

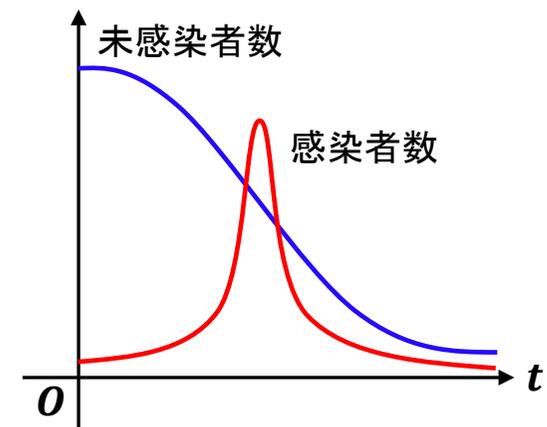
# 感染者数の増加に伴う発生率の抑制を考慮した 感染症流行モデルにおける未解決問題の解明

田中 悠也

(東京理科大学大学院 理学研究科 数学専攻 博士後期課程2年)

## 研究の動機・位置づけ

Avila-Valesら (2021) は感染者数の増加に伴う発生率の抑制を考慮したある感染症流行モデルにおいて、基本再生産数が1以下のときに感染者数が0になることを示した。しかし、基本再生産数が1より大きいときの未感染者数、感染者数の様子については未解決であった。本研究では強Lyapunov関数の構成とある補正関数の導入により、未解決であった上記の問題に解答を与えることができた。



# 扱う問題

$$(P) \begin{cases} S_t = \underbrace{\frac{\Delta S}{\text{ランダムな運動}}}_{\text{ランダムな運動}} - \underbrace{\frac{\beta SI}{1 + \alpha I}}_{\text{発生率の抑制}} + \underbrace{rS \left(1 - \frac{S}{K}\right)}_{\text{人口の増減}}, & x \in \Omega, t > 0, \\ I_t = \Delta I + \frac{\beta SI}{1 + \alpha I} - \gamma I, & x \in \Omega, t > 0, \\ (R_t = \Delta R + \gamma I, & x \in \Omega, t > 0) \end{cases}$$

$S$ : 未感染者数  
 $I$ : 感染者数  
 $R$ : 回復者数

+ Neumann境界条件, 初期条件

## 研究テーマ

$$(S(x, t), I(x, t)) \rightarrow \exists (\tilde{S}, \tilde{I}) \quad (t \rightarrow \infty)$$

※  $\alpha = 0$  のときはよく研究されている

$x, t$  に依存しない平衡状態 (定数平衡解)

# 先行研究と未解決問題

定数定常解の候補は？

$$\begin{cases} 0 = -\frac{\beta SI}{1 + \alpha I} + rS\left(1 - \frac{S}{K}\right), \\ 0 = \frac{\beta SI}{1 + \alpha I} - \gamma I \end{cases} \quad \text{の解を調べる}$$

$$(P) \begin{cases} S_t = \Delta S - \frac{\beta SI}{1 + \alpha I} + rS\left(1 - \frac{S}{K}\right) \\ I_t = \Delta I + \frac{\beta SI}{1 + \alpha I} - \gamma I \end{cases}$$

$$R_0 := \frac{K\beta}{\gamma}$$

(基本再生産数)

$$R_0 \leq 1 \implies (0, 0), (K, 0)$$

$$R_0 > 1 \implies (0, 0), (K, 0), (S^*, I^*) \quad (S^*, I^* > 0: \text{定数})$$

$$S^* = \frac{1}{2r\alpha} \left[ K(r\alpha - \beta) + \sqrt{K^2(r\alpha - \beta)^2 + 4Kr\alpha\gamma} \right]$$

$$I^* = \frac{1}{2r\alpha^2\gamma} \left[ K\beta(r\alpha - \beta) - 2r\alpha\gamma + \beta\sqrt{K^2(r\alpha - \beta)^2 + 4Kr\alpha\gamma} \right]$$

先行研究 Avila-Vales et al. (2021)

$$R_0 \leq 1 \implies (K, 0) \text{ は大域的漸近安定}$$

$$R_0 > 1 \implies \text{未解決!}$$

$R_0 > 1$  のとき  $(S^*, I^*)$  は大域的漸近安定か？

大域的漸近安定性:  $(0, 0)$  以外の初期値に対する解が平衡解に収束すること

Pérez et al. (2019) による示唆

Our results indicate that the behavior of the model around endemic equilibria can become very complicated since variations in the parameters may induce different types of bifurcation.

挙動が複雑!

# 主結果と証明のアイデア

$$S^* = \frac{1}{2r\alpha} \left[ K(r\alpha - \beta) + \sqrt{K^2(r\alpha - \beta)^2 + 4Kra\gamma} \right]$$

$$I^* = \frac{1}{2r\alpha^2\gamma} \left[ K\beta(r\alpha - \beta) - 2ra\gamma + \beta\sqrt{K^2(r\alpha - \beta)^2 + 4Kra\gamma} \right]$$

## 主結果

未解決問題に解答を与えた!

$$R_0 > 1 \text{ かつ } \gamma > \frac{Kra}{16\beta^2} [(2\beta - r\alpha)_+]^2 \Rightarrow (S^*, I^*) \text{ は大域的漸近安定}$$

i.e.  $(S(x, t), I(x, t)) \rightarrow (S^*, I^*) \quad (t \rightarrow \infty)$

## 証明のアイデア

- 強Lyapunov関数  $W$  を構成

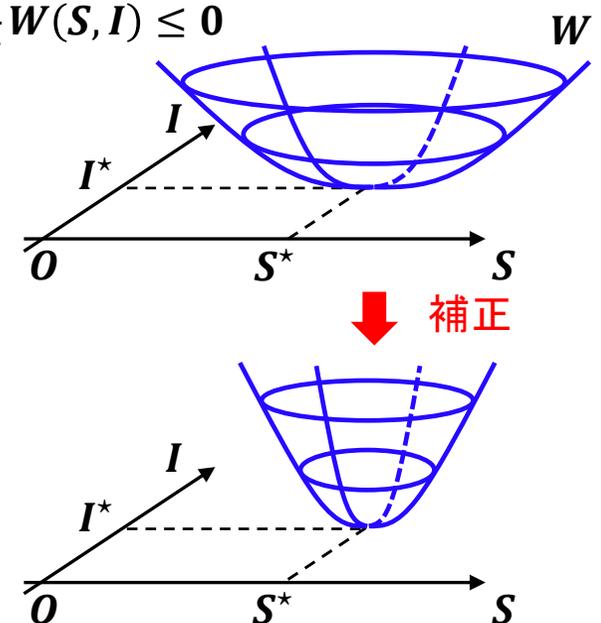
$$W(S, I) := \int_{\Omega} S^* \left[ \frac{S}{S^*} - \log\left(\frac{S}{S^*}\right) - 1 \right] + \int_{\Omega} I^* \left[ \frac{I}{I^*} - \log\left(\frac{I}{I^*}\right) - 1 \right] \Rightarrow \frac{d}{dt} W(S, I) \leq 0$$

- 補正関数  $\lambda_\varepsilon$  を導入

$$\frac{d}{dt} W(S, I) + \int_{\Omega} \lambda_\varepsilon(S, I) \leq 0 \quad (\varepsilon > 0: \text{十分小})$$

$$\lambda_\varepsilon(S, I) := \frac{\varepsilon}{K} \left[ S - S^* - \frac{\alpha(K - S^*)}{2(1 + \alpha I)} \cdot (I - I^*) \right]^2 + \varepsilon \frac{r\alpha(I - I^*)^2}{K^2(2 + \alpha I)^2}$$

$$\Rightarrow (S(x, t), I(x, t)) \rightarrow (S^*, I^*) \quad (t \rightarrow \infty)$$



# まとめと今後の展望

## まとめ

- 研究成果: 補正関数の導入により, **未解決の流行現象を解明できた**
  - 1) 国際誌「Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B」に掲載予定
- 他の成果: クラスターを形成する数理生物モデルの研究
  - 2) 国際誌「Nonlinear Anal. Real World Appl.」に掲載済
  - 3) 国際誌「J. Math. Anal. Appl.」に掲載済
  - 4) 国際誌「Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B」に掲載済

## 今後の展望

- 条件  $\gamma > \frac{Kr\alpha}{16\beta^2} [(2\beta - r\alpha)_+]^2$  の改良
- 治療による感染者数の減少も含めたモデルでの解挙動 ➡ **1) の続編として論文作成中**
- 他の数理生物モデルでの解析を行い, **研究を通じて社会貢献をしたい**

$\gamma > 0$ : 十分小のときの解の挙動

