# 拡散過程に対する構造方程式モデリングの統計的推測

草野 彰吾 (大阪大学大学院 基礎工学研究科), 内田 雅之 (大阪大学大学院 基礎工学研究科)

# 構造方程式モデリングとは

構造方程式モデリング (Structural Equation Modeling, SEM) とは**直接観測できない変数である潜在変数間の関係を調べるための統計操析法**である。ここでは SEM の例として、株価データを旧た業界間の関係の検証を考える。研究者は「金蔵業界の動向(金蔵系因子)が製造業界の動向(製造業系因子)に影響を及ぼす」という仮説を検証したいとする(図 1).

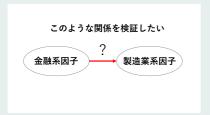


図 1 分析のモチベーション.

しかし、**業界の動向は直接観測することができない**. そこで、これらの因子は株価データを用いて、因子モデルによって観測されると考える (図 2).



このとき、金融系因子の因子モデルと製造業系因子の因子モデルを結合することで、金融系因子と製造業系因子の関係を株価データを用いて検証することができる(図 3)。



図 3 SEM のパス図.

このように、SEM は潜在変数間の関係をデータによって検証できることから、心理学をはじめ、経済学、医学、工学など様々な分野で使用されている.

# 研究の動機

近年、金融データを代表とした高頻度時系列データが容易に取得できるようになったこ とから、連続時間確率過程に対する統計的推測の研究が盛んに行われている、連続時間 確率過程に対する多変量解析法として、これまで主成分分析 (Alt-Sahalia and Xiu (2019)) や因子分析 (Kusano and Uchida (2022)) などが研究されてきたが、連続時間 確率過程に対する SEM はほとんど研究されてこなかった。そこで、本研究では高頻度 データに基づく拡散過程に対する SEM を提案する。

#### 拡散過程に対する SEM のモデル

確率過程  $X_1$ , が因子モデル:

$$X_{1,t} = \Lambda_{x_1,m} \xi_{m,t} + \delta_{m,t}$$

m はモデルに割り当てられた番号、

m はモナルに割り当てられた番号, {X<sub>1,r</sub>}<sub>t>0</sub> は p<sub>1</sub> 次元観測可能確率過程.

{ξ<sub>m,t</sub>}<sub>t≥0</sub> は k<sub>1,m</sub> (≤ p<sub>1</sub>) 次元潜在因子過程,

{δ<sub>m,t</sub>}<sub>t≥0</sub> は p<sub>1</sub> 次元潜在因子過程,

 $\Lambda_{r,m} \in \mathbb{R}^{p_1 \times k_{1,m}}$ 

に従うとする. また、確率過程  $X_2$ , が因子モデル:

$$X_{2,t} = \Lambda_{x, m} \eta_{m,t} + \varepsilon_{m,t}$$

{X<sub>2,1</sub>}<sub>≥0</sub> は p<sub>2</sub> 次元観測可能確率過程.

(n<sub>m</sub>, l<sub>2</sub>0) は k<sub>2</sub>m (< p<sub>2</sub>) 次元潜在因子過程。

{ε<sub>m,t</sub>}<sub>l≥0</sub> は p<sub>2</sub> 次元潜在因子過程,

 $\Lambda_{v...} \in \mathbb{R}^{p_2 \times k_{2,n}}$ 

に従うとする. さらに、潜在因子間の関係を

$$\eta_{m,t} = B_{0,m}\eta_{m,t} + \Gamma_m \xi_{m,t} + \zeta_{m,t},$$

(ζ<sub>m</sub>,)<sub>>0</sub> は k<sub>2</sub> 次元潜在因子過程。

G<sub>m,l</sub> l<sub>2</sub>0 は k<sub>2,m</sub> 久/Life は long in the control is the control is the control is the control in the control

 $\Psi_m = \mathbb{I}_{k_{\tau_m}} - B_{0,m}$ 

とする. ただし、 $\mathbb{I}_{k_{2m}}$  は  $k_{2m}$  次元単位行列とする. ここで、 $\{\xi_{m,t}\}_{t\geq 0}$  は拡散過程

$$d\xi_{m,t} = B_{1,m}(\xi_{m,t})dt + S_{1,m}dW_{1,t}, (t \in T), \xi_{m,0} = c_{1,m},$$

 $B_{1,m}: \mathbb{R}^{k_{1,m}} \to \mathbb{R}^{k_{1,m}}, S_{1,m} \in \mathbb{R}^{k_{1,m} \times r_1}, c_{1,m} \in \mathbb{R}^{k_{1,m}},$ 

 $\sum_{\mathcal{E}\mathcal{E}m} = S_{\perp m}S_{\perp m}^{\top},$ 

W<sub>1</sub>, は r<sub>1</sub> 次元標準ブラウン運動

に従い、(δm,)co は拡散過程

$$d\delta_{m,t} = B_{2,m}(\delta_{m,t})dt + S_{2,m}dW_{2,t}, (t \in T), \delta_{m,0} = c_{2,m},$$

 $B_{2,m}$ :  $\mathbb{R}^{p_1}$  →  $\mathbb{R}^{p_1}$ ,  $S_{2,m}$  ∈  $\mathbb{R}^{p_1 \times r_2}$ ,  $c_{2,m}$  ∈  $\mathbb{R}^{p_1}$ ,

 $\sum_{\delta\delta,m} = S_{2,m}S_{2,m}^{\top},$ 

W<sub>2</sub>, は r<sub>2</sub> 次元標準ブラウン運動

に従い、 $\{\varepsilon_{m,l}\}_{l>0}$  は拡散過程

$$d\varepsilon_{m,t} = B_{3,m}(\varepsilon_{m,t})dt + S_{3,m}dW_{3,t}, (t \in T), \varepsilon_{m,0} = c_{3,m},$$

 $B_{3,m}: \mathbb{R}^{p_2} \to \mathbb{R}^{p_2}, S_{3,m} \in \mathbb{R}^{p_2 \times r_3}, c_{3,m} \in \mathbb{R}^{p_2},$ 

 $\Sigma_{\varepsilon\varepsilon,m} = S_{3,m}S_{3,m}^{\top},$ 

W<sub>3</sub>, は r<sub>3</sub> 次元標準プラウン運動

に従い、{ζm, l>0 は拡散過程

$$d\zeta_{m,t} = B_{4,m}(\zeta_{m,t})dt + S_{4,m}dW_{4,t}, (t \in T), \zeta_{m,0} = c_{4,m},$$

 $B_{4m}: \mathbb{R}^{k_{2m}} \to \mathbb{R}^{k_{2m}}, S_{4m} \in \mathbb{R}^{k_{2m} \times r_4}, c_{4m} \in \mathbb{R}^{k_{2m}},$ 

 $\Sigma_{\mathcal{E}\mathcal{E},m} = S_{4,m}S_{4,m}^{\top},$ 

W., は r, 次元標準プラウン運動

に従うと仮定する。ただし、 $W_{1J}$ 、 $W_{2J}$ 、 $W_{3J}$ 、 $W_{4J}$  は独立であり、 $\top$  は行列の転置を表すとする。また、 $X_{i}=(X_{j}^{i},X_{j}^{i})^{T}$  とし、 $(X_{i}^{i})_{i=1}^{I}$  を離散観測データ、 $h_{n}$  を刻み幅とし、 $t_{i}^{n}=ih_{n}$ 、 $T=nh_{n}$  とする。以下、 $(\epsilon_{nx}|_{2:0},\ (\delta_{nx}|_{2:0},\ (\epsilon_{nx}|_{2:0}),\ (\epsilon_{nx}|_{2:0})$   $(\epsilon_{nx}|_{2:0})$   $(\epsilon_{nx}|_{2:0})$  がエルゴード的拡散過程(Kessler (1997))である新合と考える。

## パラメータと分散構造

SEM では、分散構造に関係するパラメータ

$$\Lambda_{x_1,m}$$
,  $\Lambda_{x_2,m}$ ,  $\Gamma_m$ ,  $\Psi_m$ ,  $\Sigma_{\xi\xi,m}$ ,  $\Sigma_{\delta\delta,m}$ ,  $\Sigma_{\varepsilon\varepsilon,m}$ ,  $\Sigma_{\zeta\zeta,m}$  (1

を推定する。 (1) のうち、未知で重複していない要素をまとめて未知バラメータ  $\theta_m \in \Theta_m$  を定義する。ただし、  $\Theta_m \in \mathbb{R}^{d_m}$  はコンパクトな凸集合とする。また、バラメータの真値を  $\theta_{mn} \in Im (\theta_m)$  とする、さらに、分散構造

$$\Sigma_m(\theta_m) = \begin{pmatrix} \Sigma_{X_1 X_1, m}(\theta_m) & \Sigma_{X_1 X_2, m}(\theta_m) \\ \Sigma_{X_1 X_2, m}(\theta_m)^\top & \Sigma_{X_2 X_2, m}(\theta_m) \end{pmatrix}$$

と定義する、ただし、

 $\Sigma_{X_1X_1,m}(\theta_m) = \Lambda_{x_1,m}\Sigma_{\xi\xi,m}\Lambda_{x_1,m}^T + \Sigma_{\delta\delta,m}$ ,

$$\Sigma_{X_1,X_2,m}(\theta_m) = \Lambda_{x_1,m} \Sigma_{\mathcal{E}\mathcal{E},m} \Gamma_m^\top \Psi_m^{-1\top} \Lambda_{x_2,m}^\top$$

$$\Sigma_{X_2X_2,m}(\theta_m) = \Lambda_{x_2,m} \Psi_m^{-1} (\Gamma_m \Sigma_{\xi \xi,m} \Gamma_m^\top + \Sigma_{\zeta \xi,m}) \Psi_m^{-1\top} \Lambda_{x_1,m}^\top + \Sigma_{\varepsilon \varepsilon,m}$$

である. 拡散過程に対する SEM では、 $\Sigma_m(\theta_m)$  の推定に実現共分散

$$Q_{XX} = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^{n} (X_{t_{i}^{n}} - X_{t_{i-1}^{n}})(X_{t_{i}^{n}} - X_{t_{i-1}^{n}})^{\top}$$

を用いる.

#### パラメータの識別可能性

(1) の要素が全て未知の場合、パラメータは識別可能条件

$$\Sigma_m(\theta_m) = \Sigma_m(\tilde{\theta}_m) \Longrightarrow \theta_m = \tilde{\theta}_m$$
 (2)

を満たさない. そこで、分析者は (1) のいくつかの要素を 0 や 1 などに固定することによって、(2) を満たすようにモデル m を指定しなければならない.

# 記号の定義

- 任意の p 次対称行列 A ∈ R<sup>rep</sup> に対し、vec A を A の要素を 1 列に並べた p<sup>2</sup> 次元ペクトル、vec A を A の下三角行列部分の要素を 1 列に並べた p 次元のペクトルとする。ただし、p = p(p+1)/2 とする。さらに、D<sub>p</sub> ∈ R<sup>pep<sup>2</sup></sup> を vec A = D<sub>p</sub> vec A を満たす行列とする。詳細は Harville (1998) を参照。
- 任意の行列 A に対し、その一般化逆行列を A+ で表す。
- はクロネッカー積を表す。
- N<sub>n</sub>(μ,Σ) は平均 μ∈R<sup>p</sup>, 分散 Σ∈R<sup>p×p</sup> の正規分布を表す。
- $\chi_p^2$  は自由度 p のカイ二乗分布を表し、 $\chi_p^2(\alpha)$  は自由度 p のカイ二乗分布の上側  $q \times 100\%$  点を表す。ただし、 $0 < \alpha < 1$  である。

## パラメータ推定

パラメータの疑似尤度に基づいて、コントラスト関数を

 $\mathbb{F}_{m,n}(\theta_m) = \left(\operatorname{vech} Q_{XX} - \operatorname{vech} \Sigma_m(\theta_m)\right)^\top V_{m,n}(\theta_m) \left(\operatorname{vech} Q_{XX} - \operatorname{vech} \Sigma_m(\theta_m)\right)$ 

と定義する. ただし、 $V_{m,n}(\theta_m)$  は  $O_{XX}$  が正則のとき、

$$V_{m,n}(\theta_m) = \mathbb{D}_p^{+\top} \int_0^1 \int_0^1 \lambda_2 (\Sigma_m(\theta_m) + \lambda_1 \lambda_2 (Q_{XX} - \Sigma_m(\theta_m)))^{-1}$$

$$\otimes (\Sigma_m(\theta_m) + \lambda_1 \lambda_2 (Q_{XX} - \Sigma_m(\theta_m)))^{-1} d\lambda_1 d\lambda_2 \mathbb{D}_p^+$$

とし、 $Q_{XX}$  が非正則のとき、 $V_{m,n}(\theta_m)=\mathbb{I}_p$  であるとする. また、最小コントラスト推定量  $\hat{\theta}_{m,n}$  を

$$\mathbb{F}_{m,n}(\hat{\theta}_{m,n}) = \inf_{\alpha \in \Omega} \mathbb{F}_{m,n}(\theta_m)$$

と定義する. さらに,

$$W_m(\theta_m) = 2\mathbb{D}_p^{+\top} (\Sigma_m(\theta_m) \otimes \Sigma_m(\theta_m))\mathbb{D}_p^+, \Delta_m = \frac{\partial}{\partial \theta} \operatorname{vech} \Sigma_m(\theta_m)$$

とするとき、最小コントラスト推定量  $\hat{\theta}_{ms}$  について、以下の結果が成り立つ。

#### 定理1 (最小コントラスト推定量の一致性、漸近正規性)

ある正則条件の下で、 $h_n \longrightarrow 0$ 、 $nh_n \longrightarrow \infty$  のとき、

$$\hat{\theta}_{m,n} \xrightarrow{P} \theta_{m,0}$$
.

さらに、 $nh_n^2 \longrightarrow 0$  のとき、

$$\sqrt{n} \left( \hat{\theta}_{m,n} - \theta_{m,0} \right) \stackrel{d}{\longrightarrow} N_{q_m} \left( 0, \left( \Delta_m^\top W_m \left( \theta_{m,0} \right)^{-1} \Delta_m \right)^{-1} \right)$$

## 適合度検定

定型 1 では真のモデルが照知の下で、最小コントラスト推定量がパラメータを正しく推定できることを示した。ここでは分析者が想定しているモデル $m^*$ の分散構造が真のモデルmの分散構造ともいか否かを調べる、よって、検定問題

$$H_0: \Sigma_m(\theta_m) = \Sigma_{m^*}(\theta_{m^*}),$$
  
 $H_1: \Sigma_m(\theta_m) \neq \Sigma_{m^*}(\theta_{m^*}),$ 

を考える. このとき, 疑似尤度比検定統計量

$$\mathbb{T}_{m^*,n}=n\mathbb{F}_{m^*,n}(\hat{\theta}_{m^*,n})$$

について、以下の結果が成り立つ.

### 定理2 (疑似尤度比検定統計量の漸近分布)

ある正則条件が成り立つとする. このとき,  $H_0$  の下で,  $h_n\longrightarrow 0$ ,  $nh_n\longrightarrow \infty$ ,  $nh_n^2\longrightarrow \infty$  のとき.

$$\mathbb{T}_{m^*,n} \xrightarrow{d} \chi^2_{\bar{p}-q_{m^*}}$$
.

以上の結果より、棄却域が

$$\{t_{m^*,n} > \chi^2_{\bar{p}-q_{m^*}}(\alpha)\}$$

である有意水準が漸近的に  $\alpha \in (0,1)$  となる検定を構成できる。ただし、 $t_{n',n}$  は  $T_{n'',n}$  の実現値である。この検定では 無無仮説を採択するとき、「想定している モデル n'' は正しい」と結論付ける。また、この検定は一致性 (対立仮説が正しいとき、 帰無仮説を棄却する確率が 1 に収束する性質) をもつ。

# 定理3 (検定の一致性)

ある正則条件が成り立つとする. このとき、 $H_1$  の下で、 $h_n \longrightarrow 0$ 、 $nh_n \longrightarrow \infty$  のとき、

$$\mathbb{P}\left(\mathbb{T}_{m^*,n} > \chi^2_{\bar{p}-q_{m^*}}(\alpha)\right) \longrightarrow 1.$$

# 数値シミュレーション

#### 直のモデル

確率過程  $X_1$ , が因子モデル:

$$X_{1,t} = \Lambda_{x_1,m} \xi_{m,t} + \delta_{m,t}$$

- {X<sub>1,t</sub>}<sub>t≥0</sub> は 4 次元観測可能確率過程,
- {ξ<sub>m,t</sub>}<sub>r≥0</sub> は 2 次元潜在因子過程,
- {δ<sub>m,t</sub>}<sub>t>0</sub> は 4 次元潜在因子過程,

に従うとする. また、確率過程 Xo, が因子モデル:

$$X_{2,t} = \Lambda_{x_1,m} \eta_{m,t} + \varepsilon_{m,t}$$

- {X<sub>2,r</sub>}<sub>≥0</sub> は 2 次元観測可能確率過程,
- (n<sub>m</sub>,)<sub>∞</sub> は 1 次元潜在因子過程。
- (ε<sub>m</sub>, l<sub>≥0</sub> は 2 次元潜在因子過程,
- $\Lambda_{x_2,m} = (1, (\Lambda_{x_2,m})_{21})^T \in \mathbb{R}^{2\times 1}$

に従うとする、さらに、潜在因子間の関係を

$$\eta_{m,t} = \Gamma_m \xi_{m,t} + \zeta_{m,t}$$

- 【⟨ш, ⟩ co は 1 次元潜在因子過程、
- $\Gamma_m \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$

とする。また、拡散過程  $\{\xi_{m,t}\}_{t\geq 0}$  は 2 次元 Ornstein-Uhlenbeck (OU) 過程  $\mathrm{d}\xi_{m,t} = -(A_{1,m}\xi_{m,t} - \mu_{1,m})\mathrm{d}t + S_{1,m}\mathrm{d}W_{1,t}, \ (t\in[0,T]), \ \xi_{m,0} = 0,$ 

- $A_{1,m} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ,  $\mu_{1,m} \in \mathbb{R}^2$ ,  $W_{1,t}$  は 2 次元標準プラウン運動,
- $S_{1,m} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ,  $\Sigma_{\xi\xi,m} = S_{1,m}S_{1,m}^{\top}$  は正定値行列

に従い,拡散過程  $\{\delta_{m,t}\}_{r\geq 0}$  は 4 次元 OU 過程

 $\mathrm{d}\delta_{m,t} = -(A_{2,m}\delta_{m,t} - \mu_{2,m})\mathrm{d}t + S_{2,m}\mathrm{d}W_{2,t}, \ \ (t \in [0,T]), \ \ \delta_{m,0} = 0,$ 

- $A_{2,m} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ ,  $\mu_{2,m} \in \mathbb{R}^4$ ,  $W_{2,t}$  は 4 次元標準プラウン運動,
- S<sub>2,m</sub> ∈ R<sup>4×4</sup>, Σ<sub>δδ,m</sub> = S<sub>2,m</sub>S<sup>⊤</sup><sub>2,m</sub> は正定値対角行列

に従い, 拡散過程 {εm.s}≥0 は 2 次元 OU 過程

 $\mathrm{d}\varepsilon_{m,t}=-(A_{3,m}\varepsilon_{m,t}-\mu_{3,m})\mathrm{d}t+S_{3,m}\mathrm{d}W_{3,t},\ \ (t\in[0,T]),\ \ \varepsilon_{m,0}=0,$ 

- $A_{3,m} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ,  $\mu_{3,m} \in \mathbb{R}^2$ ,  $W_{3,t}$  は 2 次元標準プラウン運動,
- S<sub>3,m</sub> ∈ R<sup>2×2</sup>, Σ<sub>scm</sub> = S<sub>3,m</sub>S<sub>2</sub><sup>⊤</sup> は正定値対角行列

に従い、拡散過程 (Zm./)co は 1 次元 OU 過程

 $d\zeta_{m,t} = -(A_{4,m}\zeta_{m,t} - \mu_{4,m})dt + S_{4,m}dW_{4,t}, (t \in [0,T]), \zeta_{m,0} = 0,$ 

- A<sub>4 m</sub> ∈ R, µ<sub>4 m</sub> ∈ R, S<sub>4 m</sub> > 0, W<sub>4</sub>, は 1 次元標準ブラウン運動
- に従う、このとき、パラメータは

 $\theta_m = \left( (\Lambda_{x_1,m})_{21}, (\Lambda_{x_1,m})_{42}, (\Lambda_{x_2,m})_{21}, (\Gamma_m)_{11}, (\Gamma_m)_{12}, (\Sigma_{\xi\xi,m})_{11}, (\Sigma_{\xi\xi,m})_{12}, (\Sigma_{\xi\xi,m})_{22}, \right.$ 

 $(\Sigma_{\delta\delta,m})_{11}, (\Sigma_{\delta\delta,m})_{22}, (\Sigma_{\delta\delta,m})_{33}, (\Sigma_{\delta\delta,m})_{44}, (\Sigma_{\varepsilon\varepsilon,m})_{11}, (\Sigma_{\varepsilon\varepsilon,m})_{22}, \Sigma_{\zeta\zeta,m})^\top \in \Theta_m$ 

となる. ただし, パラメータ空間は

 $\Theta_m = \{[-100, -0.1] \cup [0.1, 100]\}^5 \times [0.1, 100] \times \{[-100, -0.1] \cup [0.1, 100]\} \times [0.1, 100]^8$  とする。また、真値を

 $\theta_{m,0} = (2, 3, 3, 1, 2, 2, 2, 4, 1, 4, 4, 1, 1, 9, 4)^{\top} \in \Theta_{m}$ 

とする. このモデルのパス図は図 4 のようになる.

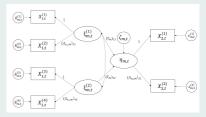


図 4 真のモデルのパス図

#### シミュレーション設定

サンプリングを  $(n,h_n,T)=(10^6,10^{-4},10^2)$  とし、イテレーションを 10000 とし、最適化の初期値を真値  $\theta_{m,0}$  とした。また、適合度検定の有意水準は  $\alpha=0.05$  とする.

### 誤特定モデル $(m^* = M_1)$

因子数を  $k_{1,M_1}=1$ ,  $k_{2,M_1}=1$  とする. 真のモデルの因子数は  $k_{1,m}=2$ ,  $k_{2,m}=1$  であったから、このモデルは因子数を誤特定していることに注意する. また、識別可能性のために、制約

- $\Lambda_{x_2,M_1} = (1, (\Lambda_{x_2,M_1})_{21})^T \in \mathbb{R}^{2\times 1},$
- Σ<sub>55.M.</sub> ∈ R<sup>4×4</sup> と Σ<sub>cc.M.</sub> ∈ R<sup>2×2</sup> は正定値対角行列

を置く、このとき、パラメータは

 $\theta_{M_1} = ((\Lambda_{x_1,M_1})_{21}, (\Lambda_{x_1,M_1})_{31}, (\Lambda_{x_1,M_1})_{41}, (\Lambda_{x_2,M_1})_{21}, \Gamma_{M_1}, \Sigma_{\xi\xi,M_1}, (\Sigma_{\delta\delta,M_1})_{11},$ 

 $(\Sigma_{\delta\delta,M_1})_{22}, (\Sigma_{\delta\delta,M_1})_{33}, (\Sigma_{\delta\delta,M_1})_{44}, (\Sigma_{\epsilon\epsilon,M_1})_{11}, (\Sigma_{\epsilon\epsilon,M_1})_{22}, \Sigma_{\zeta\zeta,M_1})^T \in \Theta_{M_1}$ 

となる。ただし、パラメータ空間は

 $\Theta_{ML} = \{[-100, -0.1] \cup [0.1, 100]\}^5 \times [0.1, 100]^8$ 

である. また、分散構造は

$$\Sigma_{M_1}(\theta_{M_1}) = \begin{pmatrix} \Sigma_{X_1X_1,M_1}(\theta_{M_1}) & \Sigma_{X_1X_2,M_1}(\theta_{M_1}) \\ \Sigma_{X_1X_2,M_1}(\theta_{M_2})^\top & \Sigma_{X_2X_2,M_2}(\theta_{M_2}) \end{pmatrix}$$

である. ただし,

$$\Sigma_{X_1X_1,M_1}(\theta_{M_1}) = \Lambda_{x_1,M_1} \Sigma_{\xi \xi,M_1} \Lambda_{x_1,M_1}^\top + \Sigma_{\delta \delta,M_1},$$

$$\Sigma_{X_1X_2,M_1}(\theta_{M_1}) = \Lambda_{x_1,M_1} \Sigma_{\xi\xi,M_1} \Gamma_{M_1} \Lambda_{x_2,M_1}^{\top}$$

$$\Sigma_{X_2 X_2, M_1}(\theta_{M_1}) = \Lambda_{x_2, M_1} \big( \Gamma_{M_1}^2 \, \Sigma_{\xi \xi, M_1} \, + \Sigma_{\zeta \zeta, M_1} \, \big) \Lambda_{x_2, M_1}^\top \, + \Sigma_{\varepsilon \varepsilon, M_1}$$

である このモデルのパス図は図 5 のようにたる

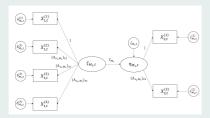


図 5 誤特定モデルのパス図

図 6 より、モデルが特定された場合。 つまり定理 1 の設定 (m'=m) において、 $\hat{\theta}_{m,n}^{(1)} = \hat{\theta}_{n,n}^{(1)}$  の 術近正規性がおかる。 ただし、赤線は理論分布である。 また、図 7 より、定理 2 の設定 (m'=m) において、帰無販設の下で、検定機計量  $T_{m',n} = T_{m,n} \in F_{m,n} \hat{\theta}_{m,n}$  が自由度 6 のカイ 二乗分布に分布収収していることがわかる。 ただし、赤線は自由度 6 のカイ 二乗分布である。 さら、 誤物学モデルの場合 (m'=m) に対する検索信機

$$H_0: \Sigma_m(\theta_m) = \Sigma_{M_1}(\theta_{M_1}),$$
  
 $H_1: \Sigma_m(\theta_m) \neq \Sigma_{M_1}(\theta_{M_1}),$ 

を考える. このとき、検定統計量は  $T_{m',n} = T_{M_{1,n}} = F_{M_{1,n}}(\hat{\theta}_{M_{1,n}})$  であり、棄却域は

$$\{t_{M, n} > v_o^2(0.05) = 15.51\}$$

となる。数値シミュレーションの結果、10000 回中 10000 回帰無仮説が棄却された。この結果 は対立仮説が正しい場合、帰無仮説を正しく棄却できることを示しており、検定の一致性が成り ヴェエいることがわかる。

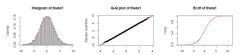


図 6  $\sqrt{n}(\hat{\theta}_{m,n}^{(1)} - \theta_{m,0}^{(1)})$  のヒストグラム (左), Q-Q プロット (中央), 経験分布関数 (右).

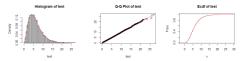


図 7 T.... のヒストグラム (左), Q-Q プロット (中央), 経験分布関数 (右),

## 参考文献

All-Sahalia, Y. and Xiu, D. (2019). Principal component analysis of high-frequency data. Journal of the American Statistical Association, 114(525), 287-303.

Harville, D. A. (1998). Matrix algebra from a statistician's perspective. Taylor & Francis.

Kessler, M. (1997). Estimation of an exposic diffusion from discrete observations. Scandinavian Journal of Statistics, 24(2), 211-229.

Kusano, S., and Uchida, M. (2022). Statistical inference in factor analysis for diffusion processes from discrete observations. arXiv preprint.