(発表題目) 逆数学と高階算術

自己紹介・研究動機

名前 五十里大将

所属 東北大学大学院理学研究科数学専攻博士後期課程

研究の動機 定理の強弱を比較する．また，主張の表現が生む影響を調べる．

逆数学

逆数学現象 (H. Frieadman)

いくつかの定理は，それを証明する“公理”を適切に選べば公理と同値になる．

- 公理を基準に定理を層分けできる，
- 特定の公理が無い世界で，何が起こるか分かる，
- 制限に応じた，“新たな数学”が見える．

形式体系

扱う対象，証明に使う公理と論理を定めたもの．例えばペアノ算術に対応する形式体系 PA などが有名．

例 ($A \to B$ は “A が B を証明する” の意)

単調収束定理 $\Longleftrightarrow$ ACA_0 - 算術的な集合は上手く扱える体系

$\Downarrow$

最大値原理 $\Longleftrightarrow$ WKL_0 - - - RCA_0+弱ケーニヒの補題

$\Downarrow$

中間値の定理 $\Longleftarrow$ RCA_0計算可能な集合は上手く扱える体系

2 階算術，コーディング

2 階算術

議論を厳密に行うために，土台を規定する．自然数と，自然数からなる集合をある程度扱える体系を用いることが多い．その範疇を超えるものたちは，工夫して表現する必要がある (コーディング)．

コーディングの例

- 自然数の組 $\langle n, m \rangle$ を $n - m$ だと思う．
- 整数の組 $\langle n, m \rangle$ を n/m だと思う．
- (指定の収束率を持つ) 有理数列 $\{q_n\}$ を $\lim_n q_n$ だと思う．
- 関数の値を決める情報を持つ集合をその関数だと思う．

注意

$\mathbb{R}$ を $\mathbb{Q}$ の Cauchhy 完備化とするので，$\mathbb{R}$ 上の連続関数の振る舞いは $\mathbb{Q}$ 上の振る舞いから近似可能．

Question

ひとつの主張が複数の表現 (コーディング) を持つなら，それにより強さが変わってしまうのでは？

高階算術

高階算術の体系

自然数，自然数上の関数，関数上の汎関数，その上の汎関数，... を対象とする体系．道具が多く，“通常の数学” に近い．

コーディングの例

- $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ は $\mathbb{N}$ でコードできる，
- $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ が実数ひとつをコードする，
- $\Phi : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ が実関数をコードする．

連続性をどう定義する？

- 二階算術式 (r.m.code)，
- いわゆる $\varepsilon\delta$ 式，
- ε に対し δ を与える関数 (modulus) がある．

RCA_0^ω

$$\begin{tikzcd} \boxed{\text{r.m.code}} \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d, shift left] & \boxed{\text{associate}} \arrow[r, leftrightarrow] & \boxed{\text{modulus}} \\ \boxed{\varepsilon\text{-}\delta\text{ 連続}} \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[u, shift left, "\text{WKL？}"] & \boxed{\text{列連続}} & \end{tikzcd}$$

何が嬉しい？

- 高階算術上では，様々な "表現" を形式化の上で比較できる，
- 表現の差異を見ることで新たな構造を見出せる，
- 土台の汎用性が高いため，未来の計算概念も包含できる可能性がある．

参考文献

[1] U. Kohlenbach, *Foundational and mathematical uses of higher types*, Reflections on the foundations of mathematics (Stanford, CA, 1998), Lect. Notes Log., vol. 15, Assoc. Symbol. Logic, Urbana, IL, 2002, pp. 92–116.

[2] S. G. Simpson, *Subsystems of second order arithmetic*, 2nd ed., Perspectives in Logic, Cambridge University Press, Cambridge; Association for Symbolic Logic, Poughkeepsie, NY, 2009.