

(発表題目) 逆数学と高階算術

自己紹介・研究動機

名前 五十里大将

所属 東北大学大学院理学研究科数学専攻博士後期課程

研究の動機 定理の強弱を比較する。また、主張の表現が生む影響を調べる。

逆数学

逆数学現象 (H. Friedman)

いくつかの定理は、それを証明する“公理”を適切に選べば公理と同値になる。

- 公理を基準に定理を層分けできる,
- 特定の公理が無い世界で、何が起こるか分かる,
- 制限に応じた、“新たな数学”が見える.

形式体系

扱う対象、証明に使う公理と論理を定めたもの。例えばペアノ算術に対応する形式体系 PA などが有名。

例 ($A \rightarrow B$ は “ A が B を証明する” の意)

単調収束定理 \longleftrightarrow ACA_0 - 算術的な集合は上手く扱える体系



最大値原理 \longleftrightarrow WKL_0 --- RCA_0 + 弱ケーニヒの補題



中間値の定理 \longleftrightarrow RCA_0 計算可能な集合は上手く扱える体系

2 階算術

議論を厳密に行うために、土台を規定する。自然数と、自然数からなる集合をある程度扱える体系を用いることが多い。その範疇を超えるものたちは、工夫して表現する必要がある(コーディング)。

コーディングの例

- 自然数の組 $\langle n, m \rangle$ を $n - m$ だと思ふ。
- 整数の組 $\langle n, m \rangle$ を n/m だと思ふ。
- (指定の収束率を持つ) 有理数列 $\{q_n\}$ を $\lim_n q_n$ だと思ふ。
- 関数の値を決める情報を持つ集合をその関数だと思ふ。

注意

\mathbb{R} を \mathbb{Q} の Cauchy 完備化とするので、 \mathbb{R} 上の連続関数の振る舞いは \mathbb{Q} 上の振る舞いから近似可能。

Question

ひとつの主張が複数の表現(コーディング)を持つなら、それにより強さが変わってしまうのでは？

高階算術の体系

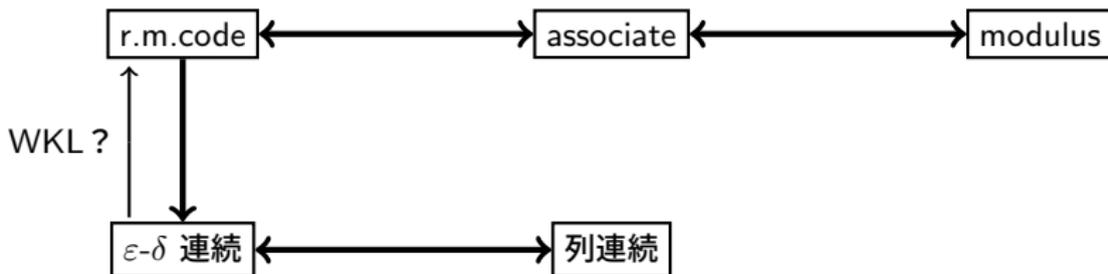
自然数，自然数上の関数，関数上の汎関数，その上の汎関数，... を対象とする体系．道具が多く，“通常の数学”に近い．

コードディングの例

- \mathbb{Z}, \mathbb{Q} は \mathbb{N} でコードできる，
- $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ が実数ひとつをコードする，
- $\Phi : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ が実関数をコードする．

連続性をどう定義する？

- 二階算術式 (r.m.code)，
- いわゆる $\varepsilon\delta$ 式，
- ε に対し δ を与える関数 (modulus) がある．



何が嬉しい？

- 高階算術上では、様々な“表現”を形式化の上で比較できる、
- 表現の差異を見ることで新たな構造を見出せる、
- 土台の汎用性が高いため、未来の計算概念も包含できる可能性がある。

参考文献

- [1] U. Kohlenbach, *Foundational and mathematical uses of higher types*, Reflections on the foundations of mathematics (Stanford, CA, 1998), Lect. Notes Log., vol. 15, Assoc. Symbol. Logic, Urbana, IL, 2002, pp. 92–116.
- [2] S. G. Simpson, *Subsystems of second order arithmetic*, 2nd ed., Perspectives in Logic, Cambridge University Press, Cambridge; Association for Symbolic Logic, Poughkeepsie, NY, 2009.