

異なる代数体の L 関数が一致する現象について

東京理科大学 理学研究科
数学専攻 博士 3 年 片山 裕太
2022 年 10 月 29 日
異分野異業種研究交流会 2022

Abstract

1925 年に Hecke は異なる代数体の L 関数が有限個のオイラー因子を除いて一致する現象を発見した．本講演では L 関数の一致を適用した例を紹介するとともに， L 関数の一致が起こる代数体についての最近の結果について説明する．

L 関数の一致を使った例 (多重三角関数)

定理 (Shintani, 1978)

実 2 次体と虚 2 次体の L 関数が一致する時に 2 重三角関数のある特殊値の積が代数的整数になる.

計算されている例

- $$S_2\left(\frac{5+\sqrt{21}}{2}, \frac{6+\sqrt{21}}{3}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1+\sqrt{21}}{2} - \sqrt{\frac{3+\sqrt{21}}{2}}\right)} \quad (\text{Yamamoto (2008)})$$
- $$S_2\left(2 + \sqrt{5}, \frac{7+3\sqrt{5}}{4}\right) = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}} \quad (\text{Onodera (2013)})$$

先行研究

- $K/\mathbb{Q}$: 有限次ガロア拡大
- G : $K/\mathbb{Q}$ のガロア群

Kida-Namura (2014)

G が位数 8 の二面体群と同質とする. このとき G の 2 次既約指標 ψ に対して 3 つの 2 次体 $F_1, F_2, F_3 \subset K$ と F_i の ray class character χ_i が存在して

$$L(s, \chi_1) = L(s, \chi_2) = L(s, \chi_3) = L(s, \psi).$$

これを素数 p の場合に拡張したものが次の定理である.

Katayama-Kida (2022)

G が位数 p^3 のハイゼンベルク群と同質とする. このとき G の p 次既約指標 ψ に対して $p+1$ つの $\mathbb{Q}$ 上の p 次巡回拡大 $F_1, F_2, \dots, F_{p+1} \subset K$ と F_i の ray class character χ_i が存在して

$$L(s, \chi_1) = L(s, \chi_2) = \dots = L(s, \chi_{p+1}) = L(s, \psi).$$

先行研究のさらなる拡張

これらの結果をさらに拡張したものが以下の定理である．

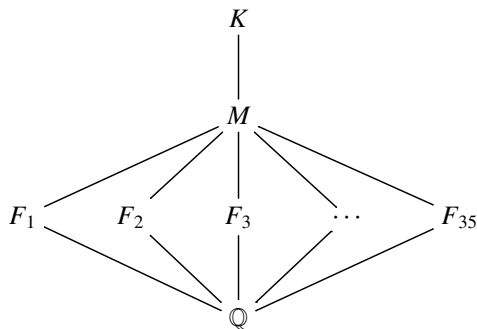
- p : 素数, n : 正整数, $N = \prod_{i=1}^n (p^i + 1)$
- $K/\mathbb{Q}$: 有限次ガロア拡大, $G: K/\mathbb{Q}$ のガロア群

主定理

G がエクストラスペシャル群 $\text{ES}(n, p)$ と同質とする．このとき G の p^n 次既約指標 ψ に対して, N 個の K の部分体 $F_1, \dots, F_N$ で $\mathbb{Q}$ 上の次数 p^n の基本アーベル拡大であるものと, F_i の ray class character χ_i が存在して

$$L(s, \chi_1) = L(s, \chi_2) = \cdots = L(s, \chi_N) = L(s, \psi).$$

例 ($p = 2, n = 2$)



- $G = \text{ES}(2, 2)$

- $F_i/\mathbb{Q}: C_2 \times C_2$ 拡大

このとき 35 個の体 F_i のうち、ちょうど 15 個の体の L 関数が一致する。