

非局所ディリクレ形式に関する調和写像の細連続点について

岡寄 郁也(おかざき ふみや)

東北大学 理学研究科 数学専攻 D2 学振特別研究員(DC2)

異分野・異業種研究交流会 2022

研究内容

確率過程と呼ばれるランダムな粒子の運動について研究している。
特に、多様体間の調和写像の性質を確率過程を通して理解したいと思っている。

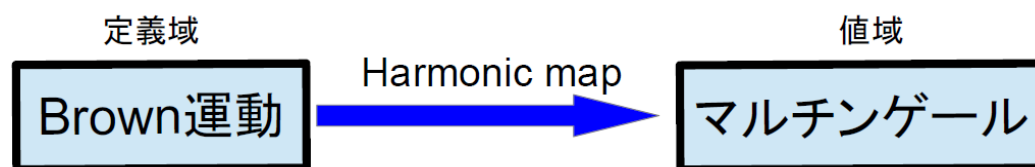
- 多様体間の調和写像 $u: E \rightarrow M$:

$$\text{エネルギー } \mathcal{E}(u) = \frac{1}{2} \int_E |\nabla u|^2(z) m(dz)$$

の停留写像で、次の微分方程式の解:

$$\Delta u(z) \perp T_{u(z)}M, \quad z \in E.$$

- 調和写像はブラウン運動をマルチンゲールに写す
(確率論的な特徴づけ)



確率過程を通して調和写像を調べる研究は Kendall(1988) を始めとして様々な先行研究がある。
先行研究では多くの場合値域の多様体に非正曲率やある種の凸性が仮定される

研究の動機・目的

- 近年解析の分野で研究されている分数冪ラプラシアンに関する調和写像を確率論的に調べる。
- 値域が球面など正曲率の場合を考え、調和写像の特異点を確率過程を通して調べる。

なぜ確率過程を使えるのか

E : 局所コンパクト可分距離空間,
 m : E 上の正値ラドン測度, $\text{supp}[m] = E$,
 $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$: $L^2(E; m)$ 上の正則ディリクレ形式,
 M : $\mathbb{R}^d$ のコンパクト部分リーマン多様体.

定義 (弱調和写像)

$D \subset E$: 開集合,
 $\mathcal{C}_D(u^*TM)$: $T_u M$ -値関数 ψ で $\text{supp}[\psi] \subset D$ となるもの,
 $\mathcal{F}_{loc}^D(M)$: 局所的に $\mathcal{F}^D$ に属する M 値関数.
 $u \in \mathcal{F}_{loc}^D(M)$ は

$$\mathcal{E}(u, \psi) = 0, \quad \forall \psi \in \mathcal{C}_D(u^*TM)$$

を満たすとき D 上弱調和という.

これは Da Lio, Rivière (2011) により定義された分数冪ラプラシアンに関する調和写像を含む.

正則ディリクレ形式 $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ に対応して E 上に対称マルコフ過程が定まる (Fukushima).

(Ex) ラプラシアン $\frac{1}{2}\Delta$ の場合: $\mathcal{F} = H^1(\mathbb{R}^d)$,

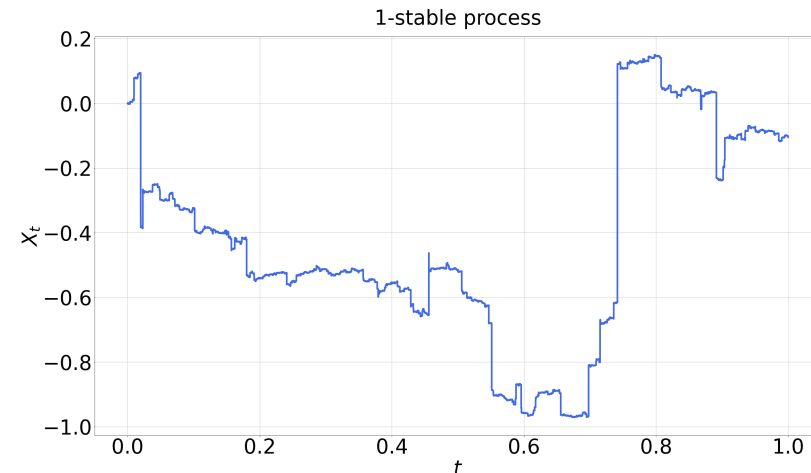
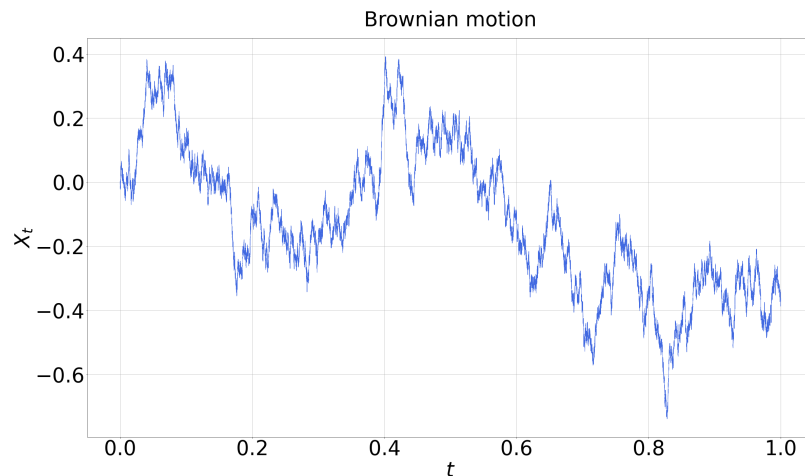
$$\mathcal{E}(u, v) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \nabla u \cdot \nabla v dx, \quad u, v \in \mathcal{F}.$$

→ ブラウン運動 (連続)

(Ex) 分数冪ラプラシアン $(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}$ の場合: $\mathcal{F} = H^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{R}^d)$,

$$\mathcal{E}(u, v) = c_{d,\alpha} \int \int \frac{(u(x) - u(y))(v(x) - v(y))}{|x - y|^{d+\alpha}} dx dy.$$

→ α -対称安定過程 (不連続)



問題

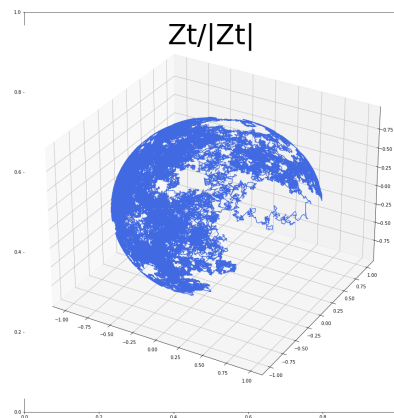
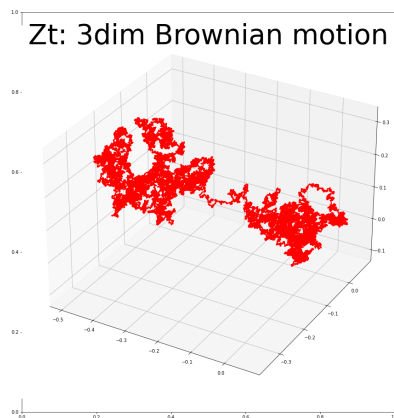
分数冪ラプラシアンに関する弱調和写像 u に対称安定過程 Z_t を代入した $u(Z_t)$ が“マルチンゲール”になるようにするためには、多様体上の不連続なマルチンゲールをどのように定めればよいか??

通常のラプラシアンの場合

- M -値連続半マルチンゲール $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$ は、 M 上の任意の1次微分形式の X の沿った確率積分が局所マルチンゲールになるとき、 M -値連続マルチンゲールという。
- 調和写像の弱解にブラウン運動を代入すると M -値連続マルチンゲール (Picard)

(Ex) $u: B^3 \rightarrow S^2$, $u(z) := \frac{z}{|z|}$ は弱調和。

→ 3次元標準ブラウン運動 $\{Z_t\}$ に対し、 $\left\{\frac{Z_t}{|Z_t|}\right\}_{t>0}$ は S^2 上のマルチンゲール。



分数冪ラプラシアンの場合

曲がった空間での確率過程のジャンプをどう考えるか?
→ 高次のユークリッド空間への埋め込み $\iota: M \rightarrow \mathbb{R}^d$ により

$$\Delta X_t := \Pi_{X_{t-}} (\iota(X_t) - \iota(X_{t-}))$$

($\Pi_x: \mathbb{R}^d \rightarrow T_x M$ は直交射影)
と定める。

定義 (多様体上の不連続なマルチンゲール)

M -値半マルチンゲール X_t は M 上の任意の有界なベクトル場を $\mathbb{R}^d$ -値関数とみなした時の X に沿った確率積分が局所マルチンゲールになるとき、 M -値マルチンゲールであるとする。

- この定義の下で、分数冪ラプラシアンに関する調和写像は対称安定過程を多様体上のマルチンゲールに写すか??

主定理

定理 1 は Picard (2001) の強局所の仮定を外したもの. (調和関数の場合 $\rightarrow$ Chen (2009)).

定理 (1)

M を $\mathbb{R}^d$ のコンパクト部分リーマン多様体, $u \in \mathcal{F}_{loc}^D(M)$, $\tilde{u}$ を u の準連続修正とする.

1 u は D 上弱調和

$\Leftrightarrow$ 任意の相対コンパクト開集合 $\overline{D_1} \subset D$ と q.e. $z \in E$ に対し, $\{\tilde{u}(Z_{\tau_{D_1} \wedge t})\}_{t \geq 0}$ は M -値 P_z -マルチンゲール.

2 マルコフ過程 $\{Z_t\}$ が推移密度関数を持つとする (絶対連続性). このとき u が D 上弱調和なら $\forall \varepsilon > 0, \forall z \in E, \forall D_1 \subset D$ に対し $\{\tilde{u}(Z_{t \wedge \tau_{D_1}})\}_{t \geq \varepsilon}$ は M -値 P_z -マルチンゲール.

定理 2 は多様体上の不連続なマルチンゲールに対する時間逆向きの収束定理.
(Émery (1985) の不連続版だが証明はかなり異なる).

定理 (2)

$X = \{X_t\}_{t > 0}$ は正の時刻で定義された確率過程で $\forall \varepsilon > 0$ に対し $\{X_{t+\varepsilon}\}_{t \geq 0}$ は M -値 $\{\mathcal{F}_{t+\varepsilon}\}_{t \geq 0}$ -マルチンゲールであるとする. このとき次は同値.

(i) $X_0 := \lim_{t \rightarrow 0} X_t$ が存在.

(ii) X は時刻 0 からスタートする M -値マルチンゲールに延長できる.

(iii) ある $t > 0$ に対し $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [X, X]_t^\varepsilon < \infty$ a.s. ($[X, X]_t^\varepsilon$ は $[\varepsilon, t]$ の 2 次変動)

系

定理 1 の仮定の下で u は D 上弱調和とすると, $z_0 \in D$ に対し

u は z_0 で細連続な修正を持つ $\Leftrightarrow \exists \overline{D_1} \subset D, \exists t > 0$ s.t. $z_0 \in D_1, \lim_{t \rightarrow 0} [\tilde{u}(Z)^{\tau_{D_1}}, \tilde{u}(Z)^{\tau_{D_1}}]_t^\varepsilon < \infty, P_{z_0}$ -a.s.

(注) P_z は z を始点とする Z_t の分布, τ_{D_1} は Z の D_1 からの脱出時刻, u が z で細連続 $\Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow 0} u(Z_t) = u(z), P_z$ -a.s.

定理1の証明からわかること

$h(z) = E_z[\tilde{u}(Z_{\tau_{D_1}})]$, $v = u - h$ と置くと, h は D_1 上調和関数で, $v \in \mathcal{F}_e^{D_1}$. v に対する福島分解

$$\tilde{v}(Z_t) - \tilde{v}(Z_0) = M_t^{[v]} + N_t^{[v]}$$

を用いると,

$$\tilde{u}(Z_{t \wedge \tau_{D_1}}) - \tilde{u}(Z_0) = H_{t \wedge \tau_{D_1}} + M_{t \wedge \tau_{D_1}}^{[v]} + N_{t \wedge \tau_{D_1}}^{[v]}.$$

ここで,

$H_{t \wedge \tau_{D_1}} := h(Z_{t \wedge \tau_{D_1}}) - h(Z_0)$ は有界マルチンゲール.

$M^{[v]}$ はマルチンゲール加法汎関数,

$N^{[v]}$ はエネルギー零の加法汎関数で一般には有界変動ではないが, 今回は弱調和性から有界変動となることが示される.

特に, 半マルチンゲール汎関数 $\tilde{u}(Z_{t \wedge \tau_{D_1}}) - \tilde{u}(Z_0)$ を

$$\tilde{u}(Z_{t \wedge \tau_{D_1}}) - \tilde{u}(Z_0) = L_t + A_t,$$

L_t : 局所マルチンゲール (汎関数),

A_t : 可予測局所有界変動 (汎関数)

と分解すると, L_t は P_z -2 乗可積分マルチンゲール q.e. $z \in E$.

問題

弱調和写像 u の細連続点はユークリッド位相に関する連続点になっているか??

(注) 調和関数の弱解の場合は Weyl の補題により自動的に可微分となるからこの問題は生じない.
一方, 調和写像の場合はエネルギー有限でも特異点が存在するため状況が異なる.

$\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$ 上のラプラシアンの場合

(1) 一般には全く異なる.

実際, Rivière により弱調和写像 $u: B^3 \rightarrow S^2$ でいたるところ不連続なものが構成できる.

一方, エネルギーが有限なら準連続修正を取れる.
(準連続 $\rightarrow$ 容量零を除いて細連続)

(2) 弱調和写像が "定常" な時

$\rightarrow$ 調和写像の特異点のハウスドルフ次元は高々 $\dim E - 2$.

● L_t が P_z -2 乗可積分 $\Leftrightarrow u$ は z で連続.

$\rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} [\tilde{u}(Z)^{\tau_{D_1}}, \tilde{u}(Z)^{\tau_{D_1}}]_t^\varepsilon < \infty$, P_z -a.s. との差があるかどうか?

● $u: B^3 \rightarrow S^2$ がエネルギー最小な時や $u: B^4 \rightarrow S^3$ が定常安定なら細連続点は連続点.