

- タイトル：不動点定理の複雑さ
- 発表者：鈴木 悠大 (横山 啓太との共同研究)
 - 東北大学理学研究科数学専攻 博士 2 年
 - 専門は数理論理学
 - 「証明とは何か」「計算とは何か」など、数学の基礎的な概念について数学的に考察する。
 - Gödel の不完全性定理，連続体仮説，Turing 機械，Cantor の対角線論法などに関係する分野。
- 研究の動機・位置付け
 - 数理論理学では「数学そのもの」を数学的に解析する。
 - 数学とはある意味で，定理の集合のこと。
 - 数学の定理同士の関係を，「定理の複雑さ」に着目して考察する研究が發展している
 - 逆数学 (RM) ・ Weihrauch 次数 (WD) など
 - 発表者の研究は，RM と WD の相互関係を考察する。

発表のテーマ

種々の不動点定理について、複雑さを紹介する。

不動点定理の例：

- 中間値の定理 (IVT)： 任意の連続関数 $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ は不動点を持つ。
- Brouwer の不動点定理 (BFP)： 任意の連続関数 $f : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]^2$ は不動点を持つ。
- 角谷の不動点定理 (KFP)
- Knaster-Tarski の不動点定理 (KTFP)： $2^{\mathbb{N}}$ 上の単調作用素は不動点を持つ。

逆数学の視点では、 $IVT < BFP < KFP < KTFP$ という順に複雑になることがわかる。また、それぞれ以下のような原理が本質的に使われている (右端は逆数学における複雑さの基準の名前)。

IVT	区間縮小法	RCA_0
BFP	Heine-Borel コンパクト性	WKL_0
KFP	点列コンパクト性	ACA_0
KTFP	よく知られた形では表せないほど複雑	ATR_0

逆数学での研究から、 $IVT \rightarrow BFP \rightarrow KFP$ という一般化において、複雑さが真に上がることがわかる。

Weihrauch 次数の観点 (解の構成の難しさ) では, 逆数学 (定理の証明の難しさ) と違った結果が得られることもある.

- IVT は WD では WKL と同等の複雑さ.
- KTFP は WD では ATR より真に複雑. (Yokoyama and S.)

これらのケースは, 「解の存在証明」と比べて「解の構成」が真に複雑であるため RM と WD で差異が生じる.

まとめ

- 定理の複雑に関する研究として、逆数学 (RM), Weihrauch 次数 (WD) などがある.
- 一般化された定理と元の定理を RM で研究することで, 複雑さがどれくらいあがったかを定量的に測れる.
- RM と WD の結果を比較することで, 「解の存在証明」と「解の構成」でどれくらいギャップがあるかを測れる.