

p 進群の表現の大きさについて

自己紹介：鈴木健太、MIT学部2年生

$\mathbb{Q}_p := \{\sum_{i=-N}^{\infty} a_i p^i : 0 \leq a_i < p\}$ を p 進数の体とする。 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ の表現論はラングランズ対応などから数論で大事：

$$\{\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p) \text{ の既約表現} \} \xrightarrow{1:1} \{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p) \text{ の } n \text{ 次元表現} \}$$

$\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ の表現 (π, V) はほとんど無限次元なので、扱いにくい。しかし、 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ のコンパクト開部分群の列

$$K_0 \supset K_1 \supset K_2 \supset \cdots$$

が存在して、 $K_N := 1 + M_n(p^N \mathbb{Z}_p)$ の不変空間

$$V^{K_N} := \{v \in V : \forall k \in K_N, \pi(k)v = v\}$$

は有限次元になる。

定理 (鈴木): $\dim(V^{K_N})$ の $N \rightarrow \infty$ のときの漸近的な挙動を計算。

$GL_2(\mathbb{Q}_p)$ の表現の例

$\mathbb{P}_{\mathbb{Q}_p}^1$ は $\mathbb{Q}_p^2$ 内の直線の空間なので、 $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ が作用する。

$\mathbb{P}^1 := \mathbb{Q}_p \cup \{\infty\}$ には、以下のように作用する：

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z := \frac{az + b}{cz + d}.$$

なので、 $V := \{\mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{C} \text{ スムーズ}\}$ は $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ 表現になる。定数関数の部分空間 $\mathbb{C}$ で割ると、既約表現 $V/\mathbb{C}$ を得る。

ここで、 $V^{K_N} = \{K_N \backslash \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{C}\} = \{\mathbb{P}_{\mathbb{Z}/p^N}^1 \rightarrow \mathbb{C}\}$ なので次元は

$$\dim(V^{K_N}) = |\mathbb{P}_{\mathbb{Z}/p^N}^1| = (p+1)p^{N-1}.$$

よって、

$$\dim((V/\mathbb{C})^{K_N}) = (p+1)p^{N-1} - 1.$$

$\dim(V^{K_N})$ は p^{N-1} の多項式である。

定理 (Howe, 1974): (π, V) を $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ の既約表現とする。

$0 \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{Q}_p)$ の近傍 U が存在して任意の正則半単純元 $X \in U$ に対して

$$Ch_\pi(\exp(X)) = \sum_{\mathcal{O}} c_{\mathcal{O}}(\pi) \hat{\mu}_{\mathcal{O}}(X)$$

となる。ここで、 $\mathcal{O}$ は冪零元の共役による軌道の集合で $c_{\mathcal{O}}(\pi)$ は π にのみよる定数。

定理を使って射影 $V \rightarrow V^{K_N}$ のトレースを計算すると、

$$\dim(V^{K_N}) = \sum_{n_1 + \dots + n_r = n} c_{\mathcal{O}}(\pi) \begin{bmatrix} n \\ n_1, \dots, n_r \end{bmatrix}_p p^{\frac{1}{2}(n^2 - n_1^2 - \dots - n_r^2)(N-1)}.$$

ここで、 n の分割と冪零元の共役類はJordan標準形より1-1対応し、 $\frac{1}{2}(n^2 - n_1^2 - \dots - n_r^2)$ が軌道の次元になる。最高次の次数をGK-次元と呼ぶ。

$GL_n(\mathbb{Q}_p)$ の表現のBernstein-Zelevinsky分類

放物型部分群 $P = \begin{pmatrix} GL_{n_1} & * \\ & GL_{n_2} \end{pmatrix} \subset GL_n$ から誘導することによって新しい表現を作ることができる。 GL_{n_1} の表現 (π_1, V_1) と GL_{n_2} の表現 (π_2, V_2) に対して、放物型部分群の表現を

$$P \rightarrow GL_{n_1} \times GL_{n_2} \xrightarrow{\pi_1 \boxtimes \pi_2} GL(V_1 \otimes V_2)$$

で定義する。 $\pi_1 \times \pi_2 := \text{Ind}_P^{GL_n}(\pi_1 \boxtimes \pi_2)$ は GL_n の表現になる。

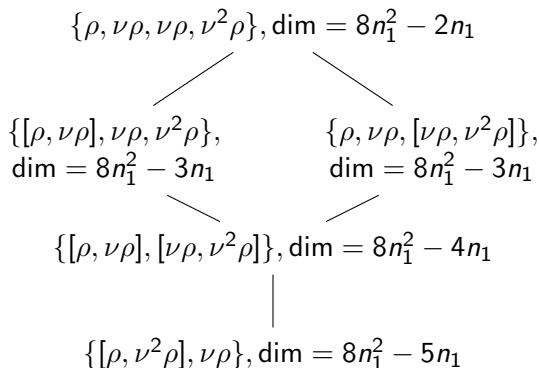
例: $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ の表現 $\{\mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{C}\}$ は 1 を上三角行列の群 $\begin{pmatrix} * & * \\ & * \end{pmatrix}$ から GL_2 に誘導して得られる。(つまり、 1×1 である。)

定理 (Bernstein-Zelevinsky, 1980): 任意の $GL_n(\mathbb{Q}_p)$ の表現 π は一意に決まる超尖点表現の集合 $\{\pi_1, \dots, \pi_r\}$ に対して $\pi_1 \times \dots \times \pi_r$ の部分商として現れる。

定理 (Howe, 1974): $GL_n(\mathbb{Q}_p)$ の超尖点表現の GK-次元は $n(n-1)/2$ 。

GK-次元の計算

GL_{n_1} の超尖点表現 ρ に対して、 $\rho \times \rho(1) \times \rho(1) \times \rho(2)$ の部分商は以下のハッセ図で分類される(BZ分類)：



Hasse図で下の表現の方がGK-次元が低いことが証明できる。