ロジャーズ＝ラマヌジャン型恒等式とアフィン・リー代数の関係性について

伊藤歌那
東京工業大学 情報理工学院 D2
理化学研究所 AIP 数理科学チーム ジュニア・リサーチ・アソシエイト

Abstract: Pochhammer 記号を用いて Rogers-Ramanujan 恒等式のような形の (無限和)=(無限積) で表される恒等式のことを Rogers-Ramanujan 型恒等式と呼ぶ。1970 年代、80 年代の Lepowsky-Wilson による研究以来、アフィン・リー代数の標準加群の真空空間を分析することで、Rogers-Ramanujan 型恒等式や整数の分割定理が得られるという期待がある。それに関連して、$A_{\mathrm{odd}}^{(2)}$ 型レベル 2 の標準加群の真空空間を Z-作用素と呼ばれる頂点作用素を用いて分析した結果を紹介する。

Rogers-Ramanujan 恒等式

Rogers-Ramanujan 恒等式

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(q;q)_n} = \frac{1}{(q,q^4;q^5)_\infty}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2+n}}{(q;q)_n} = \frac{1}{(q^2,q^3;q^5)_\infty}.$$

Rogers により 1890 年代に発見され、後年 Ramanujan により再発見された。
下記の Rogers-Ramanujan 整数分割定理の母関数になっている。

Pochhammer 記号: $(a;q)_n = \prod_{0\leq i\leq n-1}(1-aq^i)$, $\qquad (a_1,\cdots,a_k;q)_n = \prod_{1\leq j\leq k}(a_j;q)_n$.

Rogers-Ramanujan 整数分割定理

n を非負整数とする。

1. 隣接するパートの差が 2 以上であるような n の分割の個数と、各パートを 5 で割った際の余りが ± 1 であるような n の分割の個数は等しい。
2. 隣接するパートの差が 2 以上であり最小のパートが 2 以上であるような n の分割の個数と、各パートを 5 で割った際の余りが ± 2 であるような n の分割の個数は等しい。

1970 年代、Lepowsky-Wilson は $A_1^{(1)}$ 型レベル 3 の標準加群の主指標を用いて Rogers-Ramanujan 恒等式を証明した。それ以来、各アフィン・リー代数の各標準加群から Rogers-Ramanujan 型恒等式や整数の分割定理が得られるのではないか、という期待がある。

Principal realization of $\tilde{\mathfrak{g}}(\nu)$

Φ を X_l 型のルート系とし、$\{\alpha_1, \cdots, \alpha_l\}$ を Φ の単純ルートとする。$Q = \bigoplus_{1\le i\le l} \mathbb{Z}\alpha_i$ をルート格子として、$\langle\cdot,\cdot\rangle$ を Q 上の non-degenerate symmetric definite bilinear form とする。$\varepsilon : Q\times Q \to \mathbb{C}^\times$ を $(\alpha,\beta) \mapsto \prod_{p=1}^{m-1}(1-\omega^{-p})^{\langle \nu^p\alpha,\beta\rangle}$ により定める。X_l 型のリー代数 $\mathfrak{g}$ を Φ から構成する。

$$\mathfrak{g} = \mathrm{span}\{\{\alpha_i \mid 1\le i\le l\} \cup \{x_\alpha \mid \alpha\in\Phi\}\}, \quad [\alpha_i, x_\alpha] = \langle\alpha_i,\alpha\rangle x_\alpha, \quad [x_\alpha, x_\beta] = \begin{cases} \varepsilon(-\alpha,\alpha)\alpha & (\langle\alpha,\beta\rangle = -2) \\ \varepsilon(\alpha,\beta)x_{\alpha+\beta} & (\langle\alpha,\beta\rangle = -1) \\ 0 & (\text{otherwise}). \end{cases}$$

ν を twisted Coxeter automorphism, m を ν の位数, ω を 1 の原子 m 乗根とする。通常は $X_l^{(r)}$ 型のアフィン・リー代数の構成には Dynkin diagram automorphism を用いるが、ここでは twisted Coxeter automorphism を用いる。

ν-affinization of $\mathfrak{g}$

$$\hat{\mathfrak{g}}(\nu) = (\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathfrak{g}(n)\otimes t^n) \oplus \mathbb{C}c, \qquad \tilde{\mathfrak{g}}(\nu) = (\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathfrak{g}(n)\otimes t^n) \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d, \qquad (\mathfrak{g}(n) = \{x\in\mathfrak{g} \mid \nu x = \omega^n x\}).$$

$$[x\otimes t^i, y\otimes t^j] = [x,y]\otimes t^{i+j} + \frac{i}{m}\delta_{i+j,0}\langle x,y\rangle c, \qquad [c, \tilde{\mathfrak{g}}(\nu)] = \{0\}, \qquad [d, x\otimes t^i] = ix\otimes t^i.$$

なお、$x\in\mathfrak{g}$, $n\in\mathbb{Z}$ に対して $x_{(n)}$ を射影 $p_n : \mathfrak{g}\to\mathfrak{g}(n)$ による x の像として定める。

Definition (Lepowsky-Wilson)

L を $X_l^{(r)}$ 型レベル k の標準 $\tilde{\mathfrak{g}}(\nu)$ 加群とする。$\alpha \in \Phi$ に対して、$(\mathrm{End}\ L)\{\zeta\}$ の元を以下で与える。

$$X(\alpha,\zeta) = \sum_{i\in\mathbb{Z}}((x_\alpha)_{(i)} \otimes t^i)\zeta^i, \qquad E^{\pm}(\alpha,\zeta) = \exp(\pm m \sum_{i\geq 1}(\alpha_{(\pm i)} \otimes t^{\pm i})\zeta^{\pm i}/(ik)),$$

$$Z(\alpha,\zeta) = E^{-}(\alpha,\zeta)X(\alpha,\zeta)E^{-}(\alpha,\zeta) \qquad (= \sum_{i\in\mathbb{Z}} Z_i(\alpha)\zeta^i).$$

v_L を L の最高ウェイトベクトルとするとき、$\Omega(L)$ の spanning set が $\{Z_{i_1}(\beta_1)\cdots Z_{i_l}(\beta_l)v_L \mid l \geq 0,\ i_1,\cdots,i_l \in \mathbb{Z},\ \beta_1,\cdots,\beta_l \in \Phi\}$ により与えられることが知られている。
Φ' を Φ の ν による軌道分解の代表系とすると、$p \in \mathbb{Z}$ に対して $Z(\alpha,\omega^p\zeta) = Z(\nu^p\alpha,\zeta)$ が成り立つため、spanning set のルートの範囲を Φ から Φ' へと制限できる。ここからさらに、Z-作用素の monomial の添字、およびルートの範囲を制限して、整数分割に合うような形に整えたい。

Proposition

$A_{2s-1}^{(2)}$ 型レベル 2 の場合を考える。$i \in \mathbb{Z}$, $1 \leq j \leq s-1$, $\beta_j = \alpha_1 + \cdots + \alpha_j$ とする。$L(\Lambda_0) \otimes L(\Lambda_1)$ 上で $Z_{2i+1}(\beta_j) = Z_{2i}(\alpha_s) = 0$ が成り立つ。

主結果

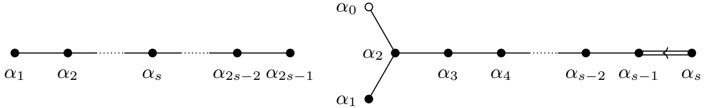
Theorem

$L \subset L(\Lambda_0) \otimes L(\Lambda_1)$ を $A_{2s-1}^{(2)}$ 型レベル 2 の標準加群とし、v_L を L の最高ウェイトベクトルとする。$Z_{2i-1}(\alpha_s) = Z_{2i-1}$, $Z_{2i}(\alpha_1) = Z_{2i}$ とおくと、主ハイゼンベルグ部分代数に関する真空空間 $\Omega(L)$ の spanning set を以下のように取ることができる。

$$\{Z_{i_1} \cdots Z_{i_l} v_L \mid l \geq 0,\ i_1, \cdots, i_l \in \mathbb{Z},\ i_1 \leq \cdots \leq i_l \leq -1\}.$$

つまり、A_{2s-1} 型の Dynkin 図形の端と中心に対応するルートの Z-作用素からなる Z-monomial で真空空間の spanning set を構成できる。

A_{2s-1} 型、$A_{2s-1}^{(2)}$ 型の Dynkin 図形:



Z-monomial の添字について、$A_5^{(2)}$ 型の場合、Gölnitz-Gordon の分割定理が、$A_7^{(2)}$ 型の場合、Rogers-Ramanujan の分割定理がそれぞれ対応するように $\Omega(L)$ の基底を構成できる。$A_9^{(2)}$ 型の場合は Kanade-Russell の予想した分割定理が対応する。$A_9^{(2)}$ 型の場合に関しては 2 つ離れた項の関係性を記述する式が必要であったが、通常は隣接する項の関係性を記述する generalized commutation relation を用いて解決した。$A_{11}^{(2)}$ 型、$A_{13}^{(2)}$ 型の場合に関しても対応する分割定理の予想が立てられており、上記の定理から対応関係が証明されることが期待される。