Fast rotation limit for the magnetohydrodynamics equations in a 3D layer

大山 広樹（おおやま ひろき）
（米田 慧司氏（九州大学 大学院数理学府）との共同研究）

九州大学 大学院数理学府 博士課程 2 年, 宮崎県宮崎市出身
mail: oyama.hiroki.310@s.kyushu-u.ac.jp

異分野・異業種研究交流会 2022
2022 年 10 月 29 日 (土)

目標

- **スケール臨界な関数空間**に属する初期値に対して, Coriolis 力付き磁気流体力学方程式 (MHD) の時間大域的適切性を示す. (定理 1-(I))
- **時間大域的な時空積分ノルム**の意味で, 回転速度を無限大とする解の特異極限を調べる. (定理 1-(II))

方程式

Coriolis 力付き磁気流体力学方程式:

$$\begin{cases} \partial_t u - \nu\Delta u + \Omega e_3 \times u + (u\cdot\nabla)u - (B\cdot\nabla)B + \nabla p = 0 & (t,x)\in(0,\infty)\times\mathbb{D}, \\ \partial_t B - \Delta B + (u\cdot\nabla)B - (B\cdot\nabla)u = 0 & (t,x)\in(0,\infty)\times\mathbb{D}, \\ \operatorname{div} u = \operatorname{div} B = 0 & (t,x)\in[0,\infty)\times\mathbb{D}, \\ u(0,x) = u_0(x),\ B(0,x) = B_0(x) & x\in\mathbb{D}. \end{cases} \tag{MHD}$$

- $\mathbb{D} := \mathbb{R}^2\times\mathbb{T}$: 3 次元層状領域, $x = (x_h, x_3)\in\mathbb{D} \Leftrightarrow x_h = (x_1, x_2)\in\mathbb{R}^2, x_3\in\mathbb{T}$
- $u = u(t,x) = (u_1(t,x), u_2(t,x), u_3(t,x))$: 流体の速度場
- $B = B(t,x) = (B_1(t,x), B_2(t,x), B_3(t,x))$: 磁場
- $p = p(t,x)$: 流体の圧力
- $u_0 = u_0(x) = (u_{0,1}(x), u_{0,2}(x), u_{0,3}(x))$: 流体の初期速度場
- $B_0 = B_0(x) = (B_{0,1}(x), B_{0,2}(x), B_{0,3}(x))$: 初期磁場
- $\Omega\in\mathbb{R}$: Coriolis パラメータ, $\nu > 0$: 流体の粘性係数, $e_3 = (0,0,1)$

分解

$f = f(x)$ は $f = \bar{f} + \tilde{f}$ と分解できる. ここで, $\bar{f}$ と $\tilde{f}$ はそれぞれ

$$\bar{f}(x_h) = Qf(x_h) = \int_{\mathbb{T}} f(x_h, x_3)\,dx_3, \quad \tilde{f}(x) = (I - Q)f(x)$$ と表す.

スケール臨界空間

スケール臨界空間

$$(u^\lambda, B^\lambda)(t,x) := \lambda(u,B)(\lambda^2 t, \lambda x),\ p^\lambda(t,x) := \lambda^2 p(\lambda^2 t, \lambda x),\ \Omega^\lambda := \lambda^2\Omega \quad (\lambda > 0)$$

(u,B,p): Ω に対する (MHD) の解 $\iff$ $(u^\lambda, B^\lambda, p^\lambda)$: Ω^λ に対する (MHD) の解

$$\|(u,B)(0,\cdot)\|_X = \|(u^\lambda, B^\lambda)(0,\cdot)\|_X \qquad (\forall \lambda > 0)$$

を満たす時, Banach 空間 $X = X(\mathbb{R}^n)$ は (MHD) に対するスケール臨界空間と呼ばれる. (例: Sobolev 空間 $\dot{H}^{\frac{n}{2}-1}(\mathbb{R}^n)$ $n \in \mathbb{N}$, $L^2(\mathbb{R}^2)$, $\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$, $L^3(\mathbb{R}^3)$)

先行研究 (時間大域解の一意存在):

1. $B \equiv 0$ かつ全空間 $\mathbb{R}^3$ の場合:
   - Chemin-Desjardins-Gallagher-Grenier (2002, 2006): $L^2(\mathbb{R}^2) + \dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$
   - Iwabuchi-Takada (2013): $\dot{H}^s(\mathbb{R}^3)$ for $1/2 \leqslant s < 3/4$
   - Koh-Lee-Takada (2014): $\dot{H}^s(\mathbb{R}^3)$ for $1/2 < s < 9/10$
2. $B \equiv 0$ かつ $\mathbb{D}$ の場合:
   - O.-Takada (2021): $L^2(\mathbb{R}^2) + (I-Q)\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{D})$
3. 全空間 $\mathbb{R}^3$ の場合:
   - Ahn-Kim-Lee (2021): $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^3)$, $B_0 \in (L^2 \cap L^q)(\mathbb{R}^3)$ $(1/2 < s < 3/4,\ q > 3)$
   - Kim (2022): $u_0, B_0 \in H^s(\mathbb{R}^3)$ $(1/2 < s < 3/2)$

極限方程式

定理 (O.-Takada (2021), $B \equiv 0$)

$u_0 = \bar{u}_0 + \tilde{u}_0 \in L^2(\mathbb{R}^2) + (I - Q)\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{D})$ と仮定する.

- $\exists \omega = \omega(u_0) > 0$ *s.t.* $|\Omega| \geqslant \omega$ を満たす $\forall \Omega \in \mathbb{R}$ に対して, *Coriolis* 力付き *Navier-Stokes* 方程式の時間大域解 u が一意的に存在する.
- $2/p + 2/q = 1$ を満たす $2 < p, q < \infty$ に対して, $|\Omega| \to \infty$ とする時, $u \to \bar{u}^\infty$ *in* $L^p(0,\infty; L^q(\mathbb{D}))$.

(MHD) に関する極限方程式系 ($\Delta_h = \partial_1^2 + \partial_2^2$, $\nabla_h = (\partial_1, \partial_2)$, $v_h = (v_1, v_2)$, $\mathrm{div}_h\, v_h = \partial_1 v_1 + \partial_2 v_2$):

$$\begin{cases} \partial_t \bar{u}^\infty - \nu \Delta_h \bar{u}^\infty + (\bar{u}_h^\infty \cdot \nabla_h)\bar{u}^\infty + (\nabla_h p, 0) = Q(B^\infty \cdot \nabla)B^\infty & (t, x_h) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^2, \\ \mathrm{div}_h\, \bar{u}_h^\infty = 0 & (t, x_h) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}^2, \\ \bar{u}^\infty(0, x_h) = \bar{u}_0(x_h), & x_h \in \mathbb{R}^2, \end{cases} \tag{Lim1}$$

$$\begin{cases} \partial_t B^\infty - \Delta B^\infty + (\bar{u}^\infty \cdot \nabla)B^\infty - (B_h^\infty \cdot \nabla_h)\bar{u}^\infty = 0 & (t, x) \in (0,\infty) \times \mathbb{D}, \\ \mathrm{div}\, B^\infty = 0 & (t, x) \in [0,\infty) \times \mathbb{D}, \\ B^\infty(0, x) = B_0(x) & x \in \mathbb{D}. \end{cases} \tag{Lim2}$$

主結果

$f = f(x)$ は $f = \bar{f} + \tilde{f}$ と分解できる. ここで, $\bar{f}$ と $\tilde{f}$ はそれぞれ

$$\bar{f}(x_h) = Qf(x_h) = \int_{\mathbb{T}} f(x_h, x_3)dx_3, \quad \tilde{f}(x) = (I-Q)f(x)$$ と表す.

定理 1 (O.-Yoneda, submitted)

(I) $\forall (u_0, B_0) = (\bar{u}_0, \bar{B}_0) + (\tilde{u}_0, \tilde{B}_0) \in L^2(\mathbb{R}^2) + (I-Q)\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{D})$,
$\exists \omega = \omega(\nu, \bar{u}_0, \tilde{u}_0, \bar{B}_0, \tilde{B}_0) > 0$ s.t. $|\Omega| \geqslant \omega$ を満たす $\Omega \in \mathbb{R}$ に対して,
$\exists ! (u, B) = (\bar{u}, \bar{B}) + (\tilde{u}, \tilde{B})$: (MHD) の時間大域解 s.t.

$$\bar{u}, \bar{B} \in C([0,\infty); L^2(\mathbb{R}^2))^3 \cap L^2(0,\infty; \dot{H}^1(\mathbb{R}^2))^3,$$

$$\tilde{u}, \tilde{B} \in C([0,\infty); (I-Q)\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{D}))^3 \cap L^2(0,\infty; \dot{H}^{\frac{3}{2}}(\mathbb{D}))^3.$$

(II) $2/p + 2/q = 1$ を満たす $2 < p, q < \infty$ に対して,

$$\lim_{|\Omega|\to\infty} \|u - \bar{u}^\infty\|_{L^p(0,\infty;L^q(\mathbb{D}))} = \lim_{|\Omega|\to\infty} \|B - B^\infty\|_{L^p(0,\infty;L^q(\mathbb{D}))} = 0.$$

ここで, $(\bar{u}^\infty, B^\infty)$ は $(\bar{u}_0, B_0)$ を初期値に持つ (Lim1), (Lim2) の時間大域解であり, 次を満たす:

$$\bar{u}^\infty, \bar{B}^\infty \in C([0,\infty); L^2(\mathbb{R}^2))^3 \cap L^2(0,\infty; \dot{H}^1(\mathbb{R}^2))^3,$$

$$\tilde{B}^\infty \in C([0,\infty); (I-Q)\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{D}))^3 \cap L^2(0,\infty; \dot{H}^{\frac{3}{2}}(\mathbb{D}))^3.$$