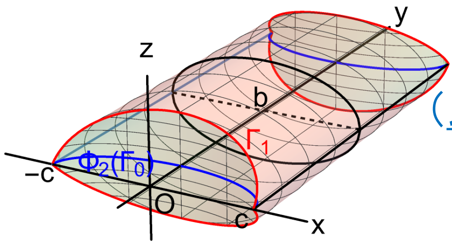
ピロー型ボックスの
体積最大解の存在と一意性



奥田 健斗，小磯 深幸

（九州大学マス・フォア・インダストリ研究所・学術研究員，九州大学）

E-mail : k-okuda@imi.kyushu-u.ac.jp

異分野・異業種研究交流会2022

（オンライン開催，2022年10月29日（土））

自己紹介：シャボン玉や微小液滴の数理モデルである平均曲率一定曲面や，結晶やある種の液晶のように異方性を持つ物質の数理モデル等の研究対象がある，「微分幾何学」を専門としている．

概要（研究の動機）：「ピロー型ボックス」とは，長方形の紙を折り曲げて作られる箱（平らな長方形が二重になった図形を伸び縮みさせることなく連続的に変形して作る枕のような形の図形）である．
手軽に作ることができ，デザイン性も優れているためか，贈り物や商品の包装用の箱等として用いられている．与えられた紙からできるだけ容積が大きいピロー型ボックスを作るという問題は，これまで主に工学や応用数学の観点から研究され，近似解の構成や数値計算結果が知られている．
本講演では，この問題を区分的に滑らかな閉曲面に対する変分問題として定式化し，厳密解の存在，一意性，幾何学的性質，表示式を紹介する．

位置付け：区分的に滑らかな曲面に対して，曲率等の基本的な概念を導入し，建築や折紙工学等の分野へ応用できるような，新たな幾何学理論の構築を目指して日々研究を進めている．

☆【可展面に対する変分問題の例：ピロー型ボックスの最適形状を求める】

（筑波大学・三谷純教授から課題を御教示いただいた．）

長方形の厚紙が
二重になっている．

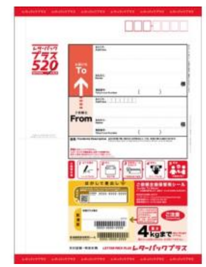
曲線に沿って折り，
箱を作る．

途中の状態

ピロー型ボックスの完成形

問：箱の容積が最も大きくなるのは，どのような曲線に沿って折った時か？
⇒　この問に対し，近似値を求める研究が多数なされている．本研究では，厳密解を求めた．

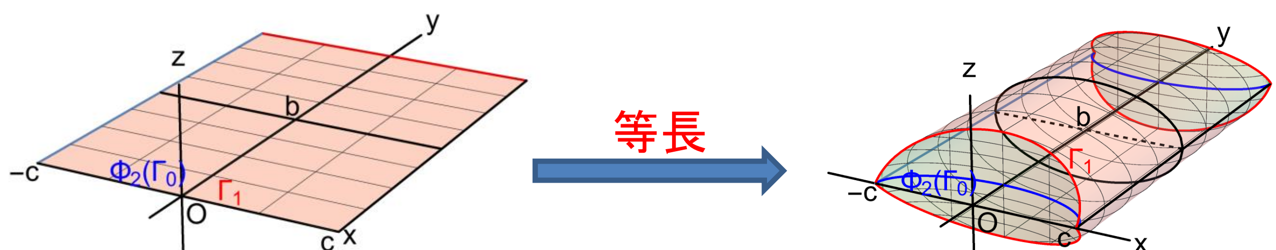
定理1（Koiso-Okuda）：任意の大きさの長方形を与えたとき，
容積が最大のピロー型ボックスがただ一つ存在し，具体的に式で
表示できる．特に，それを構成する柱面の底曲線は弾性曲線である．



郵便局の
レターパックにも
応用できる！

定義：ピロー型ボックスとは，図1，図2右図のように，上，下，手前，向こう側の4つの柱面より成る
区分的に滑らかな閉曲面で，「二重になった長方形（ただし境界のみ一重）」と等長なもの（即ち，
平面図形を伸び縮みさせること無く変形して得られるもの）と定義する．

図1：ピロー型ボックスの写真



長方形が二重になっている　図2　ピロー型ボックス

☆【可展面に対する変分問題の例：ピロー型ボックスの最適形状を求める】

このページでp.2の定理1の精密化である定理1’を述べ，p.4で解の表示式を与える．定理1’の証明の方針についてはスペースの関係上省略する．まず，課題解決に用いた変分問題を述べる．

変分問題1：辺の長さが$2a, 2b$の長方形（図3の左端の図．境界のみ一重であとは二重）を伸び縮みさせずに（曲げたり折ったりすることにより）変形して得られるピロー型ボックスの中で体積の極値を与えるものを求めよ．

次の定理1’は，定理1の精密化となっている．

定理1’(Koiso-Okuda)：任意の$a, b > 0$に対し，変分問題1の解で体積の停留点を与えるものが唯一つ存在する．この曲面は4つの柱面より構成され，それらの底曲線（base curve．図3の曲線Γ_0, $\Phi_2(\Gamma_0)$）は同一の弾性曲線であり，具体的に式で表示できる．さらに，この解曲面は「体積の停留値」を与えるだけでなく「体積の最大値」を与える．また，もとの長方形から解曲面に至るまで連続的に等長変形できる．

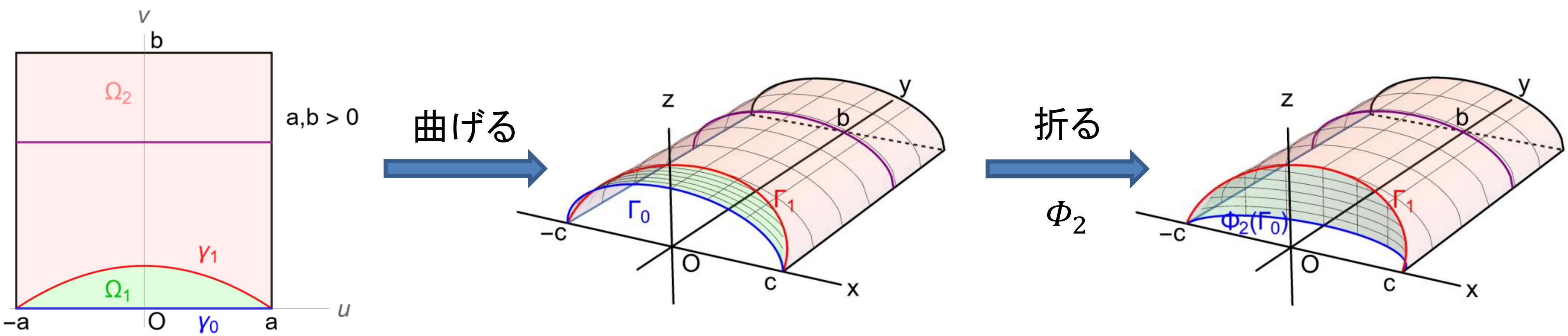


図3：長方形の紙からピロー型ボックスを作る．ただし，ボックスの1/4を表示．

★【体積最大ピロー型ボックスの表示(底曲線や体積等の表示式)】

体積最大ピロー型ボックスの底曲線$\Gamma_0: z = f(x)$ $(-c \leq x \leq c)$(図4中央の図)の表示式が右の形で得られた．ただし，x座標をzの関数として表した．

$$\begin{cases} x = -I_\mu(z) + c, & 0 \leq z \leq z_0, \quad (0 \leq x \leq c) \\ x = I_\mu(z) - c, & 0 \leq z \leq z_0, \quad (-c \leq x \leq 0) \end{cases}$$

ここで， $I_\mu(z) \coloneqq \int_0^z \dfrac{-\mu\zeta\left(1-\frac{\zeta}{b}\right)}{\sqrt{1-\left(\mu\zeta\left(1-\frac{\zeta}{b}\right)\right)^2}} d\zeta > 0 \quad (0 < z < b),\quad z_0 \coloneqq \frac{b}{2}\left(1-\sqrt{1-\frac{4}{b|\mu|}}\right),\ c := I_\mu(z_0).$

今，Γ_0の曲率が高さの1次関数で表せることから，Γ_0は弾性曲線である．さらに，Γ_0はx軸に直交する．

また，μはΓ_0の端点での曲率を表す負の数で，次の式から定まる． $a = \int_0^{z_0} \left\{1-\left(\mu\zeta\left(1-\frac{\zeta}{b}\right)\right)^2\right\}^{-1/2} d\zeta$

ピロー型ボックスの4分の1(図4の右端の図)を形作る2つの柱面S_1, S_2 は，次のように表示される．

$$\begin{cases} S_1 = \{(x, f(x), z); -c \leq x \leq c, 0 \leq z \leq f(x)\} \\ S_2 = \{(x, y, f(x)); -c \leq x \leq c, f(x) \leq y \leq b\} \end{cases}$$

したがって，ピロー型ボックスの体積$V(f)$は次の式で表される． $V(f) = 4\int_{-c}^{c} f(x)\big(b - f(x)\big)\,dx$

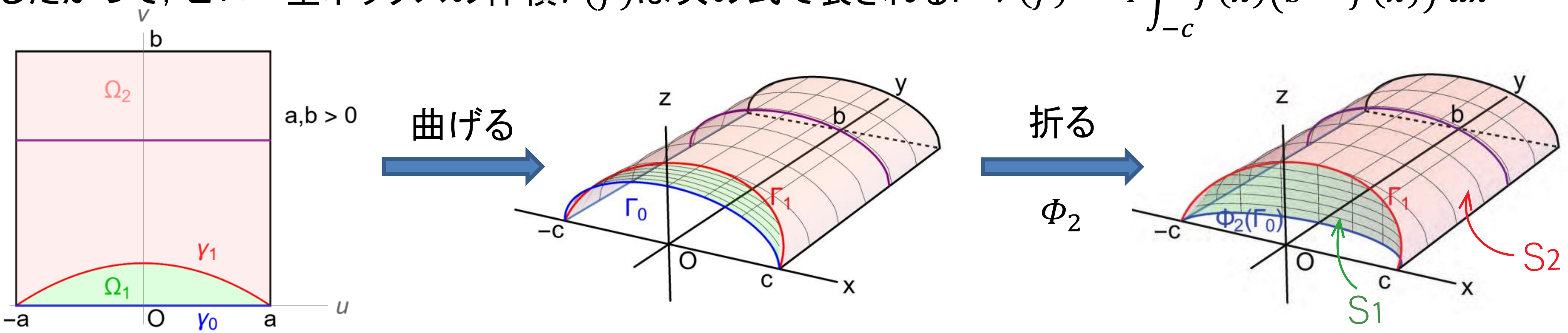
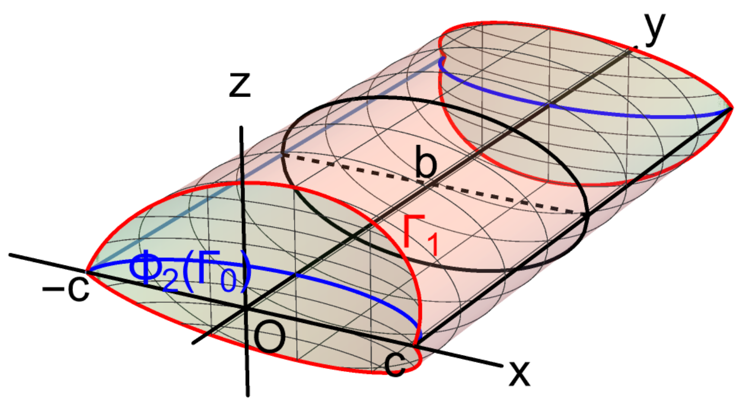


図4: 長方形の紙からピロー型ボックスを作る．ただし，ボックスの1/4を表示．

★【まとめ】

ピロー型ボックスの体積最大解の存在，一意性，表示式を述べた．

定理1'（Koiso-Okuda）：任意の$a, b > 0$に対し，変分問題1の解で体積の極大値を与えるものが唯一つ存在する．この曲面は4つの柱面より構成され，それらの底曲線（base curve．図3の曲線Γ_0）は同一の弾性曲線であり，具体的に楕円積分を用いた式で表示できる．さらに，この解曲面は「体積の極大値」を与えるだけでなく「体積の最大値」を与える．また，もとの長方形から解曲面に至るまで連続的に等長変形できる．



https://drive.google.com/file/d/13K-YX9FE9P7qNFavnhRoGPb6yUfWgepz/view?usp=sharing

左図を動画で！

今後の課題：建築（災害時に避難所等で使える仮設建築物の設計）などへの応用，変分法の一般化

参考文献：※ 雑誌『数理科学（2022年9月号）』に本研究に関する特集が掲載！（執筆：小磯深幸 名誉教授）

[1] 三谷純，『クローズアップ「ピローボックスの容積に関する一考察」』，折紙探偵団マガジン192号，2022年3月．

[2] Miyuki Koiso and Kento Okuda, in preparation.

[3] 小磯憲史，『変分問題』，共立出版，1998年．