

曲面結び目の自明な再接着により得らる trisection , 磯島 司 (東京工業大学)

自己紹介

氏名: 磯島 司 (いそしま つか士)

所属: 東京工業大学理学院数学系 遠藤久顕研究室 (D1)

Email: isoshima.t.aa@m.titech.ac.jp

専門: 4次元多様体論, とくに 4次元多様体の ^{トライセクション} trisection

研究の動機・位置付け

trisection とは, 2012年に導入された 4次元多様体論の新理論である。これまでの 4次元多様体論は ゲージ理論 と呼ばれる理論に発展して来たが, ゲージ理論は解析的な理論であり, 図式を用いた直感的な議論を行えないという難点を持っていた。これを克服べく導入された理論が trisection である。実際, 4次元多様体は trisection 図式 を用いて表現できるため, trisection の登場により, 4次元多様体は以前よりも扱いやすい対象となった。

なぜ4次元を研究するのか?

単に多様体と言ってしまうとSSと指す。

- n 次元位相多様体: 局所的に n 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$ である空間
- n 次元可微分多様体: n 次元位相多様体 + 微分構造 ← 解析学が展開可能に(嬉しい)

※ 微分構造は一般に1つとは限らない。 $\mathbb{R}^n$ に対しては、 $n \neq 4$ であれば微分構造は本質的に1つだが、 $\mathbb{R}^4$ に対しては(非可算)無限個の異なる微分構造がある。

→ 他の状況(“ n 次元球面 S^n には微分構造が何個あるか?”はほとんどの次元で解決されているが $n=4$ は未解決等)も含めて、4次元は異常な次元 ← 4次元を研究する動機

1970年代までは4次元は謎の多い次元だったが、1980年代に登場したゲージ理論(28)
4次元は飛躍的な発展を遂げる。

→ 近年導入された trisection を用いて、ゲージ理論でしか示せていなかった定理に別証明をSSで示すことが可能に。

→ スライド1枚目の動機も含めて、trisectionが研究を始める。

trisection の紹介

trisection : 4次元多様体を 3つの 4次元の 1ハンドル体 に分解.

^{ヒーガード}
Heegaard 分解 (3次元多様体を 2つの 3次元の
1ハンドル体 に分解) の アナロジー.



trisection の強み

- 分解のパーツが 簡単な 4次元多様体 で調べやすい.

→ 元の 4次元多様体 が 調べやすくなる!

- 3次元多様体論 における 重要概念 である Heegaard 分解
の アナロジー と みなせる.

多くの先行研究が存在.

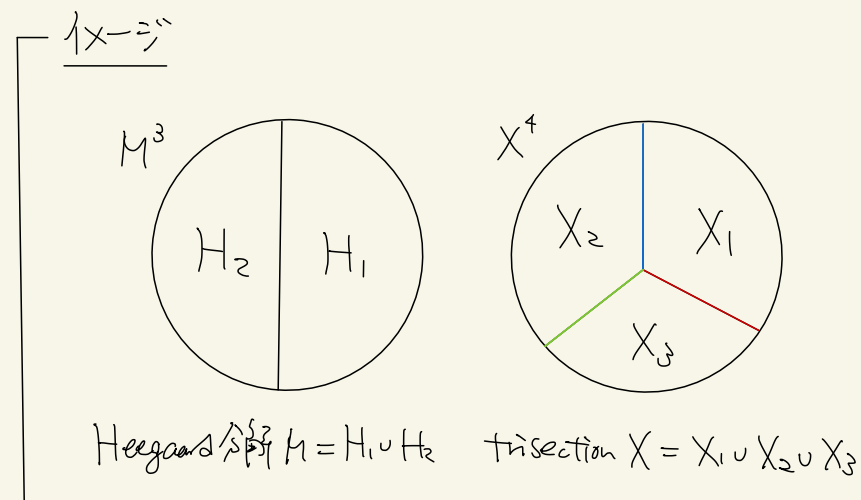
→ Heegaard 分解 を 用いた 3次元の研究手法 を 4次元 に 応用可能に!

(e.g. Hempel distance → Kirby-Thompson length)

3次元

4次元

etc.

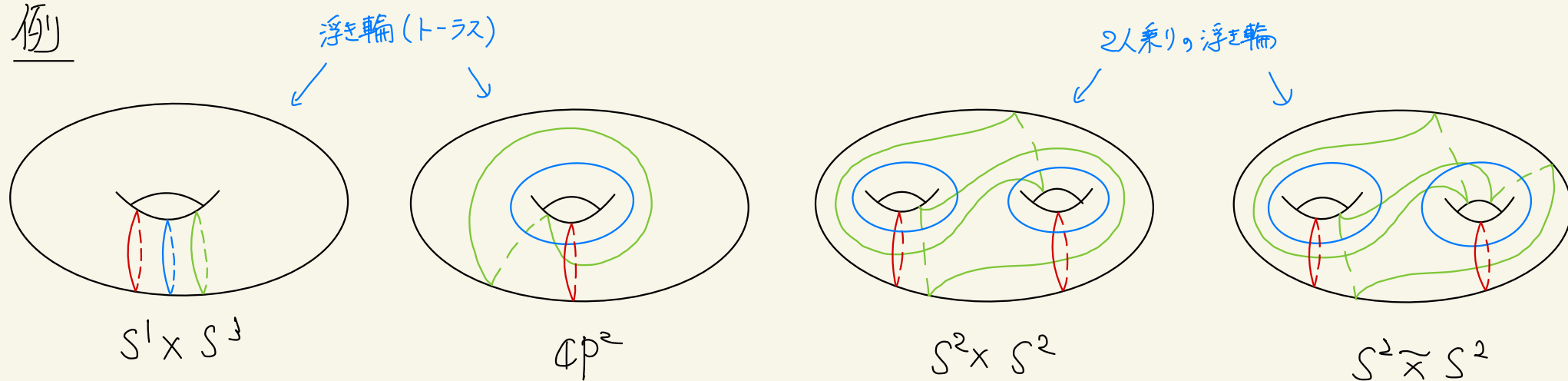


trisection 図式

trisection 図式 : trisection の分解の中心に表れる曲面に, 分解の様子を表す曲線を描いた図式. 4次元多様体を表す Heegaard 図式 のアナロジー.

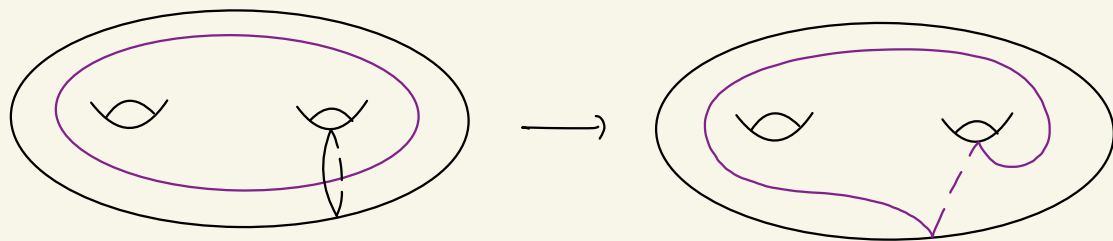
これにより, 視覚不可能な 4次元多様体を視覚的に捉えることが出来る.

例

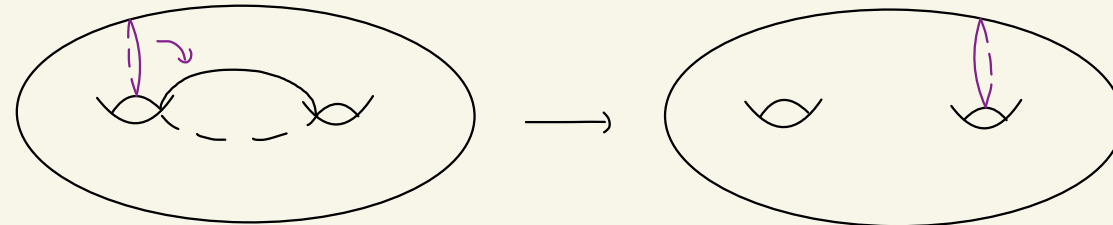


右のような変形により
複雑な trisection 図式を
変形することで, 4次元多様体を
特定することが可能.

• Dehn twist :



• ハンドルスライド :



- X : 向き付け可能な連結 4次元周多様体 S^2 の結び目
- $K \subset X$: 2-knot with normal Euler number $e(K) = 0$ K の結び目 曲面結び目の trisection
- $P_{\pm} \subset X$: unknotted P^2 -knot with $e(P_{\pm}) = \pm 2$ $S := K \# P_{\pm}$
- $T_{(X,S)}$: (X,S) の bridge trisection with underlying trisection $T_X = (X_1, X_2, X_3)$
- $T_{X'} = (X'_1, X'_2, X'_3)$: S を $T_{X'}$ に $\mathbb{Z}$ に関する 2-bridge position (2 橋) として $T_{(X,S)}$ を meridional stabilization して得られる bridge trisection の underlying trisection.
- T_1 : $V(S)$ の Kirby diagram によって定まる relative trisection. $\leftarrow$ 境界付き 4次元多様体の trisection
- T_2 : $X - V(S) = \bigcup_{i=1}^3 X'_i - V(S)$ に boundary stabilization を行い得られる relative trisection.
- T_S : T_1, T_2 を見れば合せて得られる X の trisection.

Theorem (I.) $\leftarrow$ 証明で上記の 2 変形を多数回使用.

T_S は $T_{X'}$ の stabilization に微分同相である. 特に, T_X の stabilization に微分同相である.