重み付きモデル半線形波動方程式の解析

氏名 北村駿介
東北大学大学院 理学研究科 数学専攻 博士課程 1 年

研究の大まかな位置づけ

$$u_{tt} - u_{xx} = H(u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt})$$

拡張

$$u_{tt} - u_{xx} = H(x, t, u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt})$$

モデル方程式の解析

$$u_{tt} - u_{xx} = F(x,t)|u|^p \ or \ F(x,t)|u_t|^p$$

・<u>一般論(解の存在)</u>
→条件;初期値は十分小さい,

$$H = O\left(\left|\vec{\lambda}\right|^{1+\alpha}\right)$$ (αは自然数)
($\vec{\lambda} \in \mathbb{R}^5$)

・<u>一般論(解の存在)</u>
→条件;初期値は十分小さい,
しかし, (x,t)に対する条件が不明

マクローリン展開して(x,t)の冪で良いのか?

モデル方程式の解の存在を調べることによって一般論を考察すると同時に, 解の爆発を調べることで爆発する時間以降は一般論の解が存在しないことを保証できる. つまり, モデル方程式の解析は一般論の最適性を示すことが出来る.

一般論の拡張する方向性と追加の条件について

<u>物理学や工学では係数や非線形項が時空の変数に因る方程式が多く扱われている</u>. 例としては, 送電などの物理現象の記述に用いられ, 波動方程式と熱方程式の中間的な性質を持つ消散波動方程式が挙げられる. そのうち特別な係数を持つモデル方程式は, Liouville 変換 $u(x,t) = (1+t)v(x,t)$ によって下記の半線形波動方程式に変換される.

$$v_{tt} - v_{xx} + \frac{2}{1+t}v_t = |v|^p \to u_{tt} - u_{xx} = \frac{|u|^p}{(1+t)^{p-1}}$$

また, 上記の半線形波動方程式の非線形を変えて, パラメーターを $a \geq -1$ にとって

$$u_{tt} - u_{xx} = \frac{|u|^{p-1}u}{(1+x^2)^{(1+a)/2}}$$

という空間変数の重みの場合のモデル方程式は Suzuki[6], Kubo, Osaka and Yazici[5], Wakasa[8] によって解析が行なわれている. したがって, モデル方程式が解析されているため, 一般論が対象とする非線形項を

$$H(u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}) \text{ から } H(x, t, u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt})$$

と拡張することが求められるが, この観点に立った研究は皆無である. それは, モデル方程式の解析が不十分なため, 非線形項の変数 (x,t) に対してどのような仮定を置いて一般論を構築すれば良いのか, このままでは基準を設定することが難しいからである.

スクリーンショット, 転載不可

重み付きモデル半線形波動方程式の解析

氏名 北村駿介
東北大学大学院 理学研究科 数学専攻 博士課程 1 年

そもそも非線形波動方程式の一般論とは

一次元の非線形波動方程式の初期値問題

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = H(u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}) & \text{in} \quad \mathbf{R} \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = \varepsilon f(x), \ u_t(x, 0) = \varepsilon g(x), & x \in \mathbf{R}, \end{cases} \tag{1}$$

に対して,

- H, f, g は十分滑らか
- 初期値の関数 f, g に台がコンパクト
- 初期値の大きさを決定する ε は十分小さな正定数

とする. 初期値問題 (1) の解の最大存在時間, いわゆる lifespan, を $\widetilde{T}(\varepsilon)$ という記号で下記のように定義する.

$$\widetilde{T}(\varepsilon) := \sup\{ \quad t > 0; \text{適当に固定した } (f, g) \text{ に対して} \\ (1) \text{ の古典解 } u(x, t) \text{ が存在する} \quad \}$$

lifespan について, $\widetilde{T}(\varepsilon) = \infty$ を満たすならば時間大域解を持つと言い, $\widetilde{T}(\varepsilon) < \infty$ を満たす, つまり有限時間で解 u が発散するならば時間局所解を持つと言う. Li Ta-tsien, Yu Xin and Zhou Yi[7] によって初期値問題 (1) に対して次のような解の存在が示されている. (右上)

定理 ([7])

初期値問題 *(1)* が自然数 α を用いて $\hat{\lambda} = 0$ の近傍において $H(\hat{\lambda}) = O(|\hat{\lambda}|^{1+\alpha})$ を満たすとき, ある正定数 $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(f, g, \alpha)$ が存在して, 任意の $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ を満たす ε に対して下記が成立する.

$$\widetilde{T}(\varepsilon) \geq \begin{cases} C\varepsilon^{-\alpha/2} & \textit{in general case,} \\ C\varepsilon^{-\alpha(1+\alpha)/(2+\alpha)} & \textit{if} \int_{\mathbf{R}} g(y)dy = 0, \\ C\varepsilon^{-\alpha} & \textit{if} \quad \partial_u^\beta H(\hat{0}) = 0, \ (1 + \alpha \leq \beta \leq 2\alpha) \end{cases}$$

ここで, $C > 0$ は ε に因らない定数である.

一般論の条件の妥当性

解析を行う上で初期値に対して $(f, g) \equiv 0 \Rightarrow u \equiv 0$ が成り立たなければ解の一意性が崩れてしまうので, $H(0) = 0$ が成り立ってほしい. この条件は H をマクローリン展開したときに定数部分が 0 という条件と同値であり, 高次の剰余項を R_{n+1} として展開すると次のようになる.

$$\begin{aligned} & H(u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} (u\partial_{\lambda_0} + u_x\partial_{\lambda_1} + u_t\partial_{\lambda_2} + u_{xx}\partial_{\lambda_3} + u_{xt}\partial_{\lambda_4})^k H(\hat{\lambda}) \Big|_{\hat{\lambda}=\hat{0}} \\ &\quad + R_{n+1} \end{aligned}$$

上記において $k = 1$ の項は線形より, この項を入れると波動方程式では無くなってしまう. 従って, 初期値問題 (1) は ε が十分小さいことから解 u も小さいので, 非線形項の主な部分は $k \geq 2$ の低次の項であると考えることができる.

スクリーンショット, 転載不可

重み付きモデル半線形波動方程式の解析

氏名 北村駿介
東北大学大学院 理学研究科 数学専攻 博士課程 1 年

以下では重み付きモデル半線形波動方程式の初期値問題を, 一般論 (1) の非線形項 H を $\tilde{H} = F(x,t)|u|^p$ or $\tilde{H} = F(x,t)|u_t|^p$ に取り替えた初期値問題として定義する. また, その解の最大存在時間 lifespan を $T(\varepsilon)$ とし, $\sim$ という記号を下記のように定義する.

$$T(\varepsilon) \sim A(\varepsilon, C) \Leftrightarrow \exists C_1, C_2, A(\varepsilon, C_1) \leq T(\varepsilon) \leq A(\varepsilon, C_2)$$

Theorem1 (K., Morisawa and Takamura)[2]

If

$$\widetilde{H} = \frac{|u|^p}{\langle x \rangle^{1+a}} \quad (a \in \mathbf{R}),$$

the following lifespan estimates hold.

$$T(\varepsilon) \sim \begin{cases} C\varepsilon^{-(p-1)/(1-a)} & \text{for } a < 0, \\ \phi^{-1}(C\varepsilon^{-(p-1)}) & \text{for } a = 0, \\ C\varepsilon^{-(p-1)} & \text{for } a > 0 \end{cases} \quad \text{if } \int_{\mathbf{R}} g(x)dx \neq 0$$

and

$$T(\varepsilon) \sim \begin{cases} C\varepsilon^{-p(p-1)/(1-pa)} & \text{for } a < 0, \\ \psi_p^{-1}(C\varepsilon^{-p(p-1)}) & \text{for } a = 0, \\ C\varepsilon^{-p(p-1)} & \text{for } a > 0 \end{cases} \quad \text{if } \int_{\mathbf{R}} g(x)dx = 0,$$

where

$$\phi(s) := s\log(2+s), \psi_p(s) := s\log^p(2+s).$$

Theorem2 (K., Morisawa and Takamura)[3]

If

$$\widetilde{H} = \frac{|u_t|^p}{\langle x \rangle^{1+a}} \quad (a \in \mathbf{R}),$$

the following lifespan estimates hold.

$$T(\varepsilon) \sim \begin{cases} C\varepsilon^{-(p-1)/(-a)} & \text{for } a < 0, \\ \exp\left(C\varepsilon^{-(p-1)}\right) & \text{for } a = 0, \\ T(\varepsilon) = \infty & \text{for } a > 0. \end{cases}$$

比較

- 非線形項が $F|u|^p$ のときは $\int_{\mathbf{R}} g(x)dx$ の値によって場合分けされるが, $F|u_t|^p$ の時は場合分けされない.
- $(1+t)$ 重みの場合である Kato, Takamura and Wakasa[1] と比較すると, 特に Theorem1 において, 空間変数重みは時間大域的解が得られないという点で決定的に異なる.

スクリーンショット, 転載不可

重み付きモデル半線形波動方程式の解析

氏名 北村駿介
東北大学大学院 理学研究科 数学専攻 博士課程 1 年

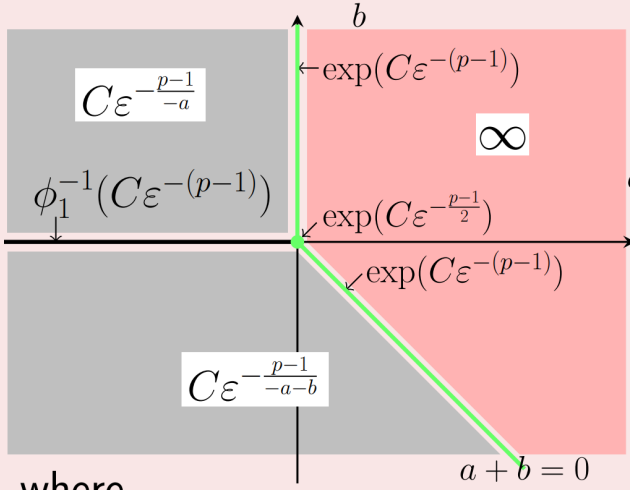
Theorem3 (K., Takamura and Wakasa)[4]

If

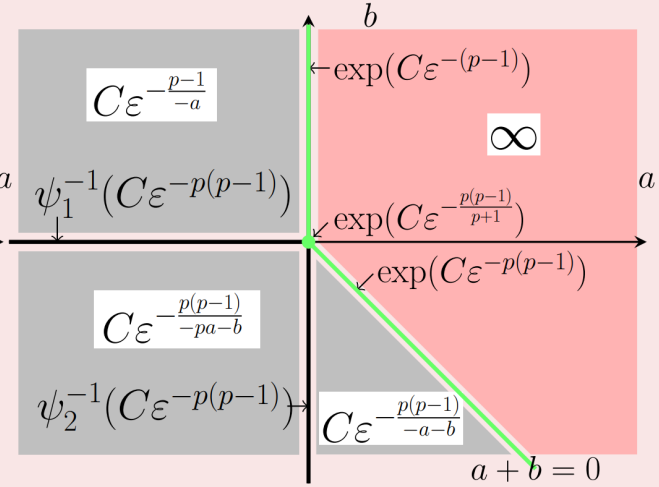
$$\widetilde{H} = \frac{|u|^p}{\langle t+\langle x\rangle\rangle^{1+a}\langle t-\langle x\rangle\rangle^{1+b}} \quad (a,b\in\mathbf{R}),$$

the following lifespan estimates hold.

When $\boxed{\int_{\mathbf{R}} g(y)dy \neq 0}$, $T(\varepsilon)\sim$



When $\boxed{\int_{\mathbf{R}} g(y)dy = 0}$, $T(\varepsilon)\sim$



where

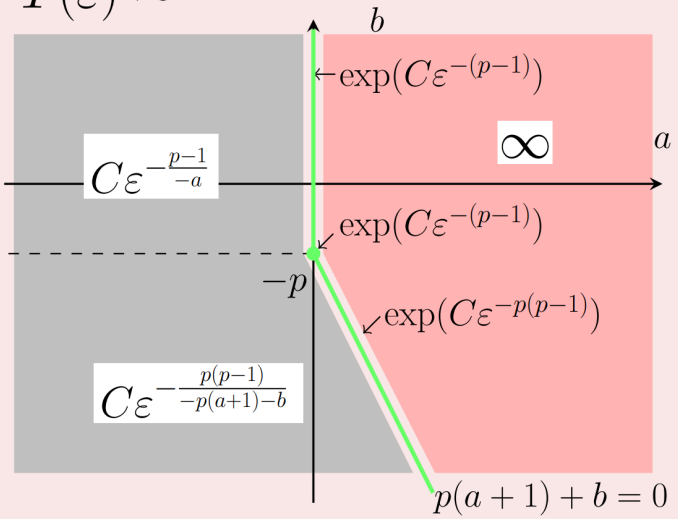
$$\phi_1(s) := s^{-a}\log(2+s), \psi_1(s) := s^{-pa}\log(2+s), \psi_2(s) := s^{-b}\log^{p-1}(2+s).$$

Theorem4 (K.)

$$\widetilde{H} = \frac{|u_t|^p}{\langle t+\langle x\rangle\rangle^{1+a}\langle t-\langle x\rangle\rangle^{1+b}} \quad (a,b\in\mathbf{R}),$$

the following lifespan estimates hold.

$T(\varepsilon)\sim$



比較

- 赤い領域では時間大域解が得られ, 有限時間爆発の場合との境界では指数増大になっている.
- 重みがない場合と $(1+t)$ 重みの場合を含んでいる.
  $\because$ 有限伝播性より $(1+t)\sim\langle t+\langle x\rangle\rangle$
- $\langle x\rangle$ 重みの場合は含まれていない.
  (lifespan 評価が $\langle t-\langle x\rangle\rangle$ 重みの場合とは異なる)

スクリーンショット, 転載不可

重み付きモデル半線形波動方程式の解析

氏名 北村駿介
東北大学大学院 理学研究科 数学専攻 博士課程 1 年

主結果の証明の概略

$\mathrm{supp}\{f,g\} \subset \{|x| \le R\}$ を満たすように $R(>1)$ を取る．非線形項が $F|u|^p$ の場合の結果の証明は，初期値問題が線形部分 u^0 と Duhamel 項 $L(|u|^p)$ に分けられる積分方程式

$$u = \varepsilon u^0 + L(|u|^p), \begin{cases} u^0(x,t) := \dfrac{1}{2}\{f(x+t)+f(x-t)\} + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{x-t}^{x+t} g(y)dy, \\ L(v)(x,t) := \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^t ds \int_{x-t+s}^{x+t-s} F(y,s)v(y,s)dy \text{ for } v \in C(\mathbf{R}\times[0,\infty)) \end{cases}$$

と同値であることを利用して，古典解の存在も爆発も各点評価の Iteration method によって得られる．ここで，$\{t-|x|>R\}$ 上で $u^0 \equiv \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\mathbf{R}} g(y)dy$ となることから，初期速度の全空間積分の値による場合分けは，右の図によって示されている積分領域で解のオーダーが異なる部分があることに起因する．また，重みの指数 a,b の場合分けは Duhamel 項の可積分性によって従う．

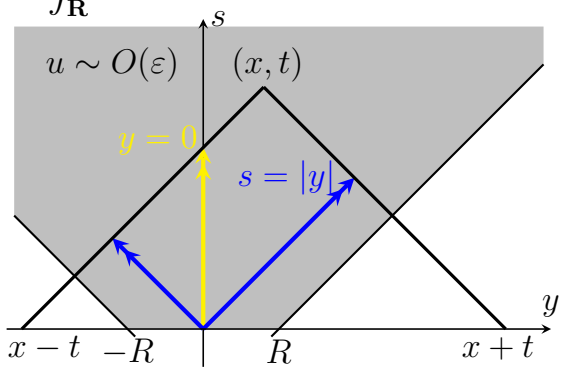
非線形項が $F|u_t|^p$ の場合は初期値問題と同値な積分方程式の両辺を時間偏微分した方程式に対して，各点評価の Iteration method を行う．このとき，$1<p<2$ のときは非線形項の可微分性が足らず，古典解が得られないことに注意する．

参考文献

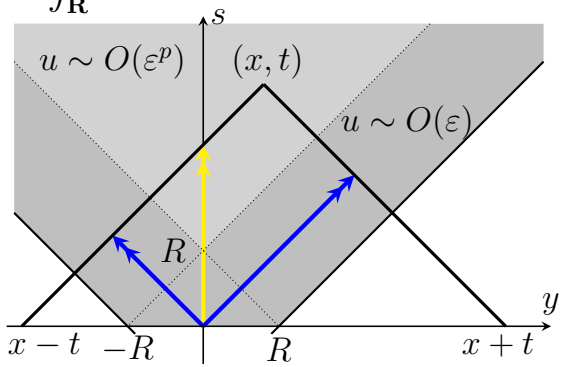
[1] M. Kato, H. Takamura, and K. Wakasa, *The lifespan of solutions of semilinear wave equations with the scale-invariant damping in one space dimension*, Differential Integral Equations **32** (2019), no. 11-12, 659–678. MR4021258
[2] S. Kitamura, K. Morisawa, and H. Takamura, *The lifespan of classical solutions of semilinear wave equations with spatial weights and compactly supported data in one space dimension*, J. Differential Equations **307** (2022), 486–516.
[3] ———, *Semilinear wave equations of derivative type with spatial weights in one space dimension*, arXiv:2112.01015, to appear in Nonlinear Analysis, RWA.
[4] S. Kitamura, H. Takamura, and K. Wakasa, *The lifespan estimates of classical solutions of one dimensional semilinear wave equations with characteristic weight*, arXiv:2204.00242.
[5] H. Kubo, A. Osaka, and M. Yazici, *Global existence and blow-up for wave equations with weighted nonlinear terms in one space dimension*, Interdiscip. Inform. Sci. **19** (2013), no. 2, 143–148.
[6] 鈴木 彩子, 空間 1 次元における非線形波動方程式の解の大域存在と爆発, 埼玉大学理工学研究科修士論文 (2010).
[7] D. Q. Li, X. Yu, and Y. Zhou, *Life-span of classical solutions to one-dimensional nonlinear wave equations*, Chinese Ann. Math. Ser. B **13** (1992), no. 3, 266–279. A Chinese summary appears in Chinese Ann. Math. Ser. A 13 (1992), no. 4, 516.
[8] K. Wakasa, *The lifespan of solutions to wave equations with weighted nonlinear terms in one space dimension*, Hokkaido Math. J. **46** (2017), no. 2, 257–276.

L の積分領域での解のオーダー

$\displaystyle\int_{\mathbf{R}} g(y)dy \neq 0$ の場合



$\displaystyle\int_{\mathbf{R}} g(y)dy = 0$ の場合



黄色の方向は $\langle x \rangle$ 重みが利かなくなる方向，青色の方向は $\langle t-\langle x\rangle\rangle$ の重みが利かなくなる方向である．

スクリーンショット，転載不可