Zakharov-Kuznetsov 方程式の初期値問題の適切性

神戸大学大学院 理学研究科数学専攻 博士課程後期課程3年
大澤 哲史

概要

本研究は、プラズマ下の波を描写した偏微分方程式、
Zakharov-Kuznetsov方程式の初期値問題の適切性を述べたものである。
“微分方程式” “初期値問題” “適切性” というキーワードを
初学者でもイメージしやすい形でまとめていき、成果を述べつつ
本研究の目指すところが各企業において未来の安心を担保するという
ところに繋がっている、ということを説明する。

微分方程式の初期値問題

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$$ （数値）

$$y' - y = 0 \Rightarrow y = \pm A e^t$$ （関数）

特に、２変数以上の微分を考えて
未知関数を求める問題を **偏微分方程式** という。

プラズマ下の波動を描写する **Zakharov-Kuznetsov方程式** は、

$$\boxed{\partial_t u + \partial_x(\Delta u) + u\partial_x u = 0}$$

で表される。未知関数は u となる。初期状態の波 u_0 を与えて、
時間経過させたときの動きを見る問題を **初期値問題** という。

適切性という考え方

$$\partial_t u + \partial_x(\Delta u) + u\partial_x u = 0$$ （ZK 方程式） は、

$u = f(x,y,t)$ というふうに具体的な解を求めることは難しい。
（非線形 分散型方程式、という分類にあたる）

そこで、具体的な解が求まらずとも

- 時間経過させたときに、解が爆発的に大きくならない
- 解が滑らかである（ある程度の微分可能性を保つ）
- 似たような初期値なら、似たような解が出てくる

ことを担保しよう、という考え方に至った。これが、
初期値問題の適切性 という考え方である。
特に解の大きさや滑らかさは、ノルムという道具で測る。

研究成果

以上のことを、式でまとめると以下のようになる（＊）。

$$\partial_t u + \partial_x(\Delta u) + u\partial_x u = 0,\ \ u(x,y,0) = u_0(x,y)$$

は、$(x,y) \in \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{T}$（cylinder型）のとき、
ある $T > 0$ が存在して、$t \in [0,T]$ ならば
$u \in H^s$ for $9/10 < s$ で時間局所適切である。

また、$S: u_0 \to u$ という初期値と解を対応させる写像は、
滑らかである。

H^sは Sobolevノルム といい、関数のサイズと滑らかさを同時に測ることができるツールである。$s = 1$ がおよそ１階微分可能に対応し、ひとつの基準となっている。

＊ 論文「Local well-posedness for the Zakharov-Kuznetsov equation in Sobolev spaces」（S.Osawa, arXiv:2207.04657）

研究成果と応用

空間は２次元の中でも cylinder型（円筒形）を選んだ。
周期性のある空間（円を基にした空間）の方が、波と波が相互に作用して、より爆発的な波が生まれやすくなる。

この相互作用をフーリエ変換を用いて周波数ごとに見積もり、不等式計算でノルムを評価していくのが証明方法となる。

本研究は言い換えれば、新しい技術・現象に対して

適した道具で見積もりを取り、未来の安全を担保する

ような研究であると言える。
新しい現象があれば、それを描写する偏微分方程式が必ずある。
それを数学的観点から、実験の妥当性を裏付けられるのだ。