

鐘ヶ江和菜 慶應義塾大学大学院理工学研究科 坂内研究室, M2

和知秀忠 慶應義塾大学大学院理工学研究科 坂内研究室, M2

異分野・異業種研究交流会 2022 2022 年 10 月 29 日

研究概要

本研究では, 特定の遷移率を持つ generalized exclusion process のスペクトルギャップを, **スペクトルギャップ**についての研究がより進んでいる **random walk** のスペクトルギャップの定数倍で表せることを証明した.

研究の動機・位置付け

確率論において process に付随する量である **スペクトルギャップ** の評価は, 流体力学極限の証明やマルコフ過程の緩和時間の評価において重要である. ここで, **process P** は

- 有限集合 S
- 写像 $C : S \times S \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \forall x \in S, C(x, x) = 0$

から定まる 2 つ組 (S, C) とする. n 頂点完全グラフ $X = (V, E)$ 上定義される process には random walk (RW) や, interchange process (IP) などがあり, 各 process に対してスペクトルギャップは次のように与えられる.

スペクトルギャップ

$\mathcal{L}^P$ を process P の無限小生成作用素とする. $-\mathcal{L}^P$ の固有値が全て 0 以上の実数であるとき, $-\mathcal{L}^P$ の 0 でない最小の固有値を P の **スペクトルギャップ** λ_1^P という.

Process のスペクトルギャップの評価方法の 1 つとして, その **sub-process** のスペクトルギャップにより下から評価するという手法が知られているが, **generalized exclusion process (GEP)** は相互作用を持つことから上記の戦略を直接適用することは困難である.

本研究では, 一般には評価が難しい GEP のスペクトルギャップについて, IP を定める有限集合に内在する対称性に着目し, **群論の議論を行うことによって, ある遷移率を与えられた GEP の場合に評価を行った**. さらに, 評価のため新たに 2 つのアイディアを導入した.

- 1 Group process, quotient process
- 2 GEP の粒子許容数に対応した拡大グラフ $\tilde{X}$

本研究の主結果

n 頂点完全グラフ $X = (V, E)$ 上で与えられる特定の遷移率を持つ GEP のスペクトルギャップは X 上定義される RW のスペクトルギャップの定数倍で表せる.

上記の主結果により, 一般には難しいとされる GEP のスペクトルギャップの評価を, 特定の遷移率を持つ場合について, **より扱いやすい RW のスペクトルギャップの評価に帰着させることができる**.

Process

$X = (V, E)$ を n 頂点完全グラフとし, グラフの各辺の重みが $r: E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ で与えられるとする. また, $x \in S$ に対して頂点 v に存在する粒子数を x_v と定義する.

本研究で扱う X 上で定義される 4 つの process を導入する.

1 Symmetric exclusion process (SEP)

: $P_{SEP} = (S_{SEP}, C_{SEP})$.

各頂点の粒子許容数は 1 であり, 総粒子数 $l \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ が与えられている. 1 回の遷移である 1 粒子が粒子の存在しない頂点に移動する.

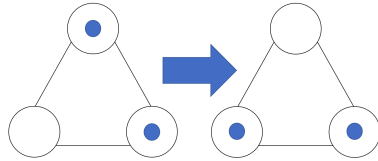


Figure: 3 頂点完全グラフ上での例

2 RW : $P_{RW} = (S_{RW}, C_{RW})$.

SEP において $l = 1$ のものを RW と呼ぶ.

3 IP : $P_{IP} = (S_{IP}, C_{IP})$.

1 回の遷移である 2 頂点の粒子を入れ替える.

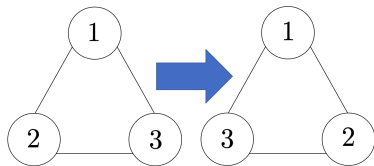


Figure: 3 頂点完全グラフ上での例

4 GEP : $P_{GEP} = (S_{GEP}, C_{GEP})$.

総粒子数 $l \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ と各頂点の粒子許容数 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, 遷移率 $\mu: E \times S_{GEP} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ が与えられている.

本研究では遷移率 μ を $\mu(uw, x) = x_u(k - x_w)$ と定め, C_{GEP} を r と μ により定義する.

1 回の遷移である 1 頂点から 1 粒子が他頂点に移動する.

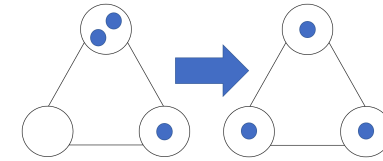


Figure: 3 頂点完全グラフ上での例

さらに, 主定理の証明のために新たに X に対する拡大グラフ $\tilde{X} = (\tilde{V}, \tilde{E})$ を導入する.

拡大グラフ

重み付きグラフ $\tilde{X} = (\tilde{V}, \tilde{E})$, $\tilde{C}: \tilde{E} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ を以下のように構成する.

$$\tilde{V} = \{(v, m) \mid v \in V, m = 1, \dots, k\}$$

$$\tilde{E} = \{(v_1, m_1)(v_2, m_2) \mid (v_1, m_1), (v_2, m_2) \in \tilde{V}, (v_1, m_1) \neq (v_2, m_2)\}$$

$$\tilde{r}((v_1, m_1)(v_2, m_2)) = \begin{cases} r(v_1 v_2) & \text{if } v_1 v_2 \in E \\ r_v & \text{if } v = v_1 = v_2 \end{cases}$$

ただし, r_v は v によって定まる定数である.

$\tilde{X}$ 上に定まる IP, RW, SEP をそれぞれ

$\tilde{P}_* = (\tilde{S}_*, \tilde{C}_*)(* \in \{IP, RW, SEP\})$ とおく.

スペクトルギャップと sub-process

2 つの process $P_1 = (S_1, C_1)$, $P_2 = (S_2, C_2)$ について, P_1 から P_2 への process の射とは, 集合の写像 $\varphi: S_1 \rightarrow S_2$ であって, $\forall f \in \text{Map}(S_2, \mathbb{R})$ に対して

$$\mathcal{L}^{P_1}(f \circ \varphi) = (\mathcal{L}^{P_2} f) \circ \varphi$$

を満たすものと定義する.

sub-process

Process P_2 が process P_1 の sub-process であるとは, P_1 から P_2 への process の射 φ で集合の射として全射なものが存在することをいう.

特に, P_2 を P_1 の **sub-process** とすると, P_1, P_2 のスペクトルギャップ $\lambda_1^{P_1}, \lambda_1^{P_2}$ について $\lambda_1^{P_1} \leq \lambda_1^{P_2}$ が成立する.

さらに群 G に付随して定まる 2 つの process を導入する.

定義 (Group process)

$S := \text{Set}(G)$ とおく. ただし, S には群 G の右作用と左作用が自然に入っている.

また, 写像 $C: S \times S \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ を

$$C_G(e) = 0, e: \text{単位元}$$

を満たす写像 $C_G: G \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ を 1 つとり,

$$\forall x, y \in S, \exists g \in G, y = gx \Rightarrow C(x, y) = C_G(g)$$

により定める. このとき $P := (S, C)$ を群 G に付随する **group process** P と定める.

定義 (Quotient process)

$P = (S, C)$ を群 G に付随する group process とする. 部分群 $H, H' \subset G$ で $\forall g \in G, \forall h \in H$ に対し $C_G(g) = C_G(hgh^{-1})$ が成立すると仮定する. このとき (H, H') を **C-invariant pair** と定める. このもとで

- $\bar{S} := H \backslash S / H'$
- $\forall x \in S, [x] = HxH' \in \bar{S}$
- $\bar{C}: \bar{S} \times \bar{S} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0},$

$$\bar{C}([x], [y]) = \sum_{y' \in [y]} C(x, y'), x, y \in S$$

と定めると $\bar{P} := H \backslash P / H' = (\bar{S}, \bar{C})$ は process になり, $\bar{P}$ を (H, H') による **group process** P の **quotient process** と呼ぶ.

特に, **quotient-process** $\bar{P}$ は **group process** P の **sub-process** である. さらに 2 つの quotient process を構成する部分群 (H_i, H'_i) を比較するとスペクトルギャップの大小関係が導かれる.

補題

- P : 群 G に付随する group process
- $H_1 \subset H_2, H'_1 \subset H'_2$: G の部分群
- $\bar{P}_i (i = 1, 2)$: C-invariant pair (H_i, H'_i) による P の quotient process

とすると, $\bar{P}_2$ は $\bar{P}_1$ の **sub-process** になる.

主結果の導出には X 上の IP P_{IP} が n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ に付随する **group process** であることと上記補題を活用した.

主結果

主定理

$\forall v \in V$ について r_v が十分に大きければ,

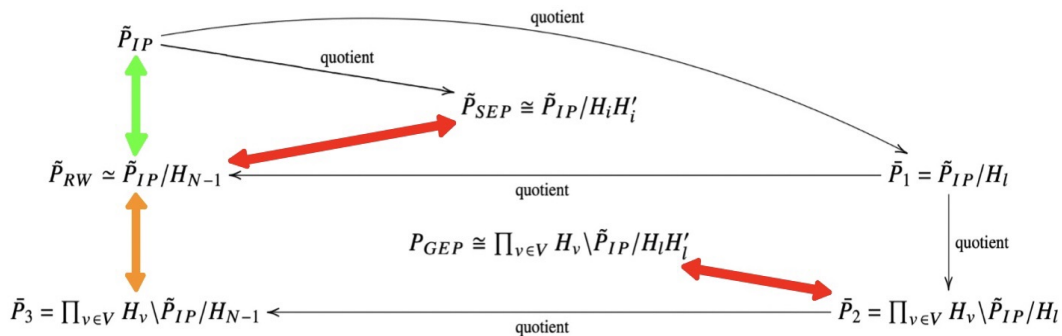
$$\lambda_1^{P_{GEP}} = \lambda_1^{\tilde{P}_{IP}} = \lambda_1^{\tilde{P}_{RW}} = \lambda_1^{\tilde{P}_{SEP}} = k\lambda_1^{IP} = k\lambda_1^{RW}$$

が成立する.

これより、GEP のスペクトルギャップを RW のスペクトルギャップの定数倍で表せることがわかる.

主定理の証明のポイント

スペクトルギャップの下からの評価には P_{GEP} が $\tilde{P}_{IP}$ の sub-process であること, 上からの評価には図式の対応関係を用いる.



図式の記号 $H_i, H'_i \subset \mathfrak{S}_N : \forall i \in \{1, \dots, N\}$ に対し

 $\overline{\{1, \dots, i\}}, \{i+1, \dots, N\}$ の並び替えに対応する置換群

→:スペクトルギャップが小さい方から大きい方への矢印

↔ :スペクトルギャップが等しい process を結ぶ矢印

矢印が表すスペクトルギャップの評価は以下の対応する補題から導かれる.

Aldous' spectral gap conjecture ($\leftrightarrow$)

proved by Caputo, Liggett and Richthammer

X 上の IP と RW のスペクトルギャップは一致する.

以下, P を G に付随する group process かつ $-\mathcal{L}^P$ の固有値が全て 0 以上の実数であるものとする.

補題 (↔)

$$P_1 = (S_1, C_1), P_2 = (S_2, C_2) : \text{C-invariant pair}$$

$(\{e\}, H'), (H, H')$ による P の quotient process

とすると, P が既約かつ次の 2 つの条件が成立するならば $\lambda_1^{P_1} = \lambda_1^{P_2}$ が成立する.

1. $\forall h \in H, \forall x, y \in S_1$ に対し, $C_1(x, y) = C_1(x, hy)$.
2. $\forall h \in H$ について $C_G(h) > \lambda_1^{P_2}/|H|$ を満たす.

補題 (↔)

- $\bar{P}, \bar{P}_a$: C-invariant pair $(H_0, H), (H_0, H_a)$ による quotient process
- $H^a := \{hHh^{-1} | h \in H_a\}$

とすると, H, H_a が次の条件を満たすとき $\lambda_1^P = \lambda_1^{\bar{P}_a}$ が成立する.

1. $H_b = \cap_{H_\alpha \subset H^a} H_\alpha \subset H'$ を満たす.
2. $\lambda_1^P = \lambda_1^{\bar{P}}$.
3. $\forall H_\alpha \subset H^a$ に対し $\langle H_\alpha, \cap_{H_\beta \in H^a \setminus \{H_\alpha\}} H_\beta \rangle = G$.

主定理から得られる系と具体例

主定理では X 上の GEP のスペクトルギャップが X 上の RW のスペクトルギャップの定数倍で表せることを示した。また、系として、GEP の定義において各頂点 $v \in V$ に対する粒子許容数をそれぞれ $k_v \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ と拡張した場合、 $\tilde{X}$ と同様に定義される拡大グラフ $\tilde{X}'$ に対して、 X 上定義される GEP のスペクトルギャップが $\tilde{X}'$ 上の RW のスペクトルギャップと一致することを示した。

系

$\tilde{X}'$ 上に定まる IP, RW, SEP を $\tilde{P}'_*$ ($* \in \{IP, RW, SEP\}$) とすると、 $\forall v \in V$ について r_v が十分に大きければ

$$\lambda_1^{P_{GEP}} = \lambda_1^{\tilde{P}'_{IP}} = \lambda_1^{\tilde{P}'_{RW}} = \lambda_1^{\tilde{P}'_{SEP}}$$

が成立する。

さらに、今回の主結果を用いると遷移率が

$\mu(uw, x) = x_u(k_w - x_w)$ で与えられる GEP のスペクトルギャップについて、 X 上で定義される RW のスペクトルギャップを計算することで導出することが可能である。以下では n 頂点完全グラフ X 上での例を 2 つ紹介する。

GEP のスペクトルギャップ

$X = (V, E)$ の辺重み $r: E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ を $1/n$ で与える。 X 上の既約な GEP のスペクトルギャップは k である。

ただし、結果の導出には Nagahata(2021) が計算した辺重みを r で与えた X 上の RW のスペクトルギャップが 1 であることを用いた。

GEP のスペクトルギャップのオーダー

X の辺重み $r: E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ を全単射 $\xi: \{1, \dots, n\} \rightarrow V$ を一つ固定したとき、

$$r(uw) = \begin{cases} 1/2 & \text{if } |\xi^{-1}(u) - \xi^{-1}(w)| = 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

と定める。このとき、 X 上の既約な GEP のスペクトルギャップのオーダーは $O(1/n^2)$ である。

ただし、結果の導出には Nagahata(2021) が計算した辺重みを r で与えた X 上の RW のスペクトルギャップのオーダーが $O(1/n^2)$ であることを用いた。

参考文献

- Pietro Caputo, Thomas M. Liggett, and Thomas Richthammer, *Proof of Aldous' spectral gap conjecture*, J. Amer. Math. Soc **23** (2010), no. 3, 831–851.
- Kosei Nagahata, マルコフ連鎖入門 (2021), 新潟大学院講義資料

Acknowledgement

This work was supported by JST CREST Grant Number JPMJCR1913 including AIP challenge program, Japan.