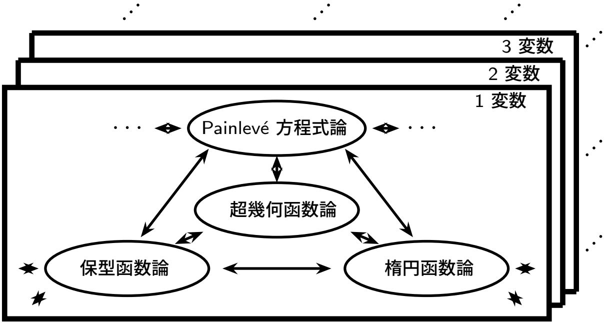
2 変数量子 Garnier 系の高野理論

上野祐一

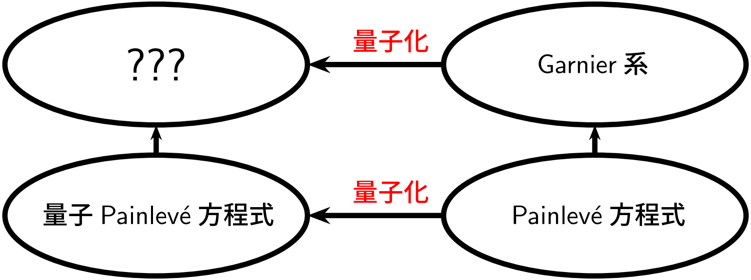
（神戸大学大学院理学研究科博士課程後期課程１年）

（皇學館大学教育学部教育学科）



Painlevé 方程式は微分方程式で定義される新しい非線形特殊関数を与えるものであり，研究の主題である Garnier 系は２変数以降の Painlevé 方程式論のところにあります．
すなわち，Painlevé 方程式の多変数化にあたるものです．

考える問題



この“???”がどうなるかについて調べる研究を行いました．
よい量子化を与える原理として以下の主な手法があります．

1. Affine Weyl 群対称性　Nagoya(2004,2009)
2. 正則性　Y.Ueno(2009)
3. 共形場理論
4. WKB=位相的漸化式

正則性による特徴付けと高野理論

< Takano 理論>

双有理正準変換による以下のようないくつかの座標系の張り合わせにより，岡本初期値空間を再構成し，各座標系で Hamiltonian が多項式となるものとして Painlevé 方程式を特徴づけたもの

$$
\begin{aligned}
r_1 : q_1 &= \frac{1}{x_1}, \quad & p_1 &= -x_1^2 y_1 - x_1 x_2 y_2 - \alpha_1 x_1, \\
q_2 &= \frac{x_2}{x_1}, \quad & p_2 &= x_1 y_2
\end{aligned}
$$

その主たる主張は次です．

Theorem ([Takano et al.])

1. (q,p) を元の *chart*，$(x_i, y_i)(i = 0, ..., 4)$ を追加する *chart* とするとき，これらの各 *chart* で *Hamiltonian* は正準変数の多項式になる
2. 逆に，各 *chart* で正則な *Hamiltonian* により記述される *Hamilton* 系は *Painlevé* 方程式に限る

Takano 理論の Garnier 系への拡張は古典論の場合には Sasano が行いました．
我々は，その量子化を行います．

2 変数量子 Garnier 系を適切に定義するために

t, s を独立変数，q_1, q_2, p_1, p_2 を従属変数，

H_1, H_2 を Hamiltonian とする量子的正準方程式を考えます．

ただし，Hamiltonian H_1, H_2 は q_1, q_2, p_1, p_2 の非可換多項式とします．

その係数を適当な変換に対する「正則性条件」から決定しようというのが我々の方針です．

このとき，変換 $r_1, ..., r_6$ は Sasano の変換の量子版 ($[x_i, y_j] = \delta_{ij} h \ (h \in \mathbb{C})$) とするとき，次が示されます．

Theorem

1. *Hamiltonian* H_1, H_2 は正準変換 $r_1, \ldots, r_6$ の下で多項式 *Hamiltonian* に変換される
2. 正準変換 $r_1, \ldots, r_6$ の下で，正則性を持つ多項式 *Hamiltonian* は規格化を除いて一意に決まる

決定された Hamiltonian

＜ t-flow の場合＞（s-flow の場合は H_2 が存在します）

$$
\begin{aligned}
H_1 = {} & \frac{1}{t(t-1)(t-s)(h+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6)}(t(t-s)q_1p_1^2-(t+1)(t-s)q_1^2p_1^2 \\
& -t(t-1)q_1q_2p_1^2+2t(s-1)q_1q_2p_1p_2-s(t-1)q_1q_2p_2^2+(t-s)q_1^3p_1^2+2(t-s)q_1^2q_2p_1p_2 \\
& +(t-s)q_1q_2^2p_2^2-(t-s)(h-\alpha_1-\alpha_2)q_1^2p_1-(t-s)(h-\alpha_1-\alpha_2)q_1q_2p_2+(t-s)\alpha_1\alpha_2q_1 \\
& -t(t-s)(h+\alpha_3)p_1+t(t-1)(h+\alpha_3)q_2p_1-t(s-1)(h+\alpha_3)q_2p_2+s(t-1)(h+\alpha_4)q_1p_2 \\
& +(ht-2hst+ht^2+s\alpha_1-t\alpha_1+s\alpha_2-t\alpha_2-st\alpha_3+t^2\alpha_3 \\
& +s\alpha_4-st\alpha_4+s\alpha_5-t\alpha_5-st\alpha_5+t^2\alpha_5)q_1p_1).
\end{aligned}
$$

このようにして得られた Hamiltonian を持つ Hamilton 系を 2 変数量子 Garnier 系と呼ぶ．

この t-flow と s-flow は可換である．

また，Hamiltonian の作り方より次が成り立つことも分かります．

Proposition

Hamiltonian H_1 は変換 $r_1,\dots,r_6$ の下で，多項式ハミルトニアン系に変換される