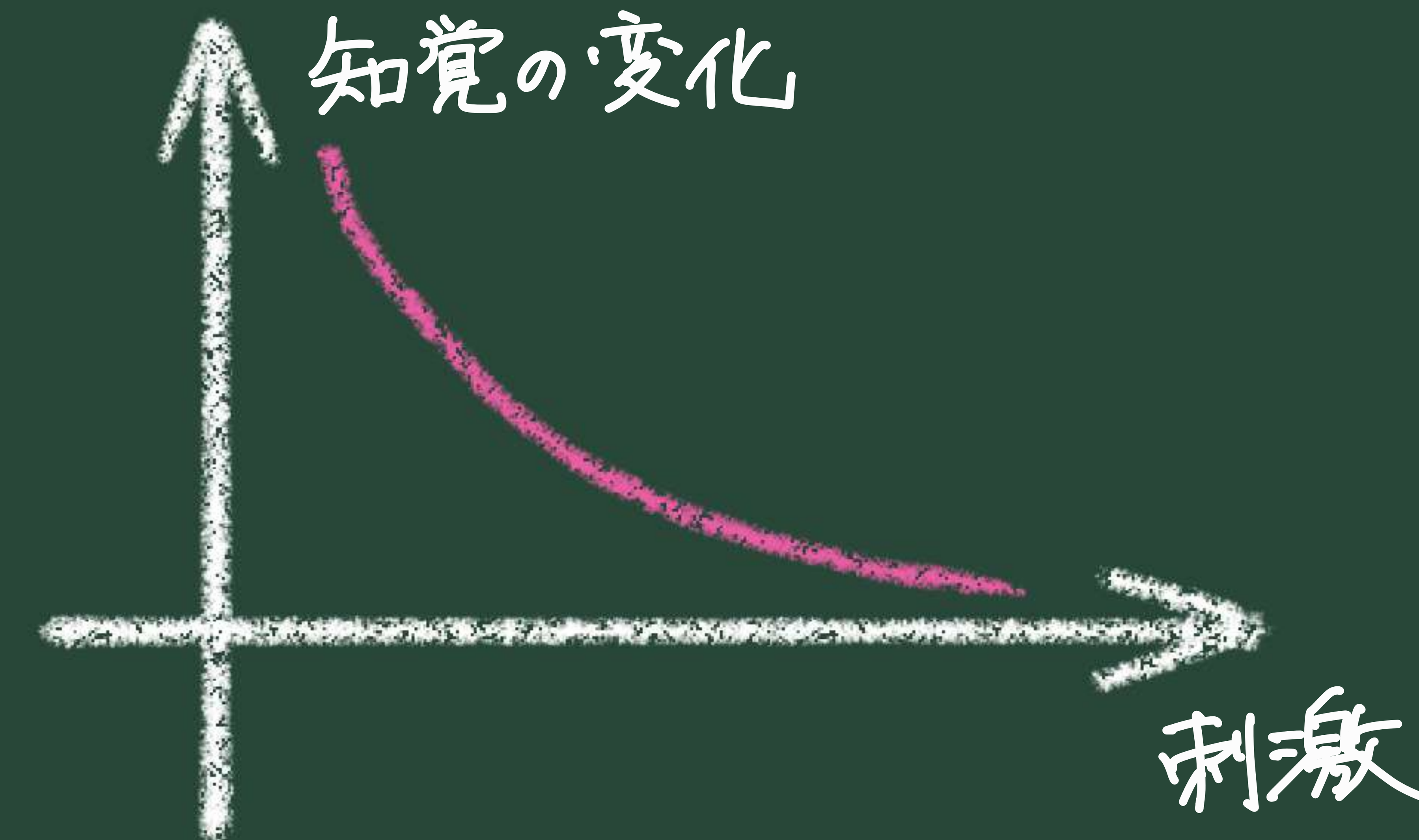
# 3. 目的・結果

**先行研究**　Tao-Winkler (2021)：　限定的な場合　$\chi_1, \chi_2, \xi$ が定数関数の場合

C.-Mizukami-Yokota (2020, 2021)：限定的な場合　$\xi$ が定数関数の場合

**目的**　$\chi_1, \chi_2, \xi$ が関数の場合に，
一般の設定での研究の足掛かりを構築する

Weber-Fechner則の観点からとても重要！




**研究成果**

$$\chi_1(s) = \frac{K_1}{(1+s)^{l_1}}, \quad \chi_2(s) = \frac{K_2}{(1+s)^{l_2}}, \quad \xi(s) = \frac{K_3}{(1+s)^{l_3}}, \qquad \frac{l_1}{K_1}, \frac{l_2}{K_2}：十分大$$

$\Rightarrow$ 十分小さい $K_3 > 0$ に対して解の有界性が成立.

**証明方法**　$\xi = 0$ の場合の摂動問題 ⇒ 発表者が開発した
指数・感受度組込型エネルギー法 利用

# 4. まとめと今後の展望

## 基礎的な研究成果

- 国際誌「J. Math. Anal. Appl.」に掲載
- 国際誌「Z. Angew. Math. Phys.」に掲載
- 国際誌「Adv. Math. Sci. Appl.」に掲載

他4編を含む計7編の査読付き論文が国際誌に掲載または掲載予定

## 本研究の研究成果

$$\chi_1(s) = \frac{K_1}{(1+s)^{\ell_1}}, \quad \chi_2(s) = \frac{K_2}{(1+s)^{\ell_2}}, \quad \xi(s) = \frac{K_3}{(1+s)^{\ell_3}}$$

$\Longrightarrow$ 十分小さい $K_3 > 0$ に対して解は有界（関数の場合は本研究が初！）

## 今後の展望

① 方程式の一般化，② 結果の精密化，③ 数値シミュレーションと医療への応用

（イタリア，Cagliari大学の研究グループと研究を実施中）