明治大学大学院理工学研究科数学専攻

大学院入試 模擬問題

【注意事項】

- お問い合わせには一切お答えしません。
- 本試験の際は，基礎問題は必須，専門問題から 1 問選択となります。詳しくは要領を参照してください。
- 当模擬問題の内容の無断転載・無断使用を固く禁じます。

基礎問題

問題 1 (線形代数)**.** 以下では，$\mathbf{R}$ は実数体とする。

(1) k は実数とする。線形写像 $f:\mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ を

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & -1 \\ 2k+8 & k+4 & 2 & k-2 \\ k^2-k+12 & 6 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

で定める。次の問に答えよ。

a) $\ker f$ の次元を求めよ。

b) $\ker f$ の正規直交基底を一組求めよ。

(2) n を自然数とする。複素数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ をとり，n 次正方行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_n & a_1 \end{pmatrix}$$

とおく。$\omega(\neq 1)$ は 1 の原始 n 乗根とする。

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ \omega \\ \omega^2 \\ \vdots \\ \omega^{n-1} \end{pmatrix}$ が，A の固有ベクトルであることを確かめよ。

b) A の固有値をすべて求めよ。

c) $U^{-1}AU$ が対角行列となるユニタリ行列 U をひとつ求めよ。

問題 2 (微分積分)**.** 以下の問に答えよ。

(1) $f(x) = \sqrt{4-x^2} + x\arcsin\left(\dfrac{x}{2}\right)$ $(-2 < x < 2)$ とおくとき，$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ。

(2) $I = \displaystyle\int_0^2 x^3 \arcsin\left(\frac{x}{2}\right)dx$ とおく。定積分 I の値を求めよ。

(3) 2 つの曲面 $z = \left(x^2+y^2\right)\arcsin\left(\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}\right)$，$x^2+y^2=4$，および平面 $z=0$ によって囲まれる立体の体積を求めよ。

専門問題（代数）

問題 3. G は群，H は G の部分群，N は G の正規部分群とする。
(1) $HN = \{hn \mid h \in H,\ n \in N\}$ とおく。このとき，HN は G の部分群であることを証明せよ。
(2) N は HN の正規部分群であることを証明せよ。
(3) $N \cap H$ は H の正規部分群であることを証明せよ。
(4) 群 HN/N は，群 $H/(N \cap H)$ と同型であることを証明せよ。

問題 4. $\mathbf{C}$ は複素数体、i は虚数単位とする。

$$R = \{a + bi \mid a,\, b \text{ は整数 }\} \subset \mathbf{C}$$

とおく。
(1) R は $\mathbf{C}$ の部分環であることを証明せよ ($\underline{1 \in R}$ と、$\underline{\alpha, \beta \in R \text{ のとき } \alpha \pm \beta, \alpha\beta \in R}$ を示す)。
(2) $\alpha, \beta \in R$ であり、$\beta \neq 0$ とする。このとき、

$$\alpha = \gamma\beta + \delta$$

であり、$|\beta| > |\delta|$ をみたす $\gamma, \delta \in R$ が存在することを証明せよ。ただし、$|\beta|$ は、複素数 β の絶対値であるとする。
(3) I を R のイデアル、つまり I は R の空でない部分集合で、$\underline{\alpha, \beta \in I \text{ なら } \alpha + \beta \in I}$と$\underline{\gamma \in I, \delta \in R \text{ なら } \gamma\delta \in I}$を満たすとする。$\beta$ は I に含まれる 0 でない元であり、

$$|\beta| = \min\{|\alpha| \mid 0 \neq \alpha \in I\}$$

を満たすとする。このとき、$I = \{\beta\gamma \mid \gamma \in R\}$ であることを証明せよ。

専門問題（幾何）

問題 5. $f(x,y)$ を $\mathbb{R}^2$ 上で定義された関数として、その xyz 空間におけるグラフ $z=f(x,y)$ を考える。このグラフを曲面とみなす。
(1) $f(x,y)=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$ であるときに、そのグラフの Gauss 曲率 K 及び平均曲率 H を求めよ。
(2) $f(x,y)=\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}$ であるときに、そのグラフの Gauss 曲率 K 及び平均曲率 H を求めよ。

問題 6. 3 単体のすべての辺単体からなる複体を K とおく。
(1) 複体 K の（実係数）ホモロジー群を求めなさい。
(2) 複体 K の 1 切片 $K^{(1)}$ の（実係数）ホモロジー群を求めなさい。

専門問題（解析）

問題 7. a を正の定数とし，関数 x は 実軸 $\mathbb{R}$ 全体で次の微分方程式の初期値問題の解であるとする：

$$\text{(i)} \quad \frac{dx(t)}{dt} + ax(t) = \sin t, \qquad \text{(ii)} \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}$$

このとき，任意の自然数 n に対して，次の等式が成り立つことを示せ：

$$\lim_{t \to +\infty} t^n \left| x(t) - \frac{1}{\sqrt{a^2+1}} \sin(t - \theta_a) \right| = 0$$

ただし，$\theta_a \in (0, \pi)$ は $\tan\theta_a = \dfrac{1}{a}$ となる実数である。

問題 8. 任意に正の実数 a をとる。このとき，複素平面 $\mathbb{C}$ 内に次のような単純閉曲線 Γ を考える：

$$\Gamma := C_R^+ + [-R, -\varepsilon] + \left(-C_\varepsilon^+\right) + [\varepsilon, R]$$

ここで，R と ε は $0 < \varepsilon < a < R$ なる実数であって，$[-R, -\varepsilon]$ と $[\varepsilon, R]$ は実軸上の区間で左端から右端への向きを持った線分で，$C_R^+ = \{z \in \mathbb{C} \,|\, z = R\,e^{i\theta},\, 0 \le \theta \le \pi\}$ は上半円周で反時計回りの向きを，$-C_\varepsilon^+$ は上半円周 $C_\varepsilon^+ = \{z \in \mathbb{C} \,|\, z = \varepsilon\,e^{i\theta},\, 0 \le \theta \le \pi\}$ に時計回りの向きを与えた経路である（下の図を参照)。この単純閉曲線 Γ に沿った複素変数 $z \in \mathbb{C}$ の関数 $f(z) = \dfrac{\log z}{(z^2+a^2)^2}$ の積分を考察することにより，次の実積分に対する二つの等式を示せ。ただし，対数は主値をとるものとする。

$$\text{(i)} \quad \int_0^{+\infty} \frac{\log x}{(x^2+a^2)^2}\,dx = \frac{\log a - 1}{4a^3}\pi \qquad \text{(ii)} \quad \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{\pi}{4a^3}$$