Large time behavior of solutions to the 3D rotating Navier-Stokes equations

江頭 貴成（えがしら たかなり）
(髙田 了准教授（東京大学 大学院数理科学研究科）との共同研究)

九州大学 大学院数理学府 博士課程 1 年, 福岡県久留米市出身
mail: egashira.takanari.539@s.kyushu-u.ac.jp

異分野・異業種研究交流会 2022
2022 年 10 月 29 日 (土)

目標

- 初期値に可積分性または 1 次の重み付き可積分性を仮定した際に, 方程式 (NS_Ω) の時間大域解に対する回転の影響を反映した時間減衰評価を証明する.
- 同様の時間大域解に対して, 線形解の積分核の 1 階導関数を含んだ時間無限大における漸近展開を証明する.

導入

Coriolis 力付き Navier-Stokes 方程式:

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u + \Omega e_3 \times u + (u \cdot \nabla) u + \nabla p = 0 & x \in \mathbb{R}^3, t > 0, \\ \operatorname{div} u = 0 & x \in \mathbb{R}^3, t \geq 0, \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in \mathbb{R}^3. \end{cases} \qquad (\mathrm{NS}_\Omega)$$

- $u = u(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t), u_3(x,t))$: 流体の速度場
- $p = p(x,t)$: 流体の圧力
- $u_0 = u_0(x) = (u_{0,1}(x), u_{0,2}(x), u_{0,3}(x))$: 流体の初期速度場
- $\Omega \in \mathbb{R}$: Coriolis パラメータ, $e_3 = (0,0,1)$

積分方程式による表示

$$u(t) = e^{-tA_\Omega} u_0 - \int_0^t e^{-(t-\tau)A_\Omega} \mathbb{P} \operatorname{div}(u \otimes u)(\tau)\, d\tau.$$

- $e^{-tA_\Omega} f := \mathscr{F}^{-1}\left[e^{-|\xi|^2 t} \hat{f}(\xi) \{ \cos\left(\Omega \frac{\xi_3}{|\xi|} t\right) I + \sin\left(\Omega \frac{\xi_3}{|\xi|} t\right) R(\xi) \} \right], \quad \operatorname{div} f = 0.$
- $\mathbb{P} := (\delta_{h,j} + \mathcal{R}_h \mathcal{R}_j)_{h,j=1}^3$: Helmholtz 射影作用素, $\mathcal{R}_j := \partial_j (-\Delta)^{-1/2}$: Riesz 作用素
- $I := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R(\xi) := \frac{1}{|\xi|} \begin{pmatrix} 0 & \xi_3 & -\xi_2 \\ -\xi_3 & 0 & \xi_1 \\ \xi_2 & -\xi_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \xi \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}.$

先行結果 (The Navier-Stokes equations)

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u + (u\cdot\nabla)u + \nabla p = 0 & x \in \mathbb{R}^3,\ t>0, \\ \operatorname{div} u = 0 & x \in \mathbb{R}^3,\ t \ge 0, \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in \mathbb{R}^3. \end{cases} \tag{NS}$$

$G_t(x) := (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} = \mathcal{F}^{-1}\left[e^{-|\xi|^2 t}\right](x)$: Gauss 核,

$\widetilde{G}_t(x) := \mathcal{F}^{-1}\left[e^{-|\xi|^2 t}\widehat{\mathbb{P}}(\xi)\right](x)$

先行結果 1 (Fujigaki-Miyakawa (2001))

初期値 $u_0 \in L^n(\mathbb{R}^n)$ が $(1+|\cdot|)u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ であると仮定する. $\exists\lambda > 0$ s.t. $\|u_0\|_{L^n(\mathbb{R}^n)} \le \lambda$ ならば (NS) の時間大域解 $u(t)$ が一意に存在し,

$$\|u(t)\|_{L^p} \le C t^{-\frac{n}{2}(1-\frac{1}{p})-\frac{1}{2}}, \quad (1 \le p \le \infty, \quad \forall t > 0).$$

$$\lim_{t\to\infty} t^{\frac{1}{2}+\frac{n}{2}(1-\frac{1}{p})} \Bigg\| u(t) + \sum_{j=1}^{n} \partial_j G_t(\cdot) \int_{\mathbb{R}^n} y_j u_0(y)\,dy + \sum_{j=1}^{n} \partial_j \widetilde{G}_t(\cdot) \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} (u_j u)(y,s)\,dy\,ds \Bigg\|_{L^p} = 0.$$

先行結果 (The rotating Navier-Stokes equations)

先行結果２ (Iwabuchi-Takada (2013) and Koh-Lee-Takada (2014))

$$\begin{cases} \frac{1}{2} < s < \frac{9}{10}, & \frac{1}{3} + \frac{s}{9} \le \frac{1}{q} < \frac{7}{12} - \frac{s}{6}, \\ \frac{3}{4}(1 - \frac{2}{q}) \le \frac{1}{\theta} \le \frac{5}{4} - \frac{5}{2q}, & -\frac{1}{2} + \frac{1}{2q} + \frac{s}{2} < \frac{1}{\theta} < \frac{5}{8} - \frac{3}{2q} + \frac{s}{4}. \end{cases}$$

このとき,Ω に依らない $\exists C_* = C_*(s,q,\theta) > 0$ s.t. $\operatorname{div} u_0 = 0$ かつ $\|u_0\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^3)} \le C_* |\Omega|^{\frac{1}{2}\left(s-\frac{1}{2}\right)}$ なる初期値 $u_0 \in \dot{H}^s(\mathbb{R}^3)$ に対して, (NS$_\Omega$) の時間大域解 $u(t) \in C([0,\infty); \dot{H}^s(\mathbb{R}^3)) \cap L^\theta(0,\infty; \dot{H}^s_q(\mathbb{R}^3))$ が一意に存在する.

解の時間減衰評価 (D): Ahn-Kim-Lee(2022), Kim(2022)

主結果１

u_0 が $u_0 \in \dot{H}^s \cap L^1(\mathbb{R}^3)$, 及び $\operatorname{div} u_0 = 0$ を満たすとする. $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{q} - \frac{s}{3}\right) \le \frac{1}{p} \le \frac{1}{2}$ なる p に対して $\exists C = C(s,p,q,\theta,\|u_0\|_{L^2},\|u_0\|_{L^1})$ s.t.

$$\|u(t)\|_{L^p} \le C t^{-\frac{3}{2}(1-\frac{1}{p})} (1+|\Omega| t)^{-(1-\frac{2}{p})}, \quad (\forall t > 0). \tag{D}$$

$$\lim_{t\to\infty} t^{\frac{3}{2}(1-\frac{1}{p})} (1+|\Omega| t)^{1-\frac{2}{p}} \|u(t)\|_{L^p} = 0.$$

主結果 2

$K_\Omega(x,t) := \mathcal{F}^{-1}\left[e^{-|\xi|^2 t}\cos\left(\Omega\frac{\xi_3}{|\xi|}t\right)I + \sin\left(\Omega\frac{\xi_3}{|\xi|}t\right)R(\xi)\right](x)$: 線形解の積分核

$\widetilde{K_\Omega}(x,t) := \mathcal{F}^{-1}\left[e^{-|\xi|^2 t}\left\{\cos\left(\Omega\frac{\xi_3}{|\xi|}t\right)I + \sin\left(\Omega\frac{\xi_3}{|\xi|}t\right)R(\xi)\right\}\widehat{\mathbb{P}}(\xi)\right](x)$

主結果 2

u_0 が $u_0 \in \dot{H}^s(\mathbb{R}^3)$, $(1+|\cdot|)u_0 \in L^1(\mathbb{R}^3)$ 及び $\operatorname{div} u_0 = 0$ を満たすとする.
$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{q} - \frac{s}{3}\right) \le \frac{1}{p} \le \frac{1}{2}$ なる p に対して $\exists C = C(s,p,q,\theta,\|u_0\|_{L^2},\||\cdot|u_0\|_{L^1})$ s.t.

$$\|u(t)\|_{L^p} \le Ct^{-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}(1-\frac{1}{p})}(1+|\Omega|t)^{-(1-\frac{2}{p})}, \quad (\forall t > 0).$$

$$\lim_{t\to\infty}(1+|\Omega|t)^{1-\frac{2}{p}}t^{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}(1-\frac{1}{p})}\Bigg\|u(t) + \sum_{j=1}^{3}\partial_j K_\Omega(\cdot,t)\int_{\mathbb{R}^3} y_j u_0(y)\,dy$$
$$+\sum_{j=1}^{3}\partial_j\widetilde{K_\Omega}(\cdot,t)\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^3}(u_j u)(y,s)\,dy\,ds$$
$$+\Omega\sum_{j=1}^{3}\int_0^{\frac{t}{2}}\int_0^1 \partial_j\mathbb{P}e_3\times\mathbb{P}\widetilde{K_\Omega}(\cdot,t-s\tau)d\tau\int_{\mathbb{R}^3} s(u_j u)(y,s)\,dy\,ds\Bigg\|_{L^p} = 0.$$