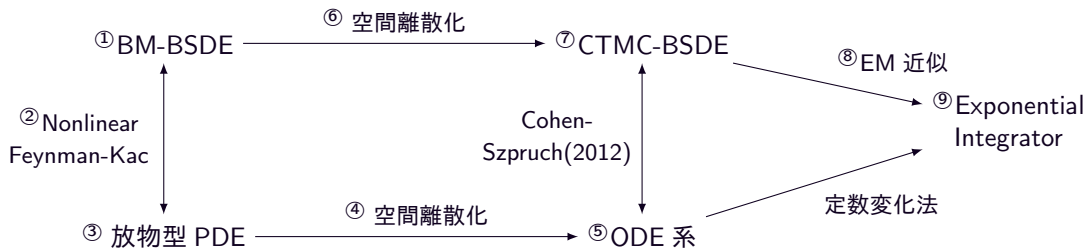


- 自己紹介：兼子晃寛 (かねこあきひろ)
 - 大阪大学大学院 基礎工学研究科 関根・深澤研究室 博士課程 2 年
- 考察対象：CTMC で駆動される BSDE (略称 CTMC-BSDE)
 - 後退確率微分方程式 (Backward Stochastic Differential Equation ; BSDE)
： 終端条件付きの SDE. ファイナンスや確率制御などに応用先を持ち重要.
 - 連続時間 (有限状態) マルコフ連鎖 (Continuous-Time Markov Chain ; CTMC)
 - CTMC-BSDE は BM-BSDE(Brownian Motion 駆動の-) の離散近似として利用可 (下図①→⑦)
- 研究成果・位置づけ：CTMC-BSDE の数値解法を構成・提案 (下図⑦→⑨部分)



BM-BSDE は放物型 PDE で書ける.

今回考察する BM-BSDE は下記. ($W_t, t \geq 0$ がブラウン運動.)

$$\begin{cases} d\mathcal{X}_t = \mu(\mathcal{X}_t)dt + \sigma(\mathcal{X}_t)dW_t, & \mathcal{X}_0 = x_0 \in \mathbb{R} \\ d\mathcal{Y}_t = -f(t, \mathcal{X}_t, \mathcal{Y}_t, \mathcal{Z}_t)dt + \mathcal{Z}_tdW_t, & \mathcal{Y}_T = g(\mathcal{X}_T) \end{cases} \quad (1)$$

- 過程 $\mathcal{X}_t$: 状態過程 (連続状態マルコフ過程). ランダムノイズ (ブラウン運動) の影響を受け時間発展.
- BM-BSDE の解は過程の組 $(\mathcal{Y}_t, \mathcal{Z}_t)$. (今回は $\mathcal{Y}$ の方に注目.)

BSDE(1) は放物型偏微分方程式 (2) の解 u を使って書ける : $\mathcal{Y}_t = u(t, \mathcal{X}_t), \mathcal{Z}_t = \sigma(\mathcal{X}_t)\partial_x u(t, \mathcal{X}_t)$.

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) + \mathcal{L}u(t, x) + f(t, x, u(t, x), \sigma(x)\partial_x u(t, x)) = 0, & (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}, \\ u(T, x) = g(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (2)$$

なお, $\mathcal{L}$ は $\mathcal{X}_t$ の生成作用素 $\mathcal{L}u(t, x) = \mu(x)\partial_x u(t, x) + \frac{1}{2}\sigma^2(x)\partial_{xx}u(t, x)$

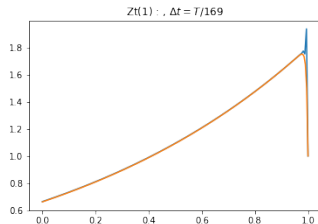
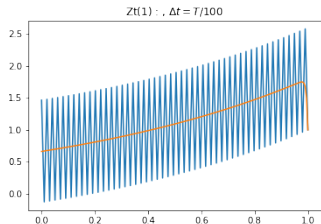
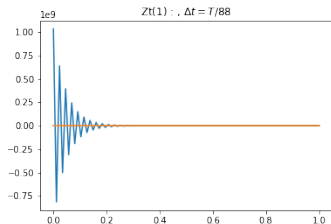
PDE(2) を空間離散化. ($\mathbb{R} \approx \{x_1 < x_2 < \dots < x_N\}$) 作用素も行列に近似: $\mathcal{L} \approx Q \in \mathbb{R}^{N \times N}$.
 N 元の ODE 系終端値問題が導出される. (解は $U : [0, T] \ni t \mapsto U_t \in \mathbb{R}^{1 \times N}$)

$$\frac{dU_t}{dt} + U_t Q + F(t, U_t) = 0, \quad U_T = G \in \mathbb{R}^{1 \times N} \quad (3)$$

放物型 PDE の ODE 近似: “硬い方程式 (Stiff Equation)” になり, 計算が難しい!

- 硬い方程式: 陽的解法 (通常のオイラー, ルンゲクッタなど) を不安定化させる. コスト高い陰的解法が有効.
 (異常に巨大なステップ数を取らないと数値解が安定せず非効率的.)

例: ある ODE 系の (第一成分の) 真の解 (オレンジ線) とオイラー近似解 (青線) のプロット



ところで、行列 Q はマルコフ “過程” $\mathcal{X}$ の生成作用素 $\mathcal{L}$ の近似なので、マルコフ “連鎖” の作用素なのでは？
 → 空間刻み幅がある程度小さければ正しい！

Q に対応するマルコフ連鎖 (CTMC)：単位ベクトル $\{e_1, \dots, e_N\}$ 値のセミマルチンゲール X_t として表現.

$$dX_t = QX_t dt + dM_t, \quad X_0 = x_0, \quad (M_t \text{ はマルチンゲール})$$

CTMC を使えば、ODE(3) の解 U_t は BSDE の解として確率的に表現できる.

下記 CTMC-BSDE は一意解 $Y_t = U_t X_t, Z_t = U_t$ を持つ. (注意： Z は BM-BSDE の Z とは全く別物.)

$$dY_t = -F(t, Z_t)X_t dt + Z_t dM_t, \quad Y_T = GX_T \quad (4)$$

CTMC-BSDE のオイラー・丸山法を導出すると、元の ODE の定数変化公式が出てくる！

$$Y_t = \mathbb{E}[Y_T | X_t] + \int_{(t,T]} F(s, Z_s) \mathbb{E}[X_{s-} | X_t] ds = Z_T e^{(T-t)Q} X_t + \int_{(t,T]} F(s, Z_s) e^{(s-t)Q} X_t ds$$

$$\begin{array}{c} \implies \\ X_t = e_i \text{ の場合を並べて} \end{array} \quad Z_t = Z_T e^{(T-t)Q} + \int_t^T F(s, Z_s) e^{(s-t)Q} ds \quad (\text{定数変化公式})$$

CTMC-BSDE のオイラー丸山法：定数変化公式の時間離散化. いわゆる “Exponential Integrator” に相当.

例: Nørsett-Euler 公式 ($0 = t_0 < t_1 < \dots < t_M = T$ は幅 h の時間分割)

$$Z_{t_m} = Z_{t_{m+1}} e^{hQ} + \int_{t_m}^{t_{m+1}} \underbrace{F(s, Z_s)}_{\text{外に出す}} e^{(s-t_m)Q} ds \approx Z_{t_{m+1}} e^{hQ} + F(t_{m+1}, Z_{t_{m+1}}) h \phi_1(hQ)$$

- 特徴: e^{hQ} やその拡張 $\phi_l(hQ) = \int_0^1 e^{(1-\theta)hQ} \frac{(hQ)^{l-1}}{(l-1)!} d\theta, (l \in \mathbb{N})$ を直接数値計算して安定的に解を得る.
- e^{hQ}, ϕ_l の数値計算: Padè 近似, Scaling and Squaring. 高次元 ($> 10^3$) なら Krylov subsp. 等で計算量削減.

数値実験: ヨーロピアン・コールオプション価格付け (ファイナンスの例)

株価 $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, S_0 = 100$ ($\mu = 0.006, \sigma = 0.5$), 貸出/借入金利 $r_l = 0.01, r_b = 0.6$.
満期 1, 行使価格 120 の公平価格/ヘッジポートフォリオは下記 BSDE の解.

$$dY_t = [r_l(Y_t - \frac{Z_t}{\sigma})^+ - r_b(Y_t - \frac{Z_t}{\sigma})^- + \frac{\mu}{\sigma} Z_t] dt + Z_t dW_t, \quad Y_1 = (S_1 - 120)^+$$

空間 $[0, 200]$ を 51 等分, Y_0 を計算し比較. (オイラー: step 数 < 500 で解が発散, > 520 で安定. これは stiff.)

- リファレンス: 陰的 5 次 RK は step 数 31 で安定. / 陽的 RK4: step 数 384 で安定. 相対誤差 $\approx 10^{-5}$.
- 一方, Exponential Integrator 解が同程度の誤差を挙げる最小ステップ数:

Nørsett-Euler	2 次 ExpRK	3 次 ExpRK	4 次 ExpRK
115	44	8	5

→ マルチステージなもの (2,3,4 次 ExpRK) の高い効率性が見られる.