

# ミツバチ巣の異方的成長に関する数理モデルの改良と解析

関西学院大学 陰山真矢, 秋山拓海, 大崎浩一



## 陰山真矢 (Maya KAGEYAMA)

### ➤ 経歴

2018年3月 大阪大学大学院情報科学研究科 情報数理学専攻非線形数理講座 修了

2021年4月- 関西学院大学理学部数理科学科 助教

### ➤ 研究について

私たちにとって身近な（生物・環境・物理...などの）様々な現象を書き表す数理モデルに興味があり、それらのモデルについて数値シミュレーションなどを用いて研究しています。最近では、関西学院大学大崎浩一研究室で飼育しているミツバチの巣造りの様子を観察することで、実現象と数理モデルの両方面から、ミツバチの営巣過程を研究しています。本発表では、ミツバチの巣の異方的成長過程を記述する数理モデルの解析結果を紹介します。



大崎研究室撮影



2018 大崎研究室撮影

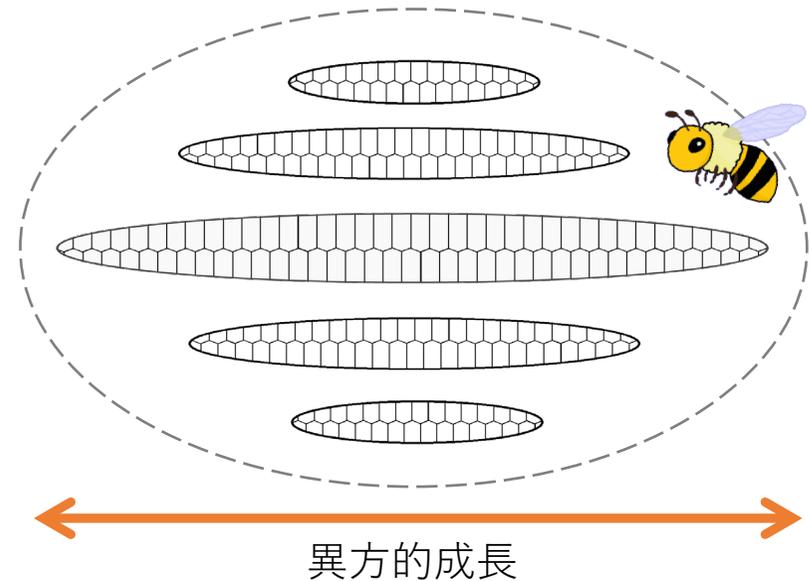
# ミツバチの巣

ミツバチの巣は、ミツバチ自身が分泌するミツロウと呼ばれる物質を主成分とした薄い平面状の巣板（**コーム**）が何層にも平行に重なり形成される。

一枚一枚のコームは方向性をもって成長する（**異方的成長**）。



図：巣箱の天井裏に作られたコームとミツバチ。コームは垂直に垂れ下がり、互いに平行に並ぶ。（大崎研究室撮影）



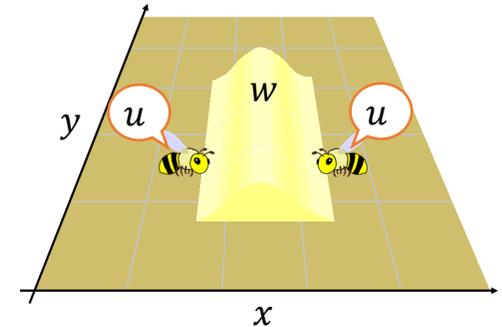
# Škarka-Deneubourg-Belićモデル (Škarka et al. 1990 *J. theor. Biol.*)

2次元長方形領域  $\Omega$  上で次の方程式系 (以下SDBモデル) を考える.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \underbrace{a\Delta u}_{\text{拡散}} - \underbrace{\chi u \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}}_{\text{走性}} + \underbrace{buv(u-v)}_{\text{競争}} + \underbrace{c - \mu u}_{\text{流入 休息}}, \quad (x, y, t) \in \Omega \times (0, \infty),$$

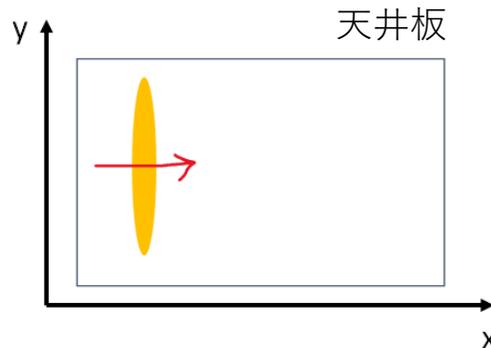
$$\frac{\partial v}{\partial t} = \underbrace{a\Delta v}_{\text{拡散}} - \underbrace{\chi v \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}}_{\text{走性}} + \underbrace{buv(v-u)}_{\text{競争}} + \underbrace{c - \mu v}_{\text{流入 休息}}, \quad (x, y, t) \in \Omega \times (0, \infty),$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \underbrace{d(u+v)\Delta w}_{\text{拡散}} + \underbrace{fu + fv}_{\text{付着}} - \underbrace{gw}_{\text{風化}}, \quad (x, y, t) \in \Omega \times (0, \infty).$$



$u$ : y軸方向にコームを延ばそうとするミツバチ,  $v$ : x軸方向にコームを延ばそうとするミツバチ,  
 $w$ : ミツロウの密度.

走性項  $-\chi u \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$  について:



# 改良SDBモデル

オリジナルモデルでは流入・休息，風化・付着がない場合でもミツバチとミツロウの総量が保存されていない

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= a\Delta u - \chi \frac{\partial}{\partial x} \left( u \frac{\partial w}{\partial x} \right) + buv(u - v) + c - \mu u, & (x, y, t) \in \Omega \times (0, \infty), \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= a\Delta v - \chi \frac{\partial}{\partial y} \left( v \frac{\partial w}{\partial y} \right) + buv(v - u) + c - \mu v, & (x, y, t) \in \Omega \times (0, \infty), \\ \frac{\partial w}{\partial t} &= d\nabla \cdot [(u + v)\nabla w] + fu + fv - gw, & (x, y, t) \in \Omega \times (0, \infty). \end{aligned}$$

## 定数定常解まわりの不安定化条件

定数定常解：

・  $c \leq \sqrt{\frac{\mu^3}{2b}}$  のとき (★1)

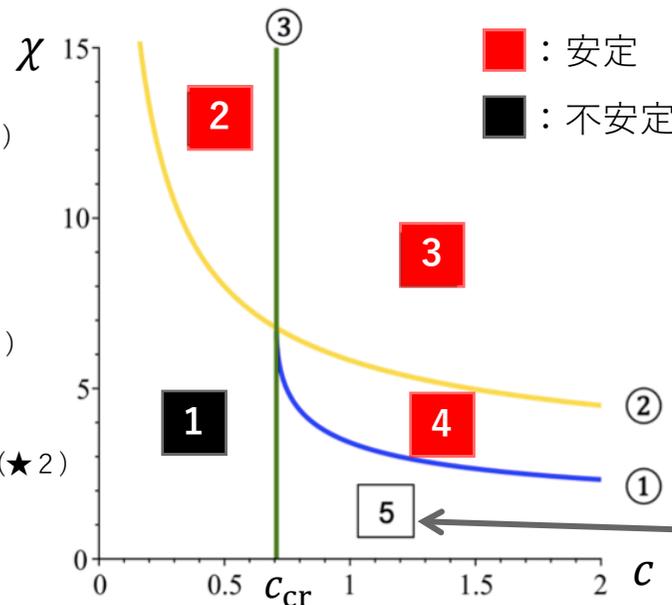
$$(u^*, v^*, w^*) = \left( \frac{c}{\mu}, \frac{c}{\mu}, \frac{2fc}{\mu g} \right)$$

・  $c > \sqrt{\frac{\mu^3}{2b}}$  のとき (★1)

$$(u^*, v^*, w^*) = \left( \frac{c}{\mu}, \frac{c}{\mu}, \frac{2fc}{\mu g} \right),$$

(★2)

$$\left( \frac{c}{\mu} \pm \sqrt{\frac{c^2}{\mu^2} - \frac{\mu}{2b}}, \frac{c}{\mu} \mp \sqrt{\frac{c^2}{\mu^2} - \frac{\mu}{2b}}, \frac{2fc}{\mu g} \right)$$



※  $c$  と  $\chi$  以外のパラメータを1とする

①  $\chi = \left( \frac{1}{\sqrt{c}} + \sqrt{2} \right)^2 \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{1}{2c^2}} \right)^{-1}$

②  $\chi = \left( \frac{1}{\sqrt{c}} + \sqrt{2} \right)^2$

③  $c = c_{cr} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

(★1) : 不安定  
(★2) : 安定

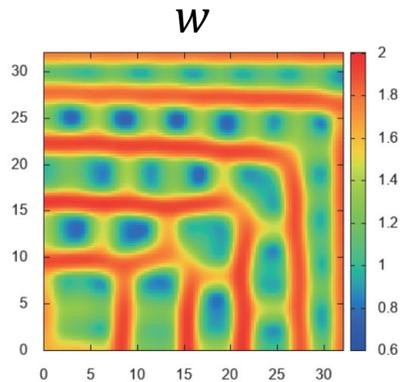
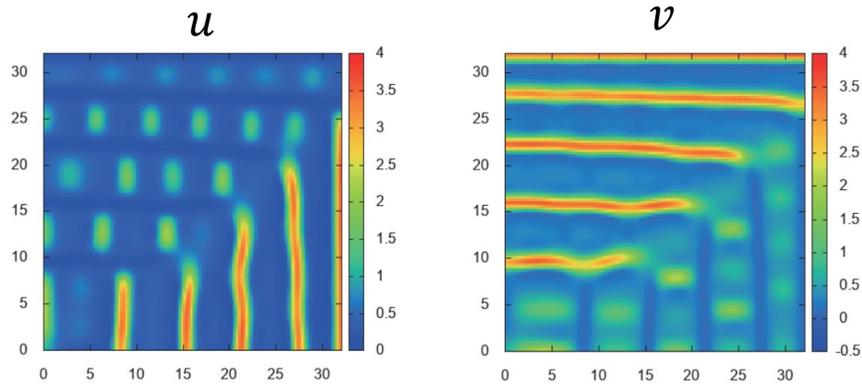
# 数値計算結果

$c, \chi$  以外のパラメータを1とした場合の数値計算結果.  $\Delta t = 10^{-4}, \Delta x = \Delta y = 32/128. \Omega = (0,32) \times (0,32).$

ノイマン境界条件を課す.

$c = 0.971, \chi = 6.77$  (領域 ③)

初期値：定数定常解(★1)  $(c, c, 2c)$  に微小な摂動を与えた.  
時間ステップ  $t = 732$ .



$c = 0.9, \chi = 3.9$  (領域 ④)

初期値：定数定常解(★2)  $(c + \sqrt{c^2 - 0.5}, c - \sqrt{c^2 - 0.5}, 2c)$  に微小な摂動を与えた. 時間ステップ  $t = 1,513$ .

