

成長する k 分木上のランダムウォークの再帰性の研究

本講演の概要

成長するグラフ上のランダムウォークの研究は数多く存在する。にもかかわらず、知られていないことは多く存在する。本講演では、無限完全 k 分木の根が非再帰的になることに着目し、成長する完全 k 分木上のランダムウォークにおいて、根が再帰的、非再帰的になるための条件を導出したことを紹介してゆく。

熊本 舟馬¹, 来嶋 秀治², 白井 朋之³

1, 九州大学大学院数理学府 e-mail :kumamoto.shuma.693@s.kyushu-u.ac.jp

2, 滋賀大学データサイエンス学部

3, 九州大学マス・フォア・インダストリ研究所

背景

- 成長するnetwork上のRandom Walkで、一度も訪れていない頂点数の解析[2]。
- Random Walkは、機械学習においても重要[4]。
- 格子内の成長する部分領域上のRandom Walkについて、原点が再帰的/非再帰的(ある頂点に何度も戻る場合、その頂点を再帰的、それ以外を非再帰的と呼ぶ)になる条件の導出[1]。



しかし、領域が変化するグラフ上のRandom Walkは知られていないことも多い。



本発表では、無限完全k分木(Fig 1)の根が 非再帰的になることから[5]、成長する完全k分木の根が再帰的/非再帰的になる条件を導出してゆく。

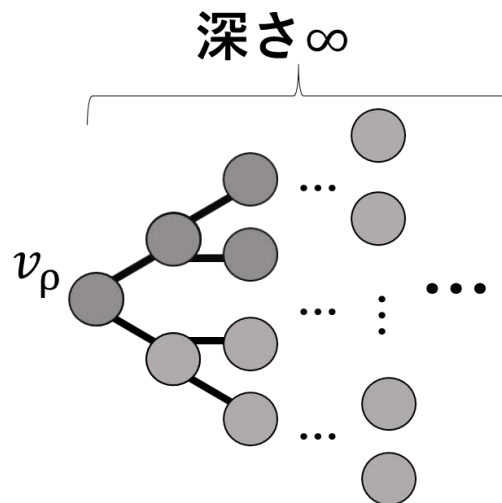


Figure 1:無限完全k(k=2)分木 (TREE)

[1] A. Dembo, R. Huang, V. Sidoravicius. Walking within growing domains: recurrence versus transience. Electronic Journal of Probability. 19, 1-20. (2014).

[2] S. Kijima, N. Shimizu, T. Shiraga: How Many Vertices Does a Random Walk Miss in a Network with Moderately Increasing the Number of Vertices? SODA 2021: 106-122

[3] D. A. Levin, Y. Peres: Markov chains and mixing times. American Mathematical Soc., 2017.

[4] J. Li, L. Wu, R. Hong, J. Hou: Random walk based distributed representation learning and prediction on Social Networking Services. Inf. Sci. 549: 328-346 (2021)

[5] R. Lyons, R. Pemantle, Y. Peres: Unsolved problems concerning random walks on trees. In K. B. Athreya, P. Jagers (Eds.) Classical and modern branching processes. Springer, New York, NY, 1997. 223-237.

準備

成長する完全k分木 (Fig 2)

$TREE_s := (V_s, E_s)$: 深さ $2(h+s)$ の完全k分木

$TREE^s := TREE_0, TREE_1, \dots, TREE_s$

$f(s) := \frac{1}{2}$ duration of $TREE^s \rightarrow TREE^{s+1}$

$TREE := \lim_{s \rightarrow \infty} TREE_s$ (Fig 1)

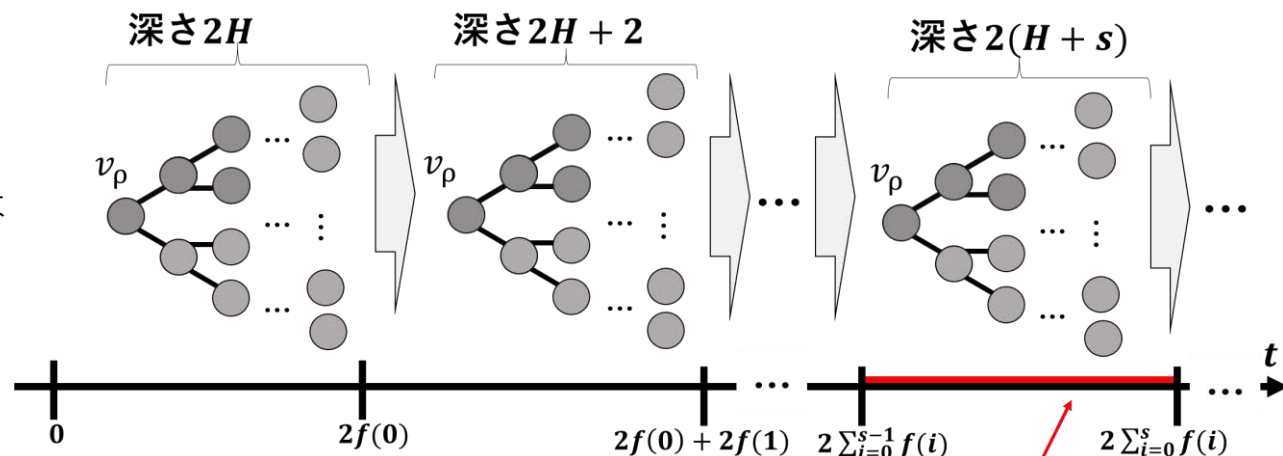


Figure 2: 成長する完全k(k=2)分木($TREE^s$)

推移確率

$q_{x,y}(2n; f; TREE^{s(n)})$: 成長する完全k分木で、
2nステップ後にxからyへ行く確率。

$p_{x,y}(2n; TREE_s)$: $TREE_s$ 上で、2nステップ後にxからyへ行く確率。

再帰的/非再帰的

あるグラフ上のRandom Walkにおいて、2nステップ後にvからvへ行く確率
を $P_{v,v}(2n)$ とする。次の式が成立するとき、頂点vは再帰的/非再帰的である:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_{v,v}(2n) = +\infty / \text{定数}.$$

定理

(i) $\sum_{b=0}^{+\infty} \frac{f(h+b)}{k^{2(h+b)}} = +\infty$ が成立するとき、 v_ρ は再帰的。

(ii) その他 ($\sum_{b=0}^{+\infty} \frac{f(h+b)}{k^{2(h+b)}} = \text{定数}$ のとき)、 v_ρ は非再帰的。

頂点vが再帰的

→ 頂点vへ何度も戻ってくる

→ $P_{v,v}(2n)$ がそれなりに大きい

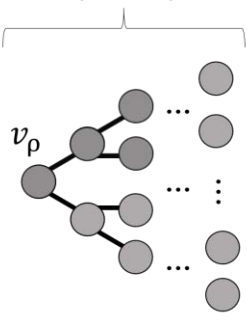
→ $\sum_{n=0}^{\infty} P_{v,v}(2n) = +\infty$

定理

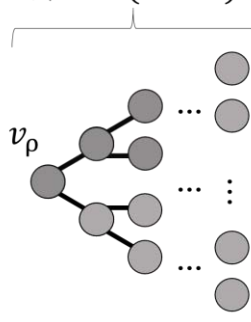
- (i) $\sum_{b=0}^{+\infty} \frac{f(h+b)}{k^{2(h+b)}} = +\infty$ が成立するとき、 v_ρ は再帰的。
(ii) その他 ($\sum_{b=0}^{+\infty} \frac{f(h+b)}{k^{2(h+b)}} = \text{定数}$ のとき)、 v_ρ は非再帰的。

(i)の証明の流れ((ii)の証明は同じように可)

深さ $2(H+s)$

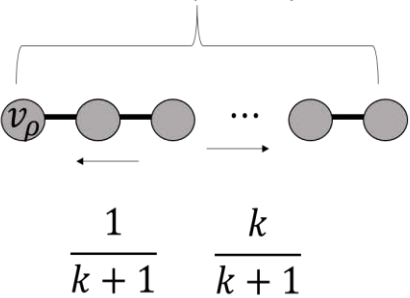


深さ $2(H+s)+2$

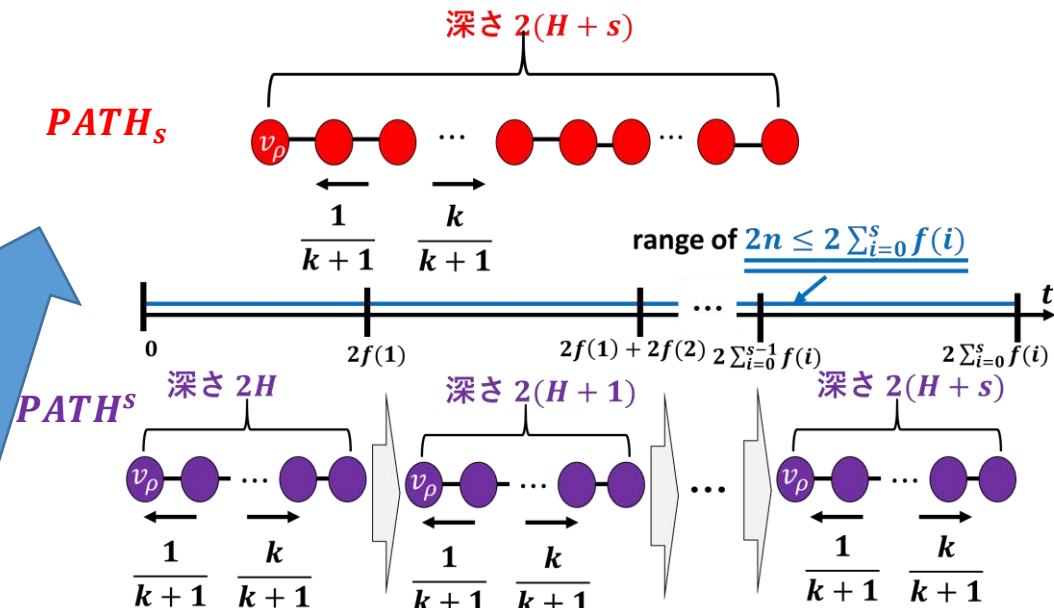
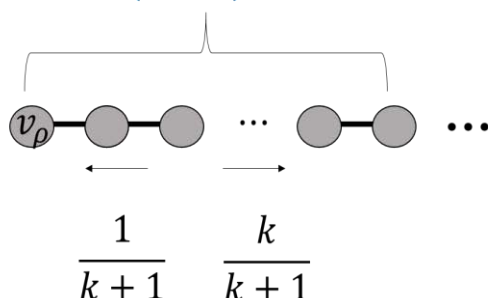


木のままだと考えづらいため、pathに変換

深さ $2(H+s)$



深さ $2(H+s)+2$



$$q_{v_\rho, v_\rho}(2n; f; \text{PATH}) \geq p_{v_\rho, v_\rho}(2n; \text{PATH}_s)$$

$$\rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} q_{v_\rho, v_\rho}(2n; f; \text{PATH}) \geq \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{f(s)} p_{v_\rho, v_\rho}(2n; \text{PATH}_s)$$

定理の証明

今後の課題

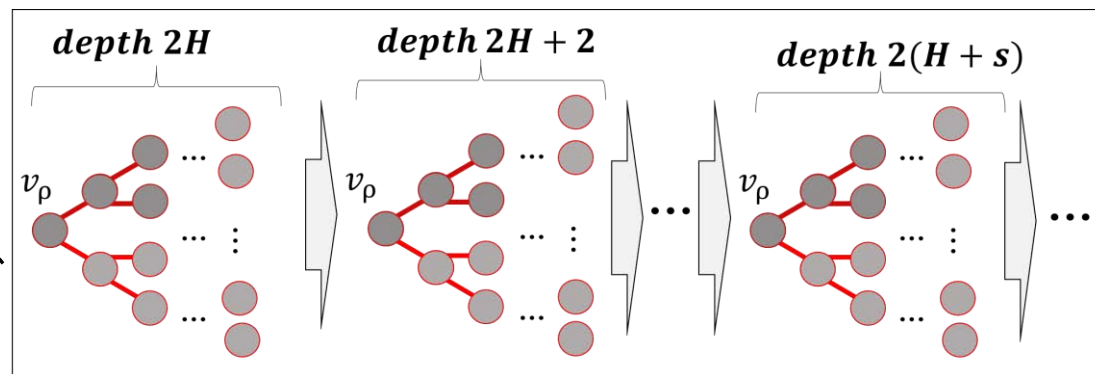
他分野への応用...

他分野への応用の方針はできているが、
赤矢印部分の技術を得ることが課題

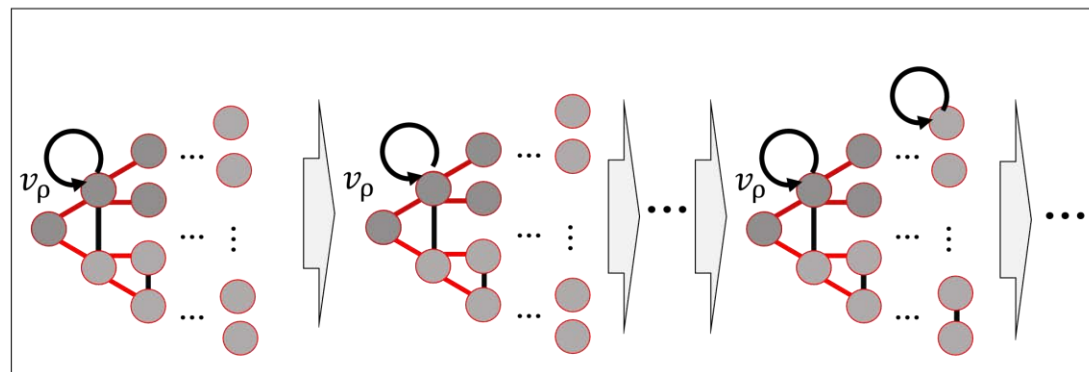
成長する完全k分木では可能になったが、成長する一般のk分木での解析についても課題

今回の成長するRandom Walkでは、初期の深さが偶数、成長する深さが二つずつ増える設定にしているため、その部分の改善についても課題

成長する完全k分木



成長するnetwork



機械学習などの分野へ応用