

2018 年度修士学位請求論文

次数 5 のモノミアル曲線の
定義イデアルのシンボリック・リース環について

明治大学大学院理工学研究科数学専攻

松浦瑞樹

指導教員 藏野和彦

目次

1	序	3
2	準備	4
2.1	シンボリック・リース環と negative curve の定義	4
2.2	条件 EU	13
2.3	Cohen-Macaulay 性	18
2.4	CRS	22
3	分類	24
3.1	$b \equiv c \pmod{5}$ の場合	24
3.2	$b \equiv 2c \pmod{5}$ の場合	24
3.3	$b \equiv 4c \pmod{5}$ の場合	25
4	Cohen-Macaulay 性	27
4.1	$b \equiv 2c \pmod{5}$ の場合	27
4.2	$b \equiv 4c \pmod{5}$ の場合	30
5	CRS	45
5.1	g が negative curve の場合	45
5.2	h が negative curve の場合	49

1 序

K を体とし, a, b, c を 2 つずつが互いに素な自然数とする. $\mathfrak{p}_K(a, b, c)$ を, K^3 のスペース・モノミアル曲線 (T^a, T^b, T^c) の定義イデアルとする. このとき, $\mathfrak{p}_K(a, b, c)$ は高々 3 つの元で生成される [6]. $\mathfrak{p}_K(a, b, c)$ のシンボリック・リース環 $R_s(\mathfrak{p}_K(a, b, c))$ は様々な数学者によって研究されている. 例えば, Huneke [7] は, $R_s(\mathfrak{p}_K(a, b, c))$ の Noether 性の判定法を与えた. ここで, $R_s(\mathfrak{p}_K(a, b, c))$ が Noether 環であることと, K 上有限生成であることは同値である. Goto-Nishida-Shimoda [4] は, $R_s(\mathfrak{p}_K(a, b, c))$ が Noether 環の場合, $R_s(\mathfrak{p}_K(a, b, c))$ が Cohen-Macaulay 環であるための必要十分条件を与えた. また, Goto-Nishida-Watanabe [5] は, シンボリック・リース環が Noether 環であるが, Cohen-Macaulay 環でない例を与えた (この例では, K の標数は正である). [5] では更に, それを用いて, K の標数が 0 であり, $R_s(\mathfrak{p}_K(a, b, c))$ が Noether 環でないような例を与えている.

一方, Cutkosky [1] は, シンボリック・リース環 $R_s(\mathfrak{p}_K(a, b, c))$ に, 幾何学的な意味付けを行った. $\text{Proj}(K[X, Y, Z])$ を, 点 $V_+(\mathfrak{p}_K(a, b, c))$ で blow-up した多様体を X とする. このとき, Cutkosky [1] は, Cox 環

$$\text{Cox}(X) = \bigoplus_{d, r \in \mathbb{Z}} H^0(X, \mathcal{O}_X(dH - rE))$$

が有限生成であることと, シンボリック・リース環 $R_s(\mathfrak{p}_K(a, b, c))$ が有限生成であることが同値であることを証明した. [1] では, 更に, 反標準因子 $-K_X$ が big ならば $\text{Cox}(X)$ は有限生成であることが証明されている.

X 上の曲線 C は, $C^2 < 0$ かつ $C \neq E$ を満たすとき, negative curve であるという. もし, negative curve C が存在し, 更に $C \cdot D = 0$ を満たす曲線 D が存在すれば, $\text{Cox}(X)$ は有限生成であり, $\sqrt{abc} \notin \mathbb{Z}$ の場合は逆も成立する. また, negative curve C が存在し, C が有理特異点に縮約できるならば, $\text{Cox}(X)$ は有限生成である. 更に, K が正標数の場合, negative curve が存在すれば $\text{Cox}(X)$ は有限生成である [1]. このように, $R_s(\mathfrak{p}_K(a, b, c))$ が Noether 環であることは, negative curve の存在に深く関わる.

体 K の標数を 0 とし, $a = \min\{a, b, c\}$ とする. $a = 1, 2, 3, 4, 6$ の場合, $-K_X$ は big であるので, $R_s(\mathfrak{p}_K(a, b, c))$ は常に Noether 環である. 一方, $a = 7, 9, 10, 11, \dots, 100$ の場合, $\mathfrak{p}_K(a, b, c)$ の中に negative curve の方程式があり, かつ $R_s(\mathfrak{p}_K(a, b, c))$ が Noether 環でない例が存在する (Goto-Nishida-Watanabe [5], González-Karu [3]). ただし, 100 以上の全ての整数 a に対し, $R_s(\mathfrak{p}_K(a, b, c))$ が Noether 環でない例が存在するかどうか

は未解決である． $a = 5, 8$ の場合， $R_s(\mathfrak{p}_K(a, b, c))$ が Noether 環でない例は知られていない，Noether 環であるという証明もなされていない．しかし，次の定理の通り， $a = 5$ の場合， $\mathfrak{p}_K(a, b, c)$ の生成元の中に negative curve の方程式が存在するとき， $R_s(\mathfrak{p}_K(a, b, c))$ は Noether 環である． $a = 8$ の場合も同様なことが言える．（内澤 [9]）

定理 1.1（海老名 [2]） K を標数 0 の体， a, b, c を 2 つずつが互いに素な自然数とし， $\min\{a, b, c\} = 5$ とする．また， $\mathfrak{p}_K(a, b, c)$ を，スペース・モノミアル曲線 (T^a, T^b, T^c) の定義イデアルとする．いま， $\mathfrak{p}_K(a, b, c)$ の生成元の中に negative curve が存在すると仮定する．このとき， $R_s(\mathfrak{p}_K(a, b, c))$ は Noether 環である．

K の標数が 0 のとき，シンボリック・リース環が Noether 環であり，Cohen-Macaulay 環でない例は見つかっていない．

第 4 章で次の定理を証明する．

定理 1.2 K を標数 0 の体， a, b, c を 2 つずつが互いに素な自然数とし， $\min\{a, b, c\} = 5$ とする． $\mathfrak{p}_K(a, b, c)$ の生成元の中に negative curve が存在すると仮定する．このとき， $R_s(\mathfrak{p}_K(a, b, c))$ は Cohen-Macaulay 環である．

第 5 章では，定理 1.1 の仮定の下で $\mathfrak{p}_K(a, b, c)$ の生成元の中に negative curve が存在する場合，negative curve が有理特異点に縮約できる条件を求める．

この論文では，命題 2.11 と 2.2 節以降は， K の標数は 0 であるとする．

2 準備

この章では， a, b, c を 2 つずつが互いに素な自然数， K を体とする．

2.1 シンボリック・リース環と negative curve の定義

$S = K[X, Y, Z]$ を多項式環とする． $\mathfrak{p}_K(a, b, c)$ を $\phi(X) = T^a$ ， $\phi(Y) = T^b$ ， $\phi(Z) = T^c$ で定義された環準同型写像 $\phi : S \rightarrow K[T]$ の核とする． X, Y, Z の次数をそれぞれ a, b, c とし， T の次数を 1 とすると， ϕ は次数付き環準同型写像になる．

$\mathbb{N}$ を自然数全体の集合， $\mathbb{N}_0$ を非負整数全体の集合とし，

$\mathbb{N}a \cap (\mathbb{N}_0b + \mathbb{N}_0c)$ の最小元を $sa = t_1b + u_1c$

$\mathbb{N}b \cap (\mathbb{N}_0a + \mathbb{N}_0c)$ の最小元を $tb = s_2a + u_2c$

$\mathbb{N}c \cap (\mathbb{N}_0a + \mathbb{N}_0b)$ の最小元を $uc = s_3a + t_3b$

と定める．ただし s, t, u は自然数であり， $s_2, s_3, t_1, t_3, u_1, u_2$ は非負整数である．斉次多項式 f, g, h を，

$$f = X^s - Y^{t_1} Z^{u_1}, \quad g = Y^t - X^{s_2} Z^{u_2}, \quad h = Z^u - X^{s_3} Y^{t_3}$$

と定める．このとき，次の定理が成立する．

- 定理 2.1 (Herzog [6])**
- 1) イデアル $\mathfrak{p}_K(a, b, c)$ の極小生成系の個数 $\mu(\mathfrak{p}_K(a, b, c))$ は 2 または 3 であり， $\mathfrak{p}_K(a, b, c)$ は f, g, h で生成される．
 - 2) 次は同値である．
 - i) $\mu(\mathfrak{p}_K(a, b, c)) = 3$.
 - ii) $s_2, s_3, t_1, t_3, u_1, u_2$ は全て正である．
 - 3) $\mu(\mathfrak{p}_K(a, b, c)) = 3$ とする．このとき， $s_2, s_3, t_1, t_3, u_1, u_2$ は一意的に決まり， $s = s_2 + s_3, t = t_1 + t_3, u = u_1 + u_2$ が成立する．

命題 2.2 $\mu(\mathfrak{p}_K(a, b, c)) = 2$ ならば， s, t, u の少なくとも 1 つは 1 である．

証明 定理 2.1 より， $s_2, s_3, t_1, t_3, u_1, u_2$ の少なくとも 1 つは 0 である． $s_2 = 0$ としても一般性を失わない．このとき， $s = 1$ であることを示す．

b と c は互いに素であるので， $a \equiv kb \pmod{c}$ となるような $0 \leq k < c$ が存在する．よって， $a = kb + lc$ となる $l \in \mathbb{Z}$ が存在する． $s > 1$ と仮定すると， $a = k'b + l'c$ となるような非負整数 k', l' は存在しないので， $l < 0$ となる． $kb = a - lc$ ， $-l > 0$ であるので， tb の最小性より $kb \geq tb$ が成り立つ．また， $s_2 = 0$ であるので $tb = u_2 c$ であり， b と c は互いに素であるので $t = c$ となる．よって $k \geq t = c$ であるが，これは $k < c$ に反する．

証明終

命題 2.3 $\min\{a, b, c\} = a > 1$ であり， $b \equiv kc \pmod{a}$ ， $c \equiv lb \pmod{a}$ ， $0 \leq k < a$ ， $0 \leq l < a$ を仮定する^{*1}．このとき， $\mu(\mathfrak{p}_K(a, b, c)) = 2$ である必要十分条件は， $b \geq kc$ または $c \geq lb$ となることである．

証明 必要性を示す． $s = 1$ と仮定すると， $a = t_1 b + u_2 c$ である．しかし， $a < b$ かつ $a < c$ であるので， $a < t_1 b + u_1 c$ となり，これは矛盾． $t = 1$ ならば， $b = s_2 a + u_2 c$ であるので， $b \equiv u_2 c \pmod{a}$ となる． $u_2 \geq 0$ であるので， $u_2 \geq k$ である．したがって $b \geq kc$ が成立する． $u = 1$ ならば， $c = s_3 a + t_3 b$ であるので， $c \equiv t_3 b \pmod{a}$ となる． $t_3 \geq 0$ であるので， $t_3 \geq l$ である．したがって $c \geq lb$ が成立する．

^{*1} a, b, c は 2 つずつが互いに素なので，この仮定を満たす k と l は一意的に存在する．

十分性を示す. $b \geq kc$ ならば, $b = kc + pa$ ($p \in \mathbb{N}_0$) であるので, $t = 1$ である. よって $\mu(\mathfrak{p}_K(a, b, c)) = 2$ が従う. $c \geq lb$ ならば, $c = lb + qa$ ($q \in \mathbb{N}_0$) であるので, $u = 1$ であり, $\mu(\mathfrak{p}_K(a, b, c)) = 2$ が従う. 証明終

一般に, 可換環 R の素イデアル P に対して,

$$P^{(n)} = P^n R_P \cap R$$

を n 次のシンボリック冪という. $P^{(n)}$ は P^n を含むような P -準素イデアルであり,

- $R \supset P = P^{(1)} \supset P^{(2)} \supset P^{(3)} \supset \dots$
- $P^{(n)} P^{(m)} \subset P^{(n+m)}$

が成立する. 多項式環 $R[T]$ の部分環

$$R_s(P) := R[PT, P^{(2)}T^2, P^{(3)}T^3, \dots] = \bigoplus_{n \geq 0} P^{(n)}T^n$$

を P のシンボリック・リース環という.

$P = \mathfrak{p}_K(3, 4, 5)$ のとき,

$$\begin{array}{ll} f = X^3 - YZ & \deg f = 9 \\ g = Y^2 - XZ & \deg g = 8 \\ h = Z^2 - X^2Y & \deg h = 10 \end{array}$$

である. P^2 の生成元は $f^2, g^2, h^2, fg, gh, hf$ であり, この中で次数が最小なものは g^2 であって, その次数は 16 である. しかし,

$$gh - f^2 = -XZ^3 - X^2Y^3 + 3X^3YZ - X^6$$

であるので, $(gh - f^2)/X$ は次数 15 の $P^{(2)}$ の元である. したがって, $P^2 \neq P^{(2)}$ である.

以下, 次数付き環 $R = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} R_n$ のイデアル I に対し, $\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} (R_n \cap I)$ を I^* と表記する.*2

補題 2.4 $R = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} R_n$ を次数付き環, P を R の素イデアルとし, Q を P -準素イデアルとする. このとき, Q^* は P^* -準素イデアルである.

2 すなわち, I^ は I に含まれる最大の斉次イデアルである.

証明 R が Noether 環の場合を示す. $Q^* = \bigcap_i Q_i$ を極小準素分解とし, $P_i = r(Q_i)$ とおく. 各 i に対し, P_i は斉次イデアルであるので, 斉次元 x_i が存在して, $P_i = (Q^* : x_i)$ と書ける. よって,

$$P^* \subset r(Q^*) \subset P_i \subset (Q : x_i) \subset P$$

が成り立つ. P^* と P の間には斉次素イデアルがなく, P_i は斉次素イデアルなので, $P_i = P^*$ である. よって, Q^* は P^* -準素イデアルである.

一般の場合は次のように証明される. $x = \sum x_i, y = \sum y_j$ ($x_i \in R_i, y_j \in R_j$) とし, $xy \in Q^*$ を仮定する. A' を環準同型 $\mathbb{Z} \rightarrow R$ の像とし, $A := A'[\{x_i\}, \{y_j\}]$ を R の次数付き部分環とする. このとき, $Q^* \cap A$ は $P^* \cap A$ -準素イデアルなので, $x \notin Q^*$ ならば $y \in P^*$ である. 証明終

命題 2.5 $R = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} R_n$ を次数付き環, P を R を斉次素イデアルとする. このとき, 任意の自然数 n に対し, $P^{(n)}$ は斉次イデアルである.

証明 補題 2.4 より, $\{P^{(n)}\}^*$ は P^n を含む P -準素イデアルである. $P^{(n)}$ は P^n を含む最小の P -準素イデアルであるので, $P^{(n)} \subset \{P^{(n)}\}^*$ が成立する. 故に, $P^{(n)} = \{P^{(n)}\}^*$ であり, $P^{(n)}$ は斉次イデアルである. 証明終

以下, 混乱の恐れがない場合, $\mathfrak{p}_K(a, b, c)$ を単に $\mathfrak{p}$ と表す.

命題 2.6 $\xi \in \mathfrak{p}^{(r_1)} \setminus \mathfrak{p}^{(r_1+1)}, \eta \in \mathfrak{p}^{(r_2)} \setminus \mathfrak{p}^{(r_2+1)}$ であると仮定する. このとき, $\xi\eta \in \mathfrak{p}^{(r_1+r_2)} \setminus \mathfrak{p}^{(r_1+r_2+1)}$ である.

証明 $S_{\mathfrak{p}}$ において,

$$\begin{aligned} \xi &\in \mathfrak{p}^{r_1} S_{\mathfrak{p}} \setminus \mathfrak{p}^{r_1+1} S_{\mathfrak{p}} \\ \eta &\in \mathfrak{p}^{r_2} S_{\mathfrak{p}} \setminus \mathfrak{p}^{r_2+1} S_{\mathfrak{p}} \end{aligned}$$

であり, $S_{\mathfrak{p}}$ は正則局所環であるので,

$$\xi\eta \in \mathfrak{p}^{r_1+r_2} S_{\mathfrak{p}} \setminus \mathfrak{p}^{r_1+r_2+1} S_{\mathfrak{p}}$$

である ($\text{gr}(\mathfrak{p}S_{\mathfrak{p}}, S_{\mathfrak{p}})$ は整域であることに注意する). したがって, $\xi\eta \in \mathfrak{p}^{(r_1+r_2)} \setminus \mathfrak{p}^{(r_1+r_2+1)}$ が成り立つ. 証明終

以下, 環 A に対し, A 加群 M の長さを $\ell_A(M)$ または単に $\ell(M)$ と表記する. さらに, $(A, \mathfrak{m})$ が Noether 局所環のとき, $e_{\mathfrak{q}}(A)$ を $\mathfrak{m}$ -準素イデアル $\mathfrak{q}$ の重複度とする.

補題 2.7 $A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$ は次数付き Noether 環であり, $(A_0, \mathfrak{n})$ は Artin 局所環であると仮定する. $\mathfrak{m} = (\mathfrak{n}, \bigoplus_{n > 0} A_n)A$ とおく. このとき, $\text{depth}(\mathfrak{m}, A) \geq 1$ ならば, $\mathfrak{m}$ の中に A 正則な次数が正の斉次元が取れる.

証明 $\text{Ass}(A) = \{P_1, \dots, P_s\}$ とする. $P_1, \dots, P_s$ は斉次素イデアルであり, $\text{depth}(\mathfrak{m}, A) \geq 1$ であるので, 任意の $i = 1, \dots, s$ に対し,

$$P_i \subsetneq \mathfrak{m}$$

である. $\mathfrak{m} \setminus \bigcup P_i$ の中に次数が正の斉次元が存在することを示せば良い. $s = 1$ のときは明らかである. $s \geq 2$ のとき, 帰納法より, 各 $1 \leq i \leq s$ に対し,

$$a_i \in \mathfrak{m} \setminus \bigcup_{j \neq i} P_j$$

となるような斉次元 a_i が取れる. $a_i \notin P_i$ となるような i が存在するならば, $a_i \in \mathfrak{m} \setminus \bigcup_{j=1}^s P_j$ であるので正しい. よって, 任意の i に対し $a_i \in P_i$ の場合を示せば十分である. この場合, $\deg a_i > 0$ であるので, 適当に冪をとることで, $a_1, \dots, a_s$ の次数を全て等しいと仮定してよい. $b_i = a_1 \cdots a_{i-1} a_{i+1} \cdots a_s$ とおく. すると, $b_i \in \bigcap_{j \neq i} P_j \setminus P_i$ であるので,

$$\sum_{i=1}^s b_i \in \mathfrak{m} \setminus \bigcup_{i=1}^s P_i$$

が成り立つ.

証明終

補題 2.8 A を d 次元 Cohen-Macaulay 局所環, $\mathfrak{q}$ をパラメータイデアル, $k_1, \dots, k_d$ を自然数とし, 各 ξ_i ($1 \leq i \leq d$) を, $\xi_i \in \mathfrak{q}^{k_i}$ であるような元とする. $\xi_1, \dots, \xi_d$ が A 列であるとき,

$$\ell_A(A/(\xi_1, \dots, \xi_d)) \geq k_1 \cdots k_d \cdot \ell_A(A/\mathfrak{q})$$

となる.

証明 ([8] Lemma 2.2 も参照) $I = \left(\xi_i^{\frac{k_1 \cdots k_d}{k_i}} \mid 1 \leq i \leq d \right)$ とおく. I はパラメータイデアルであるので,

$$e_I(A) = \ell(A/I) = (k_1 \cdots k_d)^{d-1} \ell(A/(\xi_1 \cdots \xi_d))$$

である。また、 $I \subset \mathfrak{q}^{k_1 \cdots k_d}$ であるので、

$$\begin{aligned} e_I(A) &\geq e_{\mathfrak{q}^{k_1 \cdots k_d}}(A) \\ &= (k_1 \cdots k_d)^d \cdot e_{\mathfrak{q}}(A) \\ &= (k_1 \cdots k_d)^d \cdot \ell(A/\mathfrak{q}) \end{aligned}$$

が成立する。故に、 $\ell_A(A/(\xi_1, \dots, \xi_d)) \geq k_1 \cdots k_d \cdot \ell_A(A/\mathfrak{q})$ である。

証明終

定理 2.9 $\xi \in [\mathfrak{p}^{(r_1)}]_{d_1}$, $\eta \in [\mathfrak{p}^{(r_2)}]_{d_2}$ は S 正則列であると仮定する。このとき、 $d_1 d_2 \geq r_1 r_2 \cdot abc$ が成り立つ。特に、 $r_1, r_2 > 0$ ならば

$$\frac{d_1}{r_1} \frac{d_2}{r_2} \geq abc$$

である。

証明 $S^{(abc)} = \bigoplus_{n \geq 0} S_{nabc}$ とおく。 S の極大イデアル $\bigoplus_{n > 0} S_n$ を $\mathfrak{m}$ とおき、 $S^{(abc)}$ のイデアル $\mathfrak{m} \cap S^{(abc)}$ を $\mathfrak{n}$ とおく。 $\text{depth}(\mathfrak{m}, S/(\xi, \eta)) = 1$ であるので、補題 2.7 より ξ, η, φ が S 正則となるような $\varphi \in S_{uabc}$ が存在する。よって、 $\xi^{abc}, \eta^{abc}, \varphi$ は S 正則であるので、 $\xi^{abc}, \eta^{abc}, \varphi$ は $[S^{(abc)}]_{\mathfrak{n}}$ 正則。また、 $\dim [S^{(abc)}]_{\mathfrak{n}} = 3$ であるので、 $[S^{(abc)}]_{\mathfrak{n}}$ は Cohen-Macaulay 環である。よって、

$$\ell \left(\frac{[S^{(abc)}]_{\mathfrak{n}}}{(\xi^{abc}, \eta^{abc}, \varphi)} \right) = e_{(\xi^{abc}, \eta^{abc}, \varphi)} \left([S^{(abc)}]_{\mathfrak{n}} \right)$$

が成立する。ここで、 $S_{\mathfrak{m}}$ は $[S^{(abc)}]_{\mathfrak{n}}$ 加群であり、 $\text{rank}_{[S^{(abc)}]_{\mathfrak{n}}} S_{\mathfrak{m}} = abc$ であるので、

$$\begin{aligned} e_{(\xi^{abc}, \eta^{abc}, \varphi)} \left([S^{(abc)}]_{\mathfrak{n}} \right) &= \frac{1}{abc} \cdot e_{(\xi^{abc}, \eta^{abc}, \varphi)}(S_{\mathfrak{m}}) \\ &= \frac{1}{abc} \cdot \ell \left(\frac{S_{\mathfrak{m}}}{(\xi^{abc}, \eta^{abc}, \varphi) S_{\mathfrak{m}}} \right) \\ &= abc \cdot \ell \left(\frac{S_{\mathfrak{m}}}{(\xi, \eta, \varphi) S_{\mathfrak{m}}} \right) \\ &= abc \cdot \ell \left(\frac{S_{\mathfrak{m}}}{(\xi, \eta) S_{\mathfrak{m}}} \Big/ \overline{\varphi} \cdot \frac{S_{\mathfrak{m}}}{(\xi, \eta) S_{\mathfrak{m}}} \right) \\ &= abc \cdot e_{(\overline{\varphi})}(S_{\mathfrak{m}}/(\xi, \eta) S_{\mathfrak{m}}) \\ &\geq abc \cdot e_{(\overline{\varphi})}(S_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{p} S_{\mathfrak{m}}) \cdot \ell_{S_{\mathfrak{p}}} \left(\frac{S_{\mathfrak{p}}}{(\xi, \eta) S_{\mathfrak{p}}} \right) \end{aligned}$$

が成り立つ. $S_{\mathfrak{p}}$ は 2 次元正則局所環であり, $\xi \in \mathfrak{p}^{r_1} S_{\mathfrak{p}}$, $\eta \in \mathfrak{p}^{r_2} S_{\mathfrak{p}}$ であるので, 補題 2.8 より

$$\ell_{S_{\mathfrak{p}}} \left(\frac{S_{\mathfrak{p}}}{(\xi, \eta) S_{\mathfrak{p}}} \right) \geq r_1 r_2 \quad (2.1)$$

である. $\mathfrak{p}$ の定義より, $S/\mathfrak{p}$ は $K[T^a, T^b, T^c]$ と同型であり, その同型写像により, $\bar{\varphi}$ は $a_{\varphi} T^{uabc}$ ($a_{\varphi} \in K^{\times}$) に写されるので,

$$\begin{aligned} & e_{(\bar{\varphi})} \left(\frac{S_{\mathfrak{m}}}{\mathfrak{p} S_{\mathfrak{m}}} \right) \\ &= e_{(T^{uabc})} (K[T^a, T^b, T^c]_{(T^a, T^b, T^c)}) \end{aligned}$$

が成立する. a, b, c は互いに素であるので, $\text{rank}_{K[T^a, T^b, T^c]} K[T] = 1$ で,

$$\begin{aligned} & e_{(T^{uabc})} (K[T^a, T^b, T^c]_{(T^a, T^b, T^c)}) \\ &= e_{(T^{uabc})} (K[T]_{(T)}) \\ &= \ell \left(\frac{K[T]}{(T^{uabc})} \right) \\ &= uabc \end{aligned} \quad (2.2)$$

となる. (2.1) と (2.2) より

$$\ell \left(\frac{[S^{(abc)}]_{\mathfrak{n}}}{(\xi^{abc}, \eta^{abc}, \varphi)} \right) \geq u(abc)^2 r_1 r_2$$

が従う.

以下, $S^{(abc)}$ を, S_{nabc} の元の次数を n として次数付き環とみる. このとき, $S^{(abc)} = K[S_{abc}]$ が成立し, さらに, $\text{gr}(\mathfrak{n}, [S^{(abc)}]_{\mathfrak{n}})$ は次数付き環として $S^{(abc)}$ と同型であり, $\dim [S^{(abc)}]_{\mathfrak{n}} = 3$ であるので, $S^{(abc)}$ のポアンカレ級数は,

$$P(S^{(abc)}, t) = \frac{\ell(t)}{(1-t)^3}$$

と表される. ただし, $\ell(t) \in \mathbb{Z}[t]$ であり, $\ell(1) \neq 0$ である. 列

$$0 \longrightarrow S^{(abc)} \xrightarrow{\xi^{abc}} S^{(abc)} \longrightarrow \frac{S^{(abc)}}{\xi^{abc} S^{(abc)}} \longrightarrow 0$$

は完全であるので,

$$-t^{d_1} P(S^{(abc)}, t) + P(S^{(abc)}, t) - P \left(\frac{S^{(abc)}}{\xi^{abc} S^{(abc)}}, t \right) = 0$$

となる。よって,

$$P\left(\frac{S^{(abc)}}{(\xi^{abc})}, t\right) = P(S^{(abc)}, t)(1 - t^{d_1})$$

である。この操作を続けて,

$$\begin{aligned} & P\left(\frac{S^{(abc)}}{(\xi^{abc}, \eta^{abc}, \varphi)}, t\right) \\ &= \frac{\ell(t)(1 - t^{d_1})(1 - t^{d_2})(1 - t^u)}{(1 - t)^3} \\ &= \ell(t)(1 + t + \cdots + t^{d_1-1})(1 + t + \cdots + t^{d_2-1})(1 + t + \cdots + t^{u-1}) \end{aligned}$$

が成り立つ。 $\frac{S^{(abc)}}{(\xi^{abc}, \eta^{abc}, \varphi)}$ は次数付き Artin 局所環であるので, $P\left(\frac{S^{(abc)}}{(\xi^{abc}, \eta^{abc}, \varphi)}, t\right)$ に 1 を代入すると,

$$\ell\left(\frac{[S^{(abc)}]_{\mathbf{n}}}{(\xi^{abc}, \eta^{abc}, \varphi) [S^{(abc)}]_{\mathbf{n}}}\right) = \ell\left(\frac{S^{(abc)}}{(\xi^{abc}, \eta^{abc}, \varphi) S^{abc}}\right) = \ell(1)d_1d_2u$$

となる。 $\ell(1)$ を求める。 $P\left(\frac{S^{(abc)}}{(\xi^{abc}, \eta^{abc}, \varphi)}, t\right)$ を求めた議論と同様にして,

$$P\left(\frac{S^{(abc)}}{(X^{bc}, Y^{ac}, Z^{ab})}, t\right) = \frac{\ell(t)(1 - t)^3}{(1 - t)^3}$$

が成立し, $\frac{S^{(abc)}}{(X^{bc}, Y^{ac}, Z^{ab})}$ は次数付き Artin 局所環であるので,

$$\begin{aligned} \ell(1) &= \ell\left(\frac{[S^{(abc)}]_{\mathbf{n}}}{(X^{bc}, Y^{ac}, Z^{ab})}\right) \\ &= e_{(X^{bc}, Y^{ac}, Z^{ab})}\left([S^{(abc)}]_{\mathbf{n}}\right) \\ &= \frac{1}{abc} \cdot e_{(X^{bc}, Y^{ac}, Z^{ab})}(S_{\mathbf{m}}) \\ &= \frac{1}{abc} \cdot \ell\left(\frac{S_{\mathbf{m}}}{(X^{bc}, Y^{ac}, Z^{ab})}\right) \\ &= abc \cdot \ell\left(\frac{S_{\mathbf{m}}}{(X, Y, Z)}\right) \\ &= abc \end{aligned}$$

である。したがって,

$$\ell\left(\frac{[S^{(abc)}]_{\mathbf{n}}}{(\xi^{abc}, \eta^{abc}, \varphi)}\right) = abc \cdot d_1d_2u$$

を得る。故に

$$abc \cdot d_1 d_2 u \geq u(abc)^2 r_1 r_2$$

が従う。

証明終

定理 2.9 より、直ちに次の系を得る。

系 2.10 $\xi \in [\mathfrak{p}^{(r)}]_d$ ($r > 0$) を, $\frac{d}{r} < \sqrt{abc}$ であるような 0 でない既約多項式とする。このとき, 0 でない斉次多項式 $\eta \in [\mathfrak{p}^{(r_1)}]_{d_1}$ ($r_1 > 0$) に対し, $\frac{d_1}{r_1} < \frac{r}{d} abc$ を満たせば, η は ξ で割り切れる。特に, $\frac{d_1}{r_1} < \sqrt{abc}$ ならば η は ξ で割り切れる。

命題 2.11 $\xi \in [\mathfrak{p}^{(r)}]_d$ ($r > 0$) を, $\frac{d}{r} < \sqrt{abc}$ であるような 0 でない既約多項式としたとき, $\xi \notin \mathfrak{p}^{(r+1)}$ が成り立つ。

証明 K の標数が 0 である場合を示す。 $\xi \in \mathfrak{p}^{(r+1)}$ を仮定する。このとき, $\frac{\partial \xi}{\partial X}, \frac{\partial \xi}{\partial Y}, \frac{\partial \xi}{\partial Z}$ は全て $\mathfrak{p}^{(r)}$ に入る。 K の標数は 0 であるので, $\frac{\partial \xi}{\partial X}, \frac{\partial \xi}{\partial Y}, \frac{\partial \xi}{\partial Z}$ の少なくとも 1 つは 0 でない*3。 $\frac{\partial \xi}{\partial X} \neq 0$ として構わない。このとき, $\frac{\partial \xi}{\partial X} \in [\mathfrak{p}^{(r)}]_{d-a}$ である。 $\frac{d-a}{r} < \frac{d}{r} < \sqrt{abc}$ であるので, 系 2.10 より $\frac{\partial \xi}{\partial X} \in (\xi)$ となる。しかし, $\deg \frac{\partial \xi}{\partial X} < \deg \xi$ であるので矛盾。したがって, $\xi \notin \mathfrak{p}^{(r+1)}$ が成り立つ。

証明終

定義 2.12 $\frac{d}{r} < \sqrt{abc}$ を満たす自然数 r, d と, $\mathfrak{p}^{(r)}$ の中に 0 でない d 次の既約斉次式 ξ が存在するとき, ξ を negative curve という。

系 2.10 と命題 2.11 より, negative curve が存在すれば, r と d は一意的に決まり, negative curve は単元倍を除いて一意的に決まる。

命題 2.13 $\xi \in [\mathfrak{p}^{(r)}]_d$ を negative curve とする。このとき, 0 でない任意の斉次多項式 $\eta \in [\mathfrak{p}^{(r_1)}]_{d_1}$ に対し, $\frac{d_1}{d} \geq \frac{r_1}{r}$ が成り立つ。特に $r_1 > 0$ ならば, $\frac{d_1}{r_1} \geq \frac{d}{r}$ である。

証明 $\frac{d_1}{d} < \frac{r_1}{r}$ であり, $[\mathfrak{p}^{(r_1)}]_{d_1}$ の中に 0 でない斉次多項式 η があるような r_1, d_1 が存在したと仮定する。そのような d_1 を最小にとる。この η に対して, r_1 を出来るだけ大きくとり, $\eta \notin \mathfrak{p}^{(r_1+1)}$ として良い。系 2.10 より $\eta \in (\xi)$ である (特に, $r_1 \geq r, d_1 \geq d$ で

*3 K の標数が正の時も, ξ の係数は素体から取れることを示すことで, 命題 2.11 を示すことができる。

ある). よって, 斉次多項式 φ が存在して, $\eta = \xi\varphi$ と表せる. 命題 2.11 より $\xi \notin \mathfrak{p}^{(r+1)}$ であるので, 命題 2.6 より $\varphi \in [\mathfrak{p}^{(r_1-r)}]_{d_1-d}$ が成立する. しかし, $\frac{d_1-d}{d} < \frac{r_1-r}{r}$ であるので, d_1 の最小性に反する. 証明終

2.2 条件 EU

この節では, $\mu(\mathfrak{p}) = 3$ を仮定する.
 $\frac{Y^{t_1}Z^{u_1}}{X^s}, \frac{X^{s_2}Z^{u_2}}{Y^t}, \frac{X^{s_3}Y^{t_3}}{Z^u}$ のいずれか 2 つを選び, それを v, w とおく. 残りの 1 つは $v^{-1}w^{-1}$ と表される. このとき,

$$S[X^{-1}, Y^{-1}, Z^{-1}]_0 = K[v^{\pm 1}, w^{\pm 1}]$$

が成立する.

命題 2.14 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し,

$$\mathfrak{p}^{(n)}S[X^{-1}, Y^{-1}, Z^{-1}] = (v-1, w-1)^n S[X^{-1}, Y^{-1}, Z^{-1}]$$

となる.

証明 最初に $n = 1$ の場合, すなわち

$$\mathfrak{p}S[X^{-1}, Y^{-1}, Z^{-1}] = (v-1, w-1)S[X^{-1}, Y^{-1}, Z^{-1}] \quad (2.3)$$

を示す.

$$\begin{aligned} \mathfrak{p}S[X^{-1}, Y^{-1}, Z^{-1}] &= \left(\frac{f}{X^s}, \frac{g}{Y^t}, \frac{h}{Z^u} \right) S[X^{-1}, Y^{-1}, Z^{-1}] \\ &= (v-1, w-1, v^{-1}w^{-1}-1)S[X^{-1}, Y^{-1}, Z^{-1}] \end{aligned}$$

かつ,

$$v^{-1}w^{-1}-1 = v^{-1}w^{-1}(1-v) + w^{-1}(1-w) \in (v-1, w-1)S[X^{-1}, Y^{-1}, Z^{-1}]$$

であるので (2.3) が成立している.

一般の n に対し, (2.3) より

$$\mathfrak{p}^n S[X^{-1}, Y^{-1}, Z^{-1}] = (v-1, w-1)^n S[X^{-1}, Y^{-1}, Z^{-1}] \quad (2.4)$$

であるので $\mathfrak{p}^{(n)} \subset (v-1, w-1)^n S[X^{-1}, Y^{-1}, Z^{-1}]$ を示せば良い. $S[X^{-1}, Y^{-1}, Z^{-1}]_0 = K[v^{\pm 1}, w^{\pm 1}]$ であるので,

$$S[X^{-1}, Y^{-1}, Z^{-1}]_0 / (v-1, w-1) \simeq K$$

であり, よって $(v-1, w-1)S[X^{-1}, Y^{-1}, Z^{-1}]_0$ は $S[X^{-1}, Y^{-1}, Z^{-1}]$ のイデアルとして極大である. したがって, 任意の m に対し, $(v-1, w-1)^m S[X^{-1}, Y^{-1}, Z^{-1}]_0$ は準素イデアルである.

$$I = (v-1, w-1)S[X^{-1}, Y^{-1}, Z^{-1}]$$

$$I_0 = (v-1, w-1)S[X^{-1}, Y^{-1}, Z^{-1}]_0$$

とおく. $\xi \in \mathfrak{p}^{(n)}$ を斉次元とすると, $\xi\mu \in \mathfrak{p}^n$ となるような斉次元 $\mu \in S \setminus \mathfrak{p}$ が存在する. 適当に整数 α, β, γ と α', β', γ' をとり,

$$\xi X^\alpha Y^\beta Z^\gamma, \mu X^{\alpha'} Y^{\beta'} Z^{\gamma'}$$

の次数をそれぞれ 0 とする. (2.4) より, $\xi\mu \in \mathfrak{p}^n \subset I^n$ であるので,

$$(\xi X^\alpha Y^\beta Z^\gamma)(\mu X^{\alpha'} Y^{\beta'} Z^{\gamma'}) \in I_0^n$$

である. ここで, $\mu X^{\alpha'} Y^{\beta'} Z^{\gamma'} \notin I_0$ に注意する. I_0^n は準素イデアルであるので, $\xi X^\alpha Y^\beta Z^\gamma \in I_0^n$ が成立する. したがって, $\xi \in I^n$ であり, 命題 2.5 より, $\mathfrak{p}^{(n)}$ は斉次イデアルであるので, $\mathfrak{p}^{(n)} \subset I^n$ が示された. 証明終

命題 2.14 より,

$$\mathfrak{p}^{(n)} = (v-1, w-1)^n S[X^{-1}, Y^{-1}, Z^{-1}] \cap S$$

が成立する. また, p, q, r を, $ap + bq + cr = d$ を満たすような整数とし,

$$\{(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2 \mid X^p Y^q Z^r v^\alpha w^\beta \text{ の } X, Y, Z \text{ の指数は全て } 0 \text{ 以上}\}$$

を V とおく, このとき,

$$[\mathfrak{p}^{(n)}]_d = X^p Y^q Z^r \left\{ \left(\bigoplus_{(\alpha, \beta) \in V} K v^\alpha w^\beta \right) \cap (v-1, w-1)^n K[v^{\pm 1}, w^{\pm 1}] \right\}$$

が成り立つ.

命題 2.15 n を自然数, $\varphi(v, w)$ を $K[v^{\pm 1}, w^{\pm 1}]$ の元とする. 次は同値である.

1) $\varphi(v, w) \in (v-1, w-1)^n K[v^{\pm 1}, w^{\pm 1}]$.

2) $k+l < n$ を満たす全ての $k, l \in \mathbb{N}_0$ に対し, $\frac{\partial^{k+l}\varphi}{\partial v^k \partial w^l}(1, 1) = 0$.

証明 $\varphi(v, w) \in (v-1, w-1)^n$ ならば, $\varphi(v, w)$ は $(v-1)^k(w-1)^l$ ($k+l = n$) の $K[v^{\pm 1}, w^{\pm 1}]$ 線形結合として表せるので, 1) $\implies$ 2) が従う.

2) $\implies$ 1) を示す. $\varphi(v, w) \notin (v-1, w-1)^n$ を仮定し, $\varphi(v, w) \in (v-1, w-1)^m$ であるような非負整数 m を最大にとると, $\varphi(v, w)$ は $(v-1)^k(w-1)^l$ ($k+l = m$) の $K[v^{\pm 1}, w^{\pm 1}]$ 線形結合として表せる.

$$\varphi(v, w) = \sum_{\substack{k+l=m \\ k, l \geq 0}} \varphi_{k,l} (v-1)^k (w-1)^l$$

とおく (ただし $\varphi_{k,l} \in K[v^{\pm 1}, w^{\pm 1}]$). m の最大性より, ある (k_0, l_0) があって,

$$\varphi_{k_0, l_0}(v, w) \notin (v-1, w-1)$$

である. このとき $\frac{\partial^m \varphi}{\partial v^{k_0} \partial w^{l_0}}(1, 1) \neq 0$ であることが確かめられる.

証明終

補題 2.16 n を自然数とし, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ を相異なる整数とする. $i = 1, 2, \dots, n$ に対し, 整数 $\beta_{i,1}, \beta_{i,2}, \dots, \beta_{i,i}$ は

$$\beta_{i,1} < \beta_{i,2} < \dots < \beta_{i,i}$$

を満たすと仮定する.

$$U = \bigcup_{i=1}^n \{(\alpha_i, \beta_{i,1}), \dots, (\alpha_i, \beta_{i,i})\}$$

とおく. このとき,

$$\left(\bigoplus_{(\alpha, \beta) \in U} K v^\alpha w^\beta \right) \cap (v-1, w-1)^n K[v^{\pm 1}, w^{\pm 1}] = 0$$

である.

証明 ([2], [8], [9] も参照) $n = 1$ のときは明らか. $n \geq 2$ のとき,

$$\varphi(v, w) \in \left(\bigoplus_{(\alpha, \beta) \in U} K v^\alpha w^\beta \right) \cap (v-1, w-1)^n K[v^{\pm 1}, w^{\pm 1}]$$

に対し, $v^{-\alpha_n}\varphi$ を考えることで, $\alpha_n = 0$ の場合を示せば良い. 命題 2.15 より, $\frac{\partial\varphi}{\partial v}(v, w) \in (v-1, w-1)^{n-1}$ であるので, 帰納法より $\frac{\partial\varphi}{\partial v}(v, w) = 0$ である. よって φ は

$$\varphi(v, w) = \sum_{j=1}^n C_j w^{\beta_{n,j}}$$

と表せる (ここで, $C_j \in K$). $\varphi \in (v-1, w-1)^n K[v^{\pm 1}, w^{\pm 1}]$ であるので,

$$\frac{\partial^j \varphi}{\partial w^j}(1, 1) = 0 \quad (0 \leq j < n)$$

である. 各 $0 \leq j < n$ に対し,

$$\frac{\partial^j \varphi}{\partial w^j}(v, w) = \sum_{k=1}^n C_k w^{\beta_{n,k}-j} (\beta_{n,k} - j + 1)(\beta_{n,k} - j + 2) \cdots \beta_{n,k}$$

であるので, それに $(1, 1)$ を代入して C_k に関する連立方程式

$$\sum_{k=1}^n C_k (\beta_{n,k} - j + 1)(\beta_{n,k} - j + 2) \cdots \beta_{n,k} = 0$$

を得る. 変形すると,

$$\sum_{k=1}^n C_k \beta_{n,k}^{j-1} = 0$$

すなわち,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \beta_{n,1} & \beta_{n,2} & \cdots & \beta_{n,n} \\ \beta_{n,1}^2 & \beta_{n,2}^2 & \cdots & \beta_{n,n}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{n,1}^{n-1} & \beta_{n,2}^{n-1} & \cdots & \beta_{n,n}^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix} = 0$$

となる. 係数行列はファンデルモンド型であるので, 正則行列になる. よって, $C_1 = C_2 = \cdots = C_n = 0$ が成り立つ. したがって, $\varphi(v, w) = 0$ である. 証明終

定義 2.17 $T \subset \mathbb{R}^2$ とする. $(0, 0) \in T$ であり, 相異なる整数 $a_1, \dots, a_n$ が存在し, 各 $1 \leq i \leq n$ に対し,

$$\# \left[(T \setminus \{(0, 0)\}) \cap \{(a_i, y) \mid y \in \mathbb{Z}\} \right] \geq i$$

となるとき, T は n -EU を満足するという.

補題 2.18 $T \subset \mathbb{R}^2$ とする. $\#(T \cap \mathbb{Z}^2) > \frac{1}{2}n(n+1)$ ならば,

$$(v-1, w-1)^n K[v^{\pm 1}, w^{\pm 1}] \cap \left(\bigoplus_{(\alpha, \beta) \in T \cap \mathbb{Z}^2} K v^\alpha w^\beta \right)$$

の中に 0 でない元が存在する.

証明

$$\varphi(v, w) \in (v-1, w-1)^n K[v^{\pm 1}, w^{\pm 1}] \cap \left(\bigoplus_{(\alpha, \beta) \in T \cap \mathbb{Z}^2} K v^\alpha w^\beta \right)$$

とし, $\varphi(v, w) = \sum_{(\alpha, \beta) \in T \cap \mathbb{Z}^2} C_{(\alpha, \beta)} v^\alpha w^\beta$ ($C_{(\alpha, \beta)} \in K$) とおくと,

$$\frac{\partial^{i+j} \varphi}{\partial v^i \partial w^j}(1, 1) = 0 \quad (i+j < n)$$

であるので, $C_{(\alpha, \beta)}$ を未知数とする線型方程式を与える. 未知数の個数は方程式の個数よりも大きいので, $\left(\bigoplus_{(\alpha, \beta) \in T \cap \mathbb{Z}^2} K v^\alpha w^\beta \right) \cap (v-1, w-1)^n K[v^{\pm 1}, w^{\pm 1}]$ の中に 0 でない元が存在することがわかる. 証明終

定理 2.19 (海老名 [2], 内澤 [9]) $T \subset \mathbb{R}^2$ が n -EU を満足するならば,

$$(v-1, w-1)^n K[v^{\pm 1}, w^{\pm 1}] \cap \left(\bigoplus_{(\alpha, \beta) \in T \cap \mathbb{Z}^2} K v^\alpha w^\beta \right)$$

に定数項が 0 でない元が存在する.

証明 仮定より, T は条件 EU を満足しているので, 補題 2.16 の仮定を満たすような U が, $T \setminus \{(0, 0)\}$ の中に取れる. $U' = U \cup \{(0, 0)\}$ とおく. $\#U' = \frac{1}{2}n(n+1) + 1$ であるので, 補題 2.18 より, 0 でない元

$$\psi(v, w) \in \left(\bigoplus_{(\alpha, \beta) \in U'} K v^\alpha w^\beta \right) \cap (v-1, w-1)^n K[v^{\pm 1}, w^{\pm 1}]$$

が取れる. ψ の定数項が 0 であると仮定すると, 補題 2.16 より,

$$\psi(v, w) \in \left(\bigoplus_{(\alpha, \beta) \in U} K v^\alpha w^\beta \right) \cap (v-1, w-1)^n K[v^{\pm 1}, w^{\pm 1}] = 0$$

であるので矛盾. したがって, ψ の定数項は 0 でない. 証明終

2.3 Cohen-Macaulay 性

この節では、定理 1.2 を証明するための準備を行う。

$\mu(\mathfrak{p}) = 2$ の場合、 $\mathfrak{p} = (\varphi, \psi)$ を満たす斉次元が存在する。このとき、 φ, ψ は正則列となるので、 $\mathfrak{p}^{(n)} = \mathfrak{p}^n$ であり、 $R_s(\mathfrak{p}) = S[\varphi T, \psi T] \simeq S[T_1, T_2]/(\psi T_1 - \varphi T_2)$ が成立する（ただし、 T_1, T_2 は不定元）。 $\psi T_1 - \varphi T_2$ は $S[T_1, T_2]$ 正則であるので、 $R_s(\mathfrak{p})$ は Cohen-Macaulay 環である。よって $R_s(\mathfrak{p})$ が Cohen-Macaulay 環であることを示す際には、 $\mu(\mathfrak{p}) = 3$ のときのみ着目すれば十分である。

命題 2.20 次が成立する。

$$\ell_S\left(\frac{S}{(\mathfrak{p}, X)}\right) = a = tu - t_3u_2 \quad (2.5)$$

$$\ell_S\left(\frac{S}{(\mathfrak{p}, Y)}\right) = b = su - s_3u_1 \quad (2.6)$$

$$\ell_S\left(\frac{S}{(\mathfrak{p}, Z)}\right) = c = st - s_2t_1 \quad (2.7)$$

証明 (2.5) を示す。(2.6), (2.7) も同様にして証明できる。

Step1 $\ell_S\left(\frac{S}{(\mathfrak{p}, X)}\right) = tu - t_3u_2$ を示す。

$$(\mathfrak{p}, X) = (X, Y^t, Z^u, Y^{t_1}Z^{u_1})$$

であるので、

$$\frac{S}{(\mathfrak{p}, X)} = \frac{K[Y, Z]}{(Y^t, Z^u, Y^{t_1}Z^{u_1})}$$

である。よって、

$$\ell_S\left(\frac{S}{(\mathfrak{p}, X)}\right) = \dim_K\left(\frac{K[Y, Z]}{(Y^t, Z^u, Y^{t_1}Z^{u_1})}\right)$$

である。 K ベクトル空間としての $\frac{K[Y, Z]}{(Y^t, Z^u, Y^{t_1}Z^{u_1})}$ の基底は、 $0 \leq \beta < t, 0 \leq \gamma < u, \beta < t_1$ または $\gamma < u_1$ の 3 つの条件を全て満たすような $Y^\beta Z^\gamma$ の集合であるので、その個数は

$$tu - (t - t_1)(u - u_1) = tu - t_3u_2$$

である。よって $\ell_S\left(\frac{S}{(\mathfrak{p}, X)}\right) = tu - t_3u_2$ が従う。

Step2 $\ell_S\left(\frac{S}{(\mathfrak{p}, X)}\right) = a$ を示す. $\mathfrak{m}$ を X, Y, Z で生成された S の極大イデアルとし, $A = S_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{p}S_{\mathfrak{m}}$ とおくと, $\dim A = 1$ であり, X は A の正則元である. よって, A は Cohen-Macaulay 環で,

$$\ell_S\left(\frac{S}{(\mathfrak{p}, X)}\right) = \ell_{S_{\mathfrak{m}}}\left(\frac{S_{\mathfrak{m}}}{(\mathfrak{p}, X)_{\mathfrak{m}}}\right) = \ell_A\left(\frac{A}{XA}\right) = e_X(A)$$

が成立する. $\mathfrak{p}$ の定義より, $S/\mathfrak{p}$ は $K[T^a, T^b, T^c]$ と同型であり, その同型写像での X, Y, Z の像はそれぞれ T^a, T^b, T^c であるので,

$$A \simeq K[T^a, T^b, T^c]_{(T^a, T^b, T^c)}$$

となる. よって,

$$e_{(X)}(A) = e_{(T^a)}(K[T^a, T^b, T^c]_{(T^a, T^b, T^c)})$$

が成立. さらに, a, b, c は互いに素であるので, $\text{rank}_{K[T^a, T^b, T^c]_{(T^a, T^b, T^c)}} K[T]_{(T)} = 1$ であり,

$$e_{(T^a)}(K[T^a, T^b, T^c]_{(T^a, T^b, T^c)}) = e_{(T^a)}(K[T]_{(T)}) = \ell\left(\frac{K[T]_{(T)}}{T^a}\right) = a$$

を得る.

証明終

注意 2.21 命題 2.20 より, 次のことがわかる. a, b, c は互いに素であるので, $s = s_2 + s_3$ であることと, (2.6), (2.7) より, s, s_2, s_3 は 2 つずつが互いに素である. 同様にして, t, t_1, t_3 は 2 つずつが互いに素であり, u, u_1, u_2 は 2 つずつが互いに素である.

次に, Goto-Nishida-Shimoda [4] の結果を述べる.

定理 2.22 (Goto-Nishida-Shimoda) $R_s(\mathfrak{p})$ は Noether 環で, $\mu(\mathfrak{p}) = 3$ であると仮定する. 斉次多項式 $\varphi \in \mathfrak{p}^{(n)}$, $\psi \in \mathfrak{p}^{(m)}$ が Huneke の判定法^{*4} を満たしているとする. このとき, 次は同値である.

1) $R_s(\mathfrak{p})$ は Cohen-Macaulay 環.

^{*4} ある $x \in (X, Y, Z) \setminus \mathfrak{p}$ が存在して,

$$\ell\left(\frac{S}{(x, \varphi, \psi)}\right) = nm\ell\left(\frac{S}{(x, \mathfrak{p})}\right)$$

となるとき, $\varphi \in \mathfrak{p}^{(n)}$, $\psi \in \mathfrak{p}^{(m)}$ は Huneke の判定法を満たすという. Huneke の判定法を満たすような φ, ψ が存在することと, $R_s(\mathfrak{p})$ が Noether 環であることは同値である. [7]

- 2) 任意の $1 \leq \ell \leq n + m - 2$ に対し, $S/(\mathfrak{p}^{(\ell)}, \varphi)$ は Cohen-Macaulay 環.
 2') 任意の $1 \leq \ell \leq n + m - 2$ に対し, $S/(\mathfrak{p}^{(\ell)}, \psi)$ は Cohen-Macaulay 環.

次の定理は, 定理 1.2 の仮定の下で, Huneke の判定法をより精密にしたものである.

定理 2.23 (Kurano-Nishida [8]) $\mu(\mathfrak{p}) = 3$ であり, $\xi = X^s - Y^{t_1} Z^{u_1} \in \mathfrak{p}$ が negative curve であると仮定する. このとき, 次は同値である.

- 1) $R_s(\mathfrak{p})$ は Noether 環.
 2) $\mathfrak{p}^{(s)}$ の中に 0 でない斉次元 η が存在し,

$$\ell\left(\frac{S}{(Y, \xi, \eta)}\right) = \ell\left(\frac{S}{(\mathfrak{p}, Y)}\right) \cdot s = bs$$

である.

- 2') $\mathfrak{p}^{(s)}$ の中に 0 でない斉次元 η が存在し,

$$\ell\left(\frac{S}{(Z, \xi, \eta)}\right) = \ell\left(\frac{S}{(\mathfrak{p}, Z)}\right) \cdot s = cs$$

である.

補題 2.24 ℓ を自然数とし, $\xi \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{p}^{(2)}$ とする. このとき,

$$\ell\left(\frac{S}{(X, \xi, \mathfrak{p}^{(\ell)})}\right) \geq \ell a \quad (2.8)$$

$$\ell\left(\frac{S}{(Y, \xi, \mathfrak{p}^{(\ell)})}\right) \geq \ell b \quad (2.9)$$

$$\ell\left(\frac{S}{(Z, \xi, \mathfrak{p}^{(\ell)})}\right) \geq \ell c \quad (2.10)$$

が成立する. さらに, $\frac{S}{(\xi, \mathfrak{p}^{(\ell)})}$ が Cohen-Macaulay 環であることと, (2.8), (2.9), (2.10) のいずれかの等号が成立することと, 3 つ全てが等号であることは同値である.

証明 (2.8) を示す. (2.9), (2.10) も同様にして証明できる. $A = \frac{S}{(\xi, \mathfrak{p}^{(\ell)})}$ とおく. $A/(\overline{X})$ は次数付き Artin 局所環であるので, $\mathfrak{m} = (X, Y, Z)S$ とおくと,

$$\ell\left(\frac{A}{(\overline{X})}\right) = \ell_{A_{\mathfrak{m}}}\left(\frac{A_{\mathfrak{m}}}{(\overline{X})}\right)$$

である．一般的に，

$$\ell_{A_{\mathfrak{m}}} \left(\frac{A_{\mathfrak{m}}}{(\overline{X})} \right) \geq e_{(\overline{X})}(A_{\mathfrak{m}}) \quad (2.11)$$

が成立しており， $\text{Ass}(A_{\mathfrak{m}}) = \{\mathfrak{p}\}$ であるので，

$$e_{(\overline{X})}(A_{\mathfrak{m}}) = \ell(A_{\mathfrak{p}}) \cdot e_{(\overline{X})} \left(\frac{A_{\mathfrak{m}}}{\mathfrak{p}A_{\mathfrak{m}}} \right)$$

が成り立つ．上式の右辺において，

$$\begin{aligned} e_{(\overline{X})} \left(\frac{A_{\mathfrak{m}}}{\mathfrak{p}A_{\mathfrak{m}}} \right) &= e_{(T^a)}(K[T^a, T^b, T^c]_{(T^a, T^b, T^c)}) \\ &= e_{(T^a)}(K[T]_{(T)}) \\ &= \ell \left(\frac{K[T]_{(T)}}{(T^a)} \right) \\ &= a \end{aligned}$$

であり，また， $(S/(\xi))_{\overline{\mathfrak{p}}}$ は 1 次元正則局所環であるので，

$$\ell(A_{\mathfrak{p}}) = \ell \left(\frac{S_{\mathfrak{p}}}{(\xi, \mathfrak{p}^{(\ell)})S_{\mathfrak{p}}} \right) = \ell \left(\frac{(S/(\xi))_{\overline{\mathfrak{p}}}}{\overline{\mathfrak{p}}^{\ell}(S/(\xi))_{\overline{\mathfrak{p}}}} \right) = \ell$$

である．したがって，前半の主張が示された．

さらに， A が Cohen-Macaulay 環であることと， $A_{\mathfrak{m}}$ が Cohen-Macaulay 環であることは同値であり，それは (2.11) で等号が成立することと同値なので，後半の主張も従う． 証明終

次の定理が成り立つ．第 4 章では，この定理を用いて Cohen-Macaulay 性を示す．

定理 2.25 $R_s(\mathfrak{p})$ は Noether 環で， $\mu(\mathfrak{p}) = 3$ であると仮定する． $\xi = X^s - Y^{t_1}Z^{u_1} \in \mathfrak{p}$ が negative curve であるとする．このとき，次は同値である．

- 1) $R_s(\mathfrak{p})$ は Cohen-Macaulay 環.
- 2) $S/\mathfrak{p}^{(\ell)} + (\xi)$ ($\ell = 1, 2, \dots, s-1$) は Cohen-Macaulay 環.
- 3) $\ell_S \left(\frac{S}{\mathfrak{p}^{(\ell)} + (\xi, X)} \right) = \ell a$ ($\ell = 1, 2, \dots, s-1$).
- 3') $\ell_S \left(\frac{S}{\mathfrak{p}^{(\ell)} + (\xi, Y)} \right) = \ell b$ ($\ell = 1, 2, \dots, s-1$).
- 3'') $\ell_S \left(\frac{S}{\mathfrak{p}^{(\ell)} + (\xi, Z)} \right) = \ell c$ ($\ell = 1, 2, \dots, s-1$).

証明 1) $\iff$ 2) は定理 2.22 と定理 2.23 による. また, 補題 2.24 より, 2) $\iff$ 3), 2) $\iff$ 3'), 2) $\iff$ 3') が従う. 証明終

2.4 CRS

定義 2.26 ある r_1, d_1 があって, $\mathfrak{p}^{(r_1)}$ の中に 0 でない次数 d_1 の斉次元が存在し,

$$\frac{d_1}{r_1} < a + b + c$$

を満たすとき, $-K$ は big であるという^{*5}.

注意 2.27 $\xi \in [\mathfrak{p}^{(r)}]_d$ を negative curve とする. このとき, 命題 2.13 より

$$-K \text{ は big } \iff \frac{d}{r} < a + b + c$$

が成立する.

次の定理が成立している. 証明は省略する.

定理 2.28 (Cutcosky [1]) $-K$ が big ならば, $R_s(\mathfrak{p})$ は Noether 環である.

次の命題は, 命題 2.2 より直ちに従う.

命題 2.29 $\mu(\mathfrak{p}) = 2$ ならば, $-K$ は big である.

定義 2.30 $\xi \in [\mathfrak{p}^{(r)}]_d$ を negative curve とする. このとき, 任意の $n \in \mathbb{N}_0$ に対し,

$$\left[\mathfrak{p}^{(rn-1)} \right]_{nd-a-b-c} = 0$$

であるとき^{*6}, negative curve が有理特異点に縮約できるという. この論文では, negative curve が有理特異点に縮約できるとき, negative curve は CRS であるということにする.^{*7}

^{*5} $\text{Proj}(S)$ を点 $V_+(\mathfrak{p})$ で blow-up させた多様体を X とする. 反標準因子 $-K_X$ が big になる必要十分条件が, この定義 2.26 の条件である.

^{*6} ただし, $r \leq 0$ に対し, $\mathfrak{p}^{(r)} = S$ とし, $m < 0$ のとき,

$$\left[\mathfrak{p}^{(r)} \right]_m = 0 \quad (\forall r)$$

と定義する.

^{*7} 有理特異点は rational singularity, 縮約は contract なので, (一般的な名称ではないが) ここでは CRS(contract to rational singularity) と呼ぶことにする.

次のことが知られている．証明は省略する．

定理 2.31 (Cutkosky [1]) negative curve が存在し, negative curve は CRS とする．
このとき, $R_s(\mathfrak{p})$ は Noether 環である．

命題 2.32 $\xi \in [\mathfrak{p}^{(r)}]_d$ を negative curve とする．

- 1) $-K$ が big ならば, negative curve は CRS である．
- 2) $-K$ が big でないとき, negative curve が CRS である必要十分条件は,

$$n_0d - a - b - c \geq \frac{rabc}{d}(rn_0 - 1)$$

となる最大の $n_0 \in \mathbb{N}_0$ に対し, $[\mathfrak{p}^{(rn_0-1)}]_{n_0d-a-b-c} = 0$ となることである．

証明 1) を示す． $-K$ が big であると仮定する． $rn \leq 1$ のとき, $nd - a - b - c < 0$ であるので, $[\mathfrak{p}^{(rn-1)}]_{nd-a-b-c} = 0$ である． $rn \geq 2$ のとき,

$$\frac{nd - a - b - c}{rn - 1} < \frac{d}{r}$$

であるので, 命題 2.13 より $[\mathfrak{p}^{(rn-1)}]_{nd-a-b-c} = 0$ が成立している．

2) を示す． $n \leq n_0$ ならば, $x \mapsto \xi^{n_0-n}x$ によって定まる単射 $[\mathfrak{p}^{(rn-1)}]_{nd-a-b-c} \longrightarrow [\mathfrak{p}^{(rn_0-1)}]_{n_0d-a-b-c}$ が存在するので, $[\mathfrak{p}^{(rn-1)}]_{nd-a-b-c} = 0$ である． $n > n_0$ とする．
 $\varphi \in [\mathfrak{p}^{(rn-1)}]_{nd-a-b-c}$ に対し, $nd - a - b - c < \frac{rabc}{d}(rn - 1)$ であるので,

$$\frac{\deg \varphi}{rn - 1} < \frac{r}{d}abc$$

である．よって, 系 2.10 より $\varphi \in (\xi)$ 成り立つ． $\varphi = \xi\psi$ とすると, 命題 2.11 より, $\xi \in \mathfrak{p}^{(n)} \setminus \mathfrak{p}^{(n+1)}$ であるので, 命題 2.6 より $\psi \in [\mathfrak{p}^{(r(n-1)-1)}]_{(n-1)d-a-b-c}$ である．
帰納法より, $[\mathfrak{p}^{(r(n-1)-1)}]_{(n-1)d-a-b-c} = 0$ であるので, $\varphi = 0$ が成立する．故に, $[\mathfrak{p}^{(rn-1)}]_{nd-a-b-c} = 0$ が従う． 証明終

次の定理の証明は省略する．

定理 2.33 (Cutkosky [1]) $R_s(\mathfrak{p})$ が Noether 環であり, $\sqrt{abc} \notin \mathbb{Z}$ ならば, negative curve が存在する．

系 2.34 $\min\{a, b, c\} = 5$ であると仮定する． $\mu(\mathfrak{p}) = 2$ ならば, negative curve が存在し, さらに, negative curve は CRS である．

証明 $\mu(\mathfrak{p}) = 2$ のとき, $-K$ は big であり, $R_s(\mathfrak{p})$ は Noether 環である. よって, 定理 2.33 より negative curve が存在する. 命題 2.32 より, negative curve は CRS である. 証明終

3 分類

以下, この章では a, b, c は 2 つずつが互いに素な自然数とし, $\min\{a, b, c\} = a = 5$ とする. この章では, $\mu(\mathfrak{p}) = 3$ である条件, f, g, h のどれかが negative curve になるための条件を求める. なお, $b \equiv 3c \pmod{5}$ の場合, b と c を入れ替えることで, $b \equiv 2c \pmod{5}$ の場合に帰着できる. よって, $b \equiv c \pmod{5}$, $b \equiv 2c \pmod{5}$, $b \equiv 4c \pmod{5}$ の場合を議論すればよい.

3.1 $b \equiv c \pmod{5}$ の場合

命題 2.3 より, $\mu(\mathfrak{p}) = 2$ である. したがって, $R_s(\mathfrak{p})$ は Cohen-Macaulay 環である. 系 2.34 により, negative curve が存在し, それは CRS である.

3.2 $b \equiv 2c \pmod{5}$ の場合

この場合, $c \equiv 3b \pmod{5}$ に注意する. 命題 2.3 より次が成立する.

補題 3.1 次は同値である.

- 1) $\frac{b}{2} < c < 3b$
- 2) $\mu(\mathfrak{p}) = 3$

以下, $\mu(\mathfrak{p}) = 3$ とする. f が negative curve であると仮定する. このとき, $\sqrt{5bc} > t_1b + u_1c$ より

$$\begin{aligned} 0 &> (t_1b + u_1c)^2 - 5bc \\ &= (t_1b - u_1c)^2 + (4t_1u_1 - 5)bc \end{aligned}$$

が成立する. よって $4t_1u_1 - 5 < 0$ で $t_1u_1 < \frac{5}{4}$ である. $\mu(\mathfrak{p}) = 3$ であるので $t_1 = u_1 = 1$ となる. すなわち $5s = b + c$ であるが, $b \equiv 2c \pmod{5}$ であるので矛盾. したがって f が negative curve であることは起こり得ない.

補題 3.2 $\deg g = 3b$ かつ $\deg h = 2c$.

証明 $\deg g = 3b$ であることを示す． $c \equiv 3b \pmod{5}$ であるので， $k = \frac{3b-c}{5}$ は整数であり， $c < 3b$ であるので k は自然数である．よって， $\deg g \leq 3b = 5k + c$ であり，すなわち $\deg g$ は $b, 2b, 3b$ のいずれかである． $\deg g = b$ は $\mu(\mathfrak{p}) = 3$ であるので起こり得ない． $\deg g = 2b$ であると仮定すると， $2b \equiv u_2 c \pmod{5}$ かつ $2b \equiv 4c \pmod{5}$ である． c と 5 は互いに素であるので， $u_2 \equiv 4 \pmod{5}$ である．よって $u_2 = 4$ であり， $2b > 4c$ となるが，これは $b < 2c$ であることに反する．したがって $\deg g = 3b$ である．

$\deg h = 2c$ であることを示す． $b \equiv 2c \pmod{5}$ であるので， $l = \frac{2c-b}{5}$ は整数であり， $2c > b$ であるので l は自然数である．よって， $\deg h \leq 2c = 5l + b$ である． $\deg h = c$ は $\mu(\mathfrak{p}) = 3$ であるので起こり得ない．したがって $\deg h = 2c$ である． 証明終

注意 3.3 $\deg g = 3b = 5s_2 + u_2 c$ ， $\deg h = 2c = 5s_3 + t_3 b$ とおくと $u_2 = 1$ ， $t_3 = 1$ である．したがって $\deg f$ ， $\deg g$ ， $\deg h$ の値は以下の通りになる．

$$\begin{cases} \deg f = 5s = 2b + c \\ \deg g = 3b = 5s_2 + c \\ \deg h = 2c = 5s_3 + b \end{cases}$$

よって，

$$\begin{aligned} b &= 2s_2 + s_3 \\ c &= s_2 + 3s_3 \end{aligned}$$

が成り立つ．

注意 3.4 negative curve の定義により， $\mu(\mathfrak{p}) = 3$ の仮定の下で g, h が negative curve であるための必要十分条件は以下の通りになる．

$$\begin{aligned} g \text{ が negative curve である} &\iff c > \frac{9}{5}b \\ h \text{ が negative curve である} &\iff c < \frac{5}{4}b \end{aligned}$$

3.3 $b \equiv 4c \pmod{5}$ の場合

このとき， $c \equiv 4c \pmod{5}$ であることに注意．命題 2.3 より次が成立する．

補題 3.5 次は同値である．

$$1) \quad \frac{b}{4} < c < 4b$$

2) $\mu(\mathfrak{p}) = 3$

以下, $\mu(\mathfrak{p}) = 3$ と仮定する. $c \equiv 4b \pmod{5}$ であるので, $k = \frac{4b-c}{5}$ とおくと, 補題 3.5 より k は自然数である. $\deg g$ の最小性より $\deg g \leq 4b = 5k + c$ であり, 更に $b + c \equiv 0 \pmod{5}$ なので, $\deg f = b + c$ が従う. したがって, $b \equiv 4c \pmod{5}$ のとき, $-K$ は big である.

故に, 次の 3 通りが考えられる.

$$(1) \begin{cases} \deg f = 5s = b + c \\ \deg g = 4b = 5s_2 + c \\ \deg h = 2c = 5s_3 + 3b \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} \deg f = 5s = b + c \\ \deg g = 3b = 5s_2 + 2c \\ \deg h = 3c = 5s_3 + 2b \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} \deg f = 5s = b + c \\ \deg g = 2b = 5s_2 + 3c \\ \deg h = 4c = 5s_3 + b \end{cases}$$

式の形を見れば, (1) が起こる必要十分条件は $\frac{3}{2}b < c < 4b$, (2) が起こる必要十分条件は $\frac{2}{3}b < c < \frac{3}{2}b$, (3) が起こる必要十分条件は $\frac{1}{4}b < c < \frac{2}{3}b$ であることがわかる. なお, (3) の場合, b と c を入れ替えることにより (1) に帰着できる^{*8} ので, シンボリック・リース環の CM 性や, negative curve が CRS であるかどうかを考えると, (1), (2) の場合のみ議論すれば良い.

注意 3.6 (1) のとき,

$$\begin{cases} b = 2s_2 + s_3 \\ c = 3s_2 + 4s_3 \end{cases}$$

(2) のとき,

$$\begin{cases} b = 3s_2 + 2s_3 \\ c = 2s_2 + 3s_3 \end{cases}$$

が成立する.

^{*8} (3) でそれぞれ f, h が negative curve のとき, b と c を入れ替えると (1) でそれぞれ f, g が negative curve である場合に帰着できる.

(1) のとき, $\frac{3}{2}b < c < 4b$ である. g が negative curve の場合, $4b < \sqrt{abc}$ より $\frac{16}{5}b < c < 4b$ となる. h が negative curve であると仮定すると, $2c < \sqrt{abc}$ より $c < \frac{5}{4}b$ であるので, $\frac{3}{2}b < c$ に反する. したがって h が negative curve であることは起こり得ない.

(1), (2), (3) で f が negative curve なら, $b + c < \sqrt{abc}$ より $0 > b^2 - 3bc + c^2$, すなわち,

$$\frac{3 - \sqrt{5}}{2}b < c < \frac{3 + \sqrt{5}}{2}b$$

となる. $\frac{3 - \sqrt{5}}{2} < \frac{2}{3}$ かつ $\frac{3}{2} < \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ であるので, (2) のときは常に f が negative curve になる.

よって, 次の命題 3.7, 3.8 が成立する.

命題 3.7 (1) となる必要十分条件は, $\frac{3}{2}b < c < 4b$ である. (1) のときは,

$$\begin{aligned} f \text{ が negative curve} &\iff \frac{3}{2}b < c < \frac{3 + \sqrt{5}}{2}b \\ g \text{ が negative curve} &\iff \frac{16}{5}b < c < 4b \\ h \text{ が negative curve であることは起こり得ない} \end{aligned}$$

が成立する.

命題 3.8 (2) となる必要十分条件は, $\frac{2}{3}b < c < \frac{3}{2}b$ である. (2) のときは, 必ず f が negative curve になる.

4 Cohen-Macaulay 性

この章では, 定理 1.2 の証明を行う. この章では常に $\text{Char}(K) = 0$, $a = \min\{a, b, c\} = 5$, $\mu(\mathfrak{p}) = 3$ であるとする.

4.1 $b \equiv 2c \pmod{5}$ の場合

4.1 では, $b \equiv 2c \pmod{5}$ を仮定する. 注意 3.3 より $t = 3$, $u = 2$, $t_1 = 2$, $t_3 = 1$, $u_1 = u_2 = 1$ である.

まず, h が negative curve であると仮定する. このとき,

$$(h, Y) + \mathfrak{p} = (Z^u, Y) + (X^s, X^{s-s_3} Z^{u-u_1})$$

であり,

$$\ell \left(\frac{S}{(h, Y) + \mathfrak{p}} \right) = \ell \left(\frac{K[X, Z]}{(Z^u, X^s, X^{s-s_3} Z^{u-u_1})} \right) = su - s_3 u_1 = b$$

となる. $u = 2$ であるので, 定理 2.25 の 3) の ℓ は 1 だけを考えれば良い. したがって, h が negative curve の場合, $R_s(\mathfrak{p})$ は Cohen-Macaulay 環である.

次に, g が negative curve である場合を議論する. このとき, 次の命題 4.1 より, $R_s(\mathfrak{p})$ は Cohen-Macaulay 環である.

命題 4.1 g が negative curve であると仮定する. このとき, 次が成立する.

1) 任意の $1 \leq \ell < t$ に対し,

$$(g, Z) + \mathfrak{p}^{(\ell)} = (Y^t, Z) + (X^{\ell s - (d_\ell + 1)s_2} Y^{(d_\ell + 1)t - \ell t_1}, X^{\ell s - d_\ell s_2})$$

が成立する. ただし, d_ℓ は $0 \leq (d_\ell + 1)t - \ell t_1 < t$ を満たす整数^{*9} である.

2) 任意の $1 \leq \ell < t$ に対し, $S/(g) + \mathfrak{p}^{(\ell)}$ は Cohen-Macaulay である.

証明 ^{*10} 任意の $1 \leq \ell < t$ に対し,

$$(Y^t, Z) + (X^{\ell s - (d_\ell + 1)s_2} Y^{(d_\ell + 1)t - \ell t_1}, X^{\ell s - d_\ell s_2}) \subset (g, Z) + \mathfrak{p}^{(\ell)} \quad (4.1)$$

が成り立つと仮定する. このとき,

$$\ell \left(\frac{S}{(Y^t, Z, X^{\ell s - (d_\ell + 1)s_2} Y^{(d_\ell + 1)t - \ell t_1}, X^{\ell s - d_\ell s_2})} \right) \geq \ell \left(\frac{S}{(g, Z) + \mathfrak{p}^{(\ell)}} \right)$$

であり,

$$\begin{aligned} & \ell \left(\frac{S}{(Y^t, Z, X^{\ell s - (d_\ell + 1)s_2} Y^{(d_\ell + 1)t - \ell t_1}, X^{\ell s - d_\ell s_2})} \right) \\ &= \ell \left(\frac{K[X, Y]}{(Y^t, X^{\ell s - (d_\ell + 1)s_2} Y^{(d_\ell + 1)t - \ell t_1}, X^{\ell s - d_\ell s_2})} \right) \\ &= \ell(st - s_2 t_1) = \ell c \end{aligned}$$

^{*9} このような d_ℓ は一意的に存在することがわかる. また, このとき $d_\ell + 1 \leq \ell$ であるので, $\ell s - (d_\ell + 1)s_2 \geq 0$ である.

^{*10} この証明の議論は他のケースでも有効であると思われるので, 具体的な数ではなく t, u, t_1, t_3, u_1, u_2 や d_ℓ という文字を用いる.

である。補題 2.24 より,

$$\ell \left(\frac{S}{(g, Z) + \mathfrak{p}^{(\ell)}} \right) \geq \ell c$$

であるので,

$$\ell \left(\frac{S}{(g, Z) + \mathfrak{p}^{(\ell)}} \right) = \ell c$$

となる。よって, 1) が成立し, 定理 2.25 より 2) が成立する。したがって, (4.1) を示せばよい。つまり,

$$X^{\ell s - (d_\ell + 1)s_2} Y^{(d_\ell + 1)t - \ell t_1}, X^{\ell s - d_\ell s_2} \in (g, Z) + \mathfrak{p}^{(\ell)}$$

を示せば十分である。

$\ell = 1$ のとき, $0 \leq (d_1 + 1)t - t_1 < t$ を満たすような d_1 は 0 である。さらに, $(g, Z) + \mathfrak{p} = (Y^t, Z) + (X^{s-s_2} Y^{t-t_1}, X^s)$ であるので, $\ell = 1$ の時は正しい。

$\ell = 2$ のとき, $0 \leq (d_2 + 1)t - 2t_1 < t$ を満たすような d_2 は 1 である。よって,

$$X^{\ell s - (d_\ell + 1)s_2} Y^{(d_\ell + 1)t - \ell t_1} = (X^{s-s_2} Y^{t-t_1})^2 \in (g, Z) + \mathfrak{p}^2$$

が従う。次に,

$$\eta(X) := X^{2s-s_2} \in (g, Z) + \mathfrak{p}^{(2)}$$

を示す。 v, w, Δ_2 を

$$v = \frac{Y^{t_1} Z^{u_1}}{X^s}, w = \frac{X^{s_2} Z^{u_2}}{Y^t}$$

$$\Delta_2 = \left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \left| \begin{array}{l} -s\alpha + s_2\beta + 2s - s_2 \geq 0 \\ t_1\alpha - t\beta \geq 0 \\ u_1\alpha + u_2\beta \geq 0 \end{array} \right. \right\}$$

と定義すると,

$$S_{\deg \eta(X)} = \eta(X) \left(\bigoplus_{(\alpha, \beta) \in \Delta_2 \cap \mathbb{Z}^2} K v^\alpha w^\beta \right)$$

を得る。さらに,

$$\Delta'_2 = \left\{ (\alpha, \beta) \in \Delta_2 \left| \begin{array}{l} t_1\alpha - t\beta \geq t \\ \text{あるいは} \\ u_1\alpha + u_2\beta \geq 1 \end{array} \right. \right\}$$

とおくと,

$$S_{\deg \eta(X)} \cap (g, Z)S = \eta(Z) \left(\bigoplus_{(\alpha, \beta) \in \Delta'_2 \cap \mathbb{Z}^2} K v^\alpha w^\beta \right) \quad (4.2)$$

である. Δ_2 は図 1 の三角形で囲まれた領域である^{*11}. 但し境界は含み, $\bullet$ は格子点である.

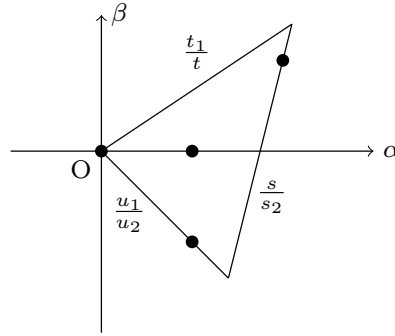


図 1: Δ_2

注意 3.3 と注意 3.4 より, g が negative curve であることと, $\frac{19}{6} < \frac{s}{s_2}$ であることは同値であるので, 図 1 より, Δ_2 は 2-EU を満足している. 定理 2.19 より,

$$\left(\bigoplus_{(\alpha, \beta) \in \Delta_2 \cap \mathbb{Z}^2} K v^\alpha w^\beta \right) \cap (v-1, w-1)^2 K[v^{\pm 1}, w^{\pm 1}]$$

内で定数項が 0 でないような $\varphi(v, w)$ が存在する. $\varphi(v, w)$ の定数項を 1 として構わない. $\Delta_2 \setminus \{(0, 0)\} \cap \mathbb{Z}^2 = \Delta'_2 \cap \mathbb{Z}^2$ であるので, $\varphi_1(v, w) = \varphi - 1$ とすると,

$$\varphi_1(v, w) \in \left(\bigoplus_{(\alpha, \beta) \in \Delta'_2 \cap \mathbb{Z}^2} K v^\alpha w^\beta \right)$$

が成立する. (4.2) より $\eta(X)\varphi_1(v, w) \in (g, Z)S$ であり, さらに $\eta(X)\varphi(v, w) \in S \cap (v-1, w-1)^2 S[X^{-1}, Y^{-1}, Z^{-1}] = \mathfrak{p}^{(2)}$ であるので, $\eta(X) \in \mathfrak{p}^{(2)} + (g, Z)S$ が従う. 証明終

4.2 $b \equiv 4c \pmod{5}$ の場合

4.2 では, $b \equiv 4c \pmod{5}$ を仮定する.

^{*11} この場合 $\frac{t_1}{t} = \frac{2}{3}$, $\frac{u_1}{u_2} = 1$ であり, 傾きが $\frac{s}{s_2}$ の線分は必ず $(\alpha, \beta) = (2, 1)$ を通る.

4.2.1 $b \equiv 4c \pmod{5}$: (1) の場合

命題 3.7 より, $t = 4$, $u = 2$, $t_1 = 1$, $t_3 = 3$, $u_1 = u_2 = 1$ である.

まず, f が negative curve の場合を考える. このとき, 次の命題 4.2 より, $R_s(\mathfrak{p})$ は Cohen-Macaulay 環である.

命題 4.2 f が negative curve であると仮定する. このとき, 次が成立する.

1) 任意の $1 \leq \ell < s$ に対し,

$$(f, Y) + \mathfrak{p}^{(\ell)} = (X^s, Y) + (X^{(d_\ell+1)s-\ell s_3} Z^{u\ell-u_1(d_\ell+1)}, Z^{u\ell-u_1 d_\ell}).$$

ただし, d_ℓ は $0 \leq (d_\ell + 1)s - \ell s_3 < s$ を満たす整数^{*12} である.

2) 任意の $1 \leq \ell < s$ に対し, $S/(f) + \mathfrak{p}^{(\ell)}$ は Cohen-Macaulay である.

証明 任意の $1 \leq \ell < s$ に対し,

$$(X^s, Y) + (X^{(d_\ell+1)s-\ell s_3} Z^{u\ell-u_1(d_\ell+1)}, Z^{u\ell-u_1 d_\ell}) \subset (f, Y) + \mathfrak{p}^{(\ell)} \quad (4.3)$$

が成り立つと仮定する. このとき,

$$\ell \left(\frac{S}{(X^s, Y, X^{(d_\ell+1)s-\ell s_3} Z^{u\ell-u_1(d_\ell+1)}, Z^{u\ell-u_1 d_\ell})} \right) \geq \ell \left(\frac{S}{(f, Y) + \mathfrak{p}^{(\ell)}} \right)$$

であり,

$$\begin{aligned} & \ell \left(\frac{S}{(X^s, Y, X^{(d_\ell+1)s-\ell s_3} Z^{u\ell-u_1(d_\ell+1)}, Z^{u\ell-u_1 d_\ell})} \right) \\ &= \ell \left(\frac{K[X, Z]}{(X^s, X^{(d_\ell+1)s-\ell s_3} Z^{u\ell-u_1(d_\ell+1)}, Z^{u\ell-u_1 d_\ell})} \right) \\ &= \ell(su - s_3 u_1) = \ell b \end{aligned}$$

である. 補題 2.24 より,

$$\ell \left(\frac{S}{(f, Y) + \mathfrak{p}^{(\ell)}} \right) \geq \ell b$$

であるので,

$$\ell \left(\frac{S}{(f, Y) + \mathfrak{p}^{(\ell)}} \right) = \ell b$$

^{*12} このような d_ℓ は一意的に存在することがわかる. また, このとき $d_\ell + 1 \leq \ell$ であるので, $u\ell - u_1(d_\ell + 1) \geq 0$ である.

となる．よって，1) が成立し，定理 2.25 より 2) が成立する．したがって，(4.3) を示せばよい．つまり，

$$X^{(d_\ell+1)s-\ell s_3} Z^{u\ell-u_1(d_\ell+1)}, Z^{u\ell-u_1 d_\ell} \in (f, Y) + \mathfrak{p}^{(\ell)}$$

を示せば十分である．以下，これを ℓ に関する帰納法で示していく．

$\ell = 1$ のとき， $0 \leq (d_1 + 1)s - s_3 < s$ を満たすような d_1 は 0 である．さらに $(f, Y) + \mathfrak{p} = (X^s, Y) + (X^{s-s_3} Z^{u-u_1}, Z^u)$ であるので， $\ell = 1$ の時は正しい．

$\ell \geq 1$ とし， $X^{(d_\ell+1)s-\ell s_3} Z^{u\ell-u_1(d_\ell+1)}, Z^{u\ell-u_1 d_\ell} \in (f, Y) + \mathfrak{p}^{(\ell)}$ の成立を仮定し， $X^{(d_{\ell+1}+1)s-(\ell+1)s_3} Z^{u(\ell+1)-u_1(d_{\ell+1}+1)}, Z^{u(\ell+1)-u_1 d_{\ell+1}} \in (f, Y) + \mathfrak{p}^{(\ell+1)}$ が成り立つことを示す． $-s_3 < (d_\ell+1)s-(\ell+1)s_3 < s-s_3$ であるので， $d_{\ell+1} = d_\ell$ または $d_{\ell+1} = d_\ell + 1$ のいずれかである．

$$v = \frac{X^{s_3} Y^{t_3}}{Z^u}, w = \frac{Y^{t_1} Z^{u_1}}{X^s}$$

とおく．

Case1 $d_{\ell+1} = d_\ell$ と仮定する．このとき，

$$Z^{u(\ell+1)-u_1 d_{\ell+1}} = Z^{u\ell-u_1 d_\ell} \cdot Z^u \in (f, Y) + \mathfrak{p}^{(\ell)} \mathfrak{p}$$

である．次に，

$$\xi(X, Z) := X^{(d_\ell+1)s-(\ell+1)s_3} Z^{u(\ell+1)-u_1(d_\ell+1)} \in (f, Y) + \mathfrak{p}^{(\ell+1)} \quad (4.4)$$

を示す． $\Delta_{\ell+1,1}$ を

$$\Delta_{\ell+1,1} = \left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \left| \begin{array}{l} s_3\alpha - s\beta + (d_\ell + 1)s - (\ell + 1)s_3 \geq 0 \\ t_3\alpha + t_1\beta \geq 0 \\ -u\alpha + u_1\beta + u(\ell + 1) - u_1(d_\ell + 1) \geq 0 \end{array} \right. \right\}$$

と定義すると，

$$S_{\deg \xi(X, Z)} = \xi(X, Z) \left(\bigoplus_{(\alpha, \beta) \in \Delta_{\ell+1,1} \cap \mathbb{Z}^2} K v^\alpha w^\beta \right)$$

を得る．さらに，

$$\Delta'_{\ell+1,1} = \left\{ (\alpha, \beta) \in \Delta_{\ell+1,1} \left| \begin{array}{l} s_3\alpha - s\beta + (d_\ell + 1)s - (\ell + 1)s_3 \geq s \\ \text{あるいは,} \\ t_3\alpha + t_1\beta \geq 1 \end{array} \right. \right\}$$

とおくと,

$$S_{\deg \xi(X,Z)} \cap (f, Y)S = \xi(X, Z) \left(\bigoplus_{(\alpha, \beta) \in \Delta'_{\ell+1,1} \cap \mathbb{Z}^2} K v^\alpha w^\beta \right) \quad (4.5)$$

である.

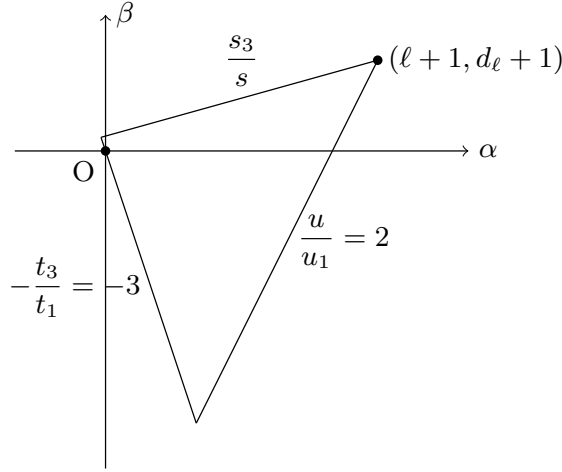


図 2: $\Delta_{\ell+1, 1}$

後に示す主張 4.3 により, $\Delta_{\ell+1,1}$ は $(\ell+1)$ -EU を満足している. 定理 2.19 より,

$$\left(\bigoplus_{(\alpha, \beta) \in \Delta_{\ell+1,1} \cap \mathbb{Z}^2} K v^\alpha w^\beta \right) \cap (v-1, w-1)^{\ell+1} K[v^{\pm 1}, w^{\pm 1}]$$

内で定数項が 0 でないような $\varphi(v, w)$ が存在する. $\varphi(v, w)$ の定数項を 1 として構わない. $[\Delta_{\ell+1,1} - \{(0, 0)\}] \cap \mathbb{Z}^2 = \Delta'_{\ell+1,1} \cap \mathbb{Z}^2$ であるので^{*13}, $\varphi_1(v, w) = \varphi - 1$ とすると,

$$\varphi_1(v, w) \in \left(\bigoplus_{(\alpha, \beta) \in \Delta'_{\ell+1,1} \cap \mathbb{Z}^2} K v^\alpha w^\beta \right)$$

^{*13} 証明: $[\Delta_{\ell+1,1} - \Delta'_{\ell+1,1}] \cap \mathbb{Z}^2 = \{(0, 0)\}$ を示せばよい. $(\alpha, \beta) \in \Delta_{\ell+1,1} \setminus \Delta'_{\ell+1,1}$ に対し, $t_3\alpha + t_1\beta = 0$ であるので, $(\alpha, \beta) = (kt_1, -kt_3)$ ($k \in \mathbb{Z}$) と表される. $\Delta_{\ell+1,1}$ と $\Delta'_{\ell+1,1}$ の定義から,

$$0 \leq k(s_3t_1 + st_3) + (d_\ell + 1)s - (\ell + 1)s_3 < s$$

が従う. $s_3t_1 + st_3 > s$ であり, $0 \leq (d_\ell + 1)s - (\ell + 1)s_3 < s$ であるので, $k = 0$ でなければならない. したがって, $(\alpha, \beta) = (0, 0)$ である.

が成立する． (4.5) より $\xi(X, Z)\varphi_1(v, w) \in (f, Y)S$ であり， さらに $\xi(X, Z)\varphi(v, w) \in S \cap (v-1, w-1)^{\ell+1}S[X^{-1}, X^{-1}, Z^{-1}] = \mathfrak{p}^{(\ell+1)}$ であるので， (4.4) が成立する．

Case2 $d_{\ell+1} = d_{\ell} + 1$ と仮定する． このとき，

$$\begin{aligned} & X^{(d_{\ell+1}+1)s-(\ell+1)s_3} Z^{u(\ell+1)-u_1(d_{\ell+1}+1)} \\ &= X^{(d_{\ell}+1)s-\ell s_3} Z^{u\ell-u_1(d_{\ell}+1)} \cdot X^{s-s_3} Z^{u-u_1} \\ &\in (f, Y) + \mathfrak{p}^{(\ell)}\mathfrak{p} \end{aligned}$$

である． 次に，

$$\eta(Z) := Z^{u(\ell+1)-u_1(d_{\ell}+1)} \in (f, Y) + \mathfrak{p}^{(\ell+1)} \quad (4.6)$$

を示す． $\Delta_{\ell+1,2}$ を

$$\Delta_{\ell+1,2} = \left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \left| \begin{array}{l} s_3\alpha - s\beta \geq 0 \\ t_3\alpha + t_1\beta \geq 0 \\ -u\alpha + u_1\beta + u(\ell+1) - u_1(d_{\ell}+1) \geq 0 \end{array} \right. \right\}$$

と定義すると，

$$S_{\deg \eta(Z)} = \eta(Z) \left(\bigoplus_{(\alpha, \beta) \in \Delta_{\ell+1,2} \cap \mathbb{Z}^2} K v^{\alpha} w^{\beta} \right)$$

を得る．

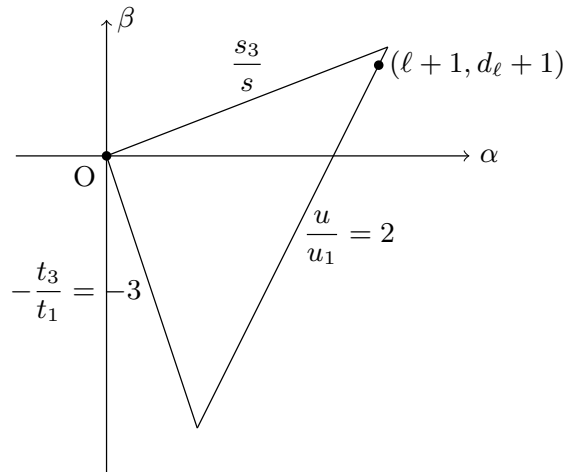


図 3: $\Delta_{\ell+1,2}$

さらに,

$$\Delta'_{\ell+1,2} = \left\{ (\alpha, \beta) \in \Delta_{\ell+1,2} \left| \begin{array}{l} s_3\alpha - s\beta \geq s \\ \text{あるいは} \\ t_3\alpha + t_1\beta \geq 1 \end{array} \right. \right\}$$

とおくと,

$$S_{\deg \eta(Z)} \cap (f, Y)S = \eta(Z) \left(\bigoplus_{(\alpha, \beta) \in \Delta'_{\ell+1,2} \cap \mathbb{Z}^2} K v^\alpha w^\beta \right)$$

である. 次に示す主張 4.3 により, $\Delta_{\ell+1,2}$ は $(\ell+1)$ -EU を満足している. $[\Delta_{\ell+1,2} - \{(0,0)\}] \cap \mathbb{Z}^2 = \Delta'_{\ell+1,2} \cap \mathbb{Z}^2$ であるので^{*14}, Case1 と同様にして, (4.6) が成立することが示せる. 証明終

主張 4.3 $\Delta_{\ell+1,m}$ ($m = 1, 2$) は $(\ell+1)$ -EU を満足する.

以下, i, j を自然数とし, $r \in [0, 2)$ とする. $a(i, r)$ と $b(j, r)$ を以下の様に定義する. ここで実数 w に対し, $[w]$ は w 以下の最大の整数とする.

$$\begin{aligned} a(i, r) &= \# \{[-ri, 3i] \cap \mathbb{Z}\} = 3i + [ri] + 1 \\ b(j, r) &= \# \{[rj, 2j] \cap \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

すると $b(j, r) = 2j - \# \{(0, rj) \cap \mathbb{Z}\}$ である. ここで, $b'(j, r)$ を次の様に定義する.

$$b'(j, r) = \# \{(rj, 2j] \cap \mathbb{Z}\} = 2j - [rj]$$

注意 4.4 $b(j, r), b'(j, r)$ に関して次が成立する.

$$\begin{cases} rj \notin \mathbb{Z} \implies b(j, r) = b'(j, r) \\ rj \in \mathbb{Z} \implies b(j, r) = b'(j, r) + 1 \end{cases}$$

以下, p, q, p', q' は $q \neq 0, q' \neq 0, \frac{p}{q} < 2, \frac{p'}{q'} < 2$ を満たす非負整数とする. 自然数 i_0, j_0 に対し,

$$a\left(1, \frac{p}{q}\right), \dots, a\left(i_0, \frac{p}{q}\right), b'\left(1, \frac{p'}{q'}\right), \dots, b'\left(j_0, \frac{p'}{q'}\right)$$

を小さい順に並び替えたものを

$$\ell_1 \leq \dots \leq \ell_{i_0+j_0}$$

^{*14} 証明は, $\Delta_{\ell+1,1} \setminus \{(0,0)\} \cap \mathbb{Z}^2 = \Delta'_{\ell+1,1} \cap \mathbb{Z}^2$ の証明と同様である.

とする. $k = 1, 2, \dots, i_0 + j_0$ に対して, $\ell_k \geq k + 1$ となるとき, 条件 $\left(\frac{p}{q}, \frac{p'}{q'}, i_0, j_0\right)$ が成立するというにすることにする.

補題 4.5 p, q, p', q' が $a\left(q, \frac{p}{q}\right) = b\left(q', \frac{p'}{q'}\right) = q + q' + 1$ を満たす必要十分条件は, $p' = p + q, q' = p + 2q$ を満たすことである.

証明 必要性を示す. $a\left(q, \frac{p}{q}\right)$ の定義より,

$$a\left(q, \frac{p}{q}\right) = 3q + \left[q \cdot \frac{p}{q}\right] + 1 = 3q + p + 1.$$

また, 仮定より $a\left(q, \frac{p}{q}\right) = q + q' + 1$ であるので, $q' = p + 2q$ を得る. さらに,

$$b\left(q', \frac{p'}{q'}\right) = 2q' - p' + 1$$

であり, 仮定より $b\left(q', \frac{p'}{q'}\right) = q + q' + 1$ であるので $p' = p + q$ を得る.

十分性の証明は必要性の証明を逆にたどれば良い.

証明終

補題 4.6 p, q, p', q' は $a\left(q, \frac{p}{q}\right) = b\left(q', \frac{p'}{q'}\right) = q + q' + 1$ を満たすと仮定する. 次は同値である.

- 1) 任意の i_0, j_0 に対し, 条件 $\left(\frac{p}{q}, \frac{p'}{q'}, i_0, j_0\right)$ が成立する.
- 2) $\left(\frac{p}{q}, \frac{p'}{q'}, q, q'\right)$ が成立する.

証明 1) $\implies$ 2) は明らか. 2) $\implies$ 1) を示す. i_0, j_0 を与えられた自然数とする. $i_0 \leq nq, j_0 \leq nq'$ を満たす自然数 n をとる. このとき, 任意の i, j に対し,

$$\begin{aligned} a\left(i + q, \frac{p}{q}\right) &= a\left(i, \frac{p}{q}\right) + q + q' \\ b\left(j + q', \frac{p'}{q'}\right) &= b\left(j, \frac{p'}{q'}\right) + q + q' \end{aligned}$$

であるので, 条件 $\left(\frac{p}{q}, \frac{p'}{q'}, nq, nq'\right)$ が成立する. すなわち, $a\left(1, \frac{p}{q}\right), \dots, a\left(nq, \frac{p}{q}\right), b\left(1, \frac{p'}{q'}\right), \dots, b\left(nq', \frac{p'}{q'}\right)$ を小さい順に並び替えたものを $\ell_1 \leq \dots \leq \ell_{nq+nq'}$ とし

たとき, $k = 1, 2, \dots, i_0 + j_0$ に対し, $\ell_k \geq k + 1$ となる. $a\left(1, \frac{p}{q}\right), \dots, a\left(i_0, \frac{p}{q}\right), b'\left(1, \frac{p'}{q'}\right), \dots, b'\left(j_0, \frac{p'}{q'}\right)$ を小さい順に並び替えたものは $\{\ell_k\}$ の部分列であるので, 条件 $\left(\frac{p}{q}, \frac{p'}{q'}, i_0, j_0\right)$ が成立している.

証明終

例 4.7 $p_1 = 0, q_1 = 1, p_2 = 1, q_2 = 2$ とする. このとき, $a\left(q_1, \frac{p_1}{q_1}\right) = b\left(q_2, \frac{p_2}{q_2}\right) = q_1 + q_2 + 1$ である. さらに, $a\left(1, \frac{p_1}{q_1}\right) = 4, b'\left(1, \frac{p_2}{q_2}\right) = 2, b'\left(2, \frac{p_2}{q_2}\right) = 3$ であるので, 条件 $\left(\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, q_1, q_2\right)$ が成立している.

補題 4.8 数列 $\{p_n\}, \{q_n\}$ は $p_1 = 0, q_1 = 1,$

$$\begin{cases} p_{n+1} = p_n + q_n \\ q_{n+1} = p_n + 2q_n \end{cases}$$

を満たすとする. このとき, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し,

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{1}{q_n \cdot q_{n+1}}$$

が成立する.

証明 $p_2 = 1, q_2 = 2$ であるので, $n = 1$ のときは正しい. 以下, $n \geq 2$ とし,

$$\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{1}{q_{n-1} \cdot q_n}$$

を仮定する.

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{q_n^2 - q_n p_n - p_n^2}{q_n \cdot q_{n+1}}, \quad \frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{q_{n-1}^2 - q_{n-1} p_{n-1} - p_{n-1}^2}{q_{n-1} \cdot q_n}$$

であるので, $q_{n-1}^2 - q_{n-1} p_{n-1} - p_{n-1}^2 = 1$ である. さらに,

$$q_n^2 - q_n p_n - p_n^2 = q_{n-1}^2 - q_{n-1} p_{n-1} - p_{n-1}^2$$

であるので, 帰納法より $n \geq 2$ に対しても正しい.

証明終

以下, $\{p_n\}, \{q_n\}$ は

$$p_1 = 0, q_1 = 1, \begin{cases} p_{n+1} = p_n + q_n \\ q_{n+1} = p_n + 2q_n \end{cases}$$

を満たす数列とする.

命題 4.9 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し, 条件 $\left(\frac{p_n}{q_n}, \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}, q_n, q_{n+1}\right)$ が成立する.

証明 補題 4.5 より $a\left(q_n, \frac{p_n}{q_n}\right) = b\left(q_{n+1}, \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right) = q_n + q_{n+1} + 1$ を満たしている.
 $n = 1$ のときは例 4.7 より正しい. 以下 $n \geq 2$ とし, $n - 1$ まで正しいと仮定する. 補題 4.8 より, 任意の $1 \leq i < q_n$ に対し

$$\left[i \cdot \frac{p_n}{q_n}\right] = \left[i \cdot \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} + i \cdot \frac{1}{q_{n-1} \cdot q_n}\right] = \left[i \cdot \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right]$$

が成立. 同様にして, 任意の $1 \leq j < q_{n+1}$ に対し,

$$\left[j \cdot \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right] = \left[j \cdot \frac{p_n}{q_n}\right]$$

が成立する. よって,

$$\begin{cases} 1 \leq i < q_n \implies a\left(i, \frac{p_n}{q_n}\right) = a\left(i, \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right) \\ 1 \leq i < q_{n+1} \implies b'\left(j, \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right) = b'\left(j, \frac{p_n}{q_n}\right) \end{cases}$$

となる. 帰納法より条件 $\left(\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}, \frac{p_n}{q_n}, q_{n-1}, q_n\right)$ が成立しているので, 補題 4.6 より条件 $\left(\frac{p_n}{q_n}, \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}, q_n - 1, q_{n+1} - 1\right)$ が成立する. さらに,

$$a\left(q_n, \frac{p_n}{q_n}\right) = q_n + q_{n+1} + 1, \quad b'\left(q_{n+1}, \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right) = q_n + q_{n+1}$$

であるので, 条件 $\left(\frac{p_n}{q_n}, \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}, q_n, q_{n+1}\right)$ が成立する.

証明終

系 4.10 $\frac{p_n}{q_n} < \frac{s_3}{s} < \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ となる $n \in \mathbb{N}$ が存在するならば, $\Delta_{\ell+1,1}, \Delta_{\ell+1,2}$ は $(\ell+1)$ -EU を満足する.

証明 $\alpha\beta$ 平面内の直線 $3\alpha + \beta = 0$ と, 直線 $-2\alpha + \beta + 2(\ell+1) - (d_\ell+1) = 0$ との交点を (δ_1, δ_2) とする ((δ_1, δ_2) は図 2, 図 3 の三角形の下頂点の座標である). $1 \leq i \leq [\delta_1]$ のとき,

$$\#(\Delta_{\ell+1,m} \cap \{(i, y) \mid y \in \mathbb{Z}\}) \geq a\left(i, \frac{s_3}{s}\right) \geq a\left(i, \frac{p_n}{q_n}\right) \quad (m = 1, 2)$$

$[\delta_1] + 1 \leq i \leq \ell$ のとき,

$$\#(\Delta_{\ell+1,m} \cap \{(i, y) \mid y \in \mathbb{Z}\}) \geq b\left(\ell + 1 - i, \frac{s_3}{s}\right) \geq b\left(\ell + 1 - i, \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right) \quad (m = 1, 2)$$

が成り立つ. 条件 $\left(\frac{p_n}{q_n}, \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}, q_n, q_{n+1}\right)$ が成立しているのを, 補題 4.6 より条件 $\left(\frac{p_n}{q_n}, \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}, [\delta_1], \ell - [\delta_1]\right)$ が成立する. したがって $\Delta_{\ell+1,m}$ ($m = 1, 2$) は $(\ell + 1)$ -EU を満足する. 証明終

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{q_n} = \gamma$ とおく^{*15}. $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \frac{1 + \frac{p_n}{q_n}}{2 + \frac{p_n}{q_n}}$ なので $\gamma = \frac{1 + \gamma}{2 + \gamma}$. よって $\gamma = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ となる. 故に, $\frac{s_3}{s} < \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ ならば $\Delta_{\ell+1,m}$ ($m = 1, 2$) は $(\ell + 1)$ -EU を満足する. 注意 3.6 と命題 3.7 より, f が negative curve であることと $\frac{s_3}{s} < \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ であることは同値なので, $\Delta_{\ell+1,m}$ ($m = 1, 2$) は $(\ell + 1)$ -EU を満足する. したがって主張 4.3 が示された. 主張 4.3 の証明終

g が negative curve の場合を考える. このとき, 次の命題 4.11 より, $R_s(\mathfrak{p})$ は Cohen-Macaulay 環である.

命題 4.11 g が negative curve であると仮定する. このとき, 次が成立する.

- 1) 任意の $1 \leq \ell < t$ に対し,

$$(g, Z) + \mathfrak{p}^{(\ell)} = (Y^t, Z) + (X^{\ell s - (d_\ell + 1)s_2} Y^{(d_\ell + 1)t - \ell t_1}, X^{\ell s - d_\ell s_2})$$

が成立する. ただし, d_ℓ は $0 \leq (d_\ell + 1)t - \ell t_1 < t$ を満たす整数^{*16} である.

- 2) 任意の $1 \leq \ell < t$ に対し, $S/(g) + \mathfrak{p}^{(\ell)}$ は Cohen-Macaulay である.

証明 命題 4.2 の証明と同じ議論により, 任意の $1 \leq \ell < t$ に対し,

$$X^{\ell s - (d_\ell + 1)s_2} Y^{(d_\ell + 1)t - \ell t_1}, X^{\ell s - d_\ell s_2} \in (g, Z) + \mathfrak{p}^{(\ell)}$$

を示せば良い. $d_\ell = 0$ ($\ell < t$) により, $X^{\ell s - d_\ell s_2} = X^{\ell s} \in (g, Z) + \mathfrak{p}^\ell$ である. 次に,

$$\xi(X, Y) = X^{\ell s - s_2} Y^{t - \ell t_1} \in (g, Z) + \mathfrak{p}^{(\ell)} \quad (\ell < t) \quad (4.7)$$

^{*15} $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \frac{p_n + q_n}{p_n + 2q_n} < 1$ かつ補題 4.8 より $\left\{\frac{p_n}{q_n}\right\}$ は単調増加なので極限値が存在する.

^{*16} このケースでは, $t = 4$, $t_1 = 1$ であるので, $d_1 = d_2 = d_3 = 0$ である.

を示す.

$v, w \in S[X^{-1}, Y^{-1}, Z^{-1}]$, Δ_ℓ ($\ell < t$) を

$$v = \frac{Y^{t_1} Z^{u_1}}{X^s}, w = \frac{X^{s_2} Z^{u_2}}{Y^t}$$

$$\Delta_\ell = \left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \left| \begin{array}{l} -s\alpha + s_2\beta + \ell s - s_2 \geq 0 \\ t_1\alpha - t\beta + t - \ell t_1 \geq 0 \\ u_1\alpha + u_2\beta \geq 0 \end{array} \right. \right\}$$

と定義すると

$$S_{\deg \xi(X,Y)} = \xi(X,Y) \left(\bigoplus_{(\alpha,\beta) \in \Delta_\ell \cap \mathbb{Z}^2} K v^\alpha w^\beta \right)$$

を得る. さらに,

$$\Delta'_\ell = \left\{ (\alpha, \beta) \in \Delta_\ell \left| \begin{array}{l} t_1\alpha + t\beta - \ell t_1 + t \geq t \\ \text{あるいは} \\ u_1\alpha + u_2\beta \geq 1 \end{array} \right. \right\}$$

とおくと

$$S_{\deg \xi(X,Y)} \cap (g, Z)S = \xi(X,Y) \left(\bigoplus_{(\alpha,\beta) \in \Delta'_\ell \cap \mathbb{Z}^2} K v^\alpha w^\beta \right)$$

である. Δ_ℓ ($\ell < t$) は図 4, 5, 6 のような三角形で囲まれた領域である^{*17}. 但し境界は含み, $\bullet$ は格子点である.

^{*17} この場合 $\frac{t_1}{t} = \frac{1}{4}$, $\frac{u_1}{u_2} = 1$ であり, 傾きが $\frac{s}{s_2}$ の線分は必ず $(\alpha, \beta) = (\ell, 1)$ を通る.

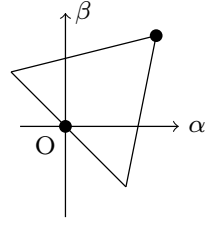


図 4: Δ_1

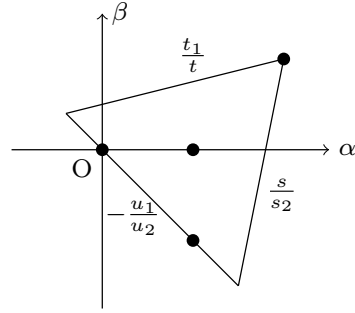


図 5: Δ_2

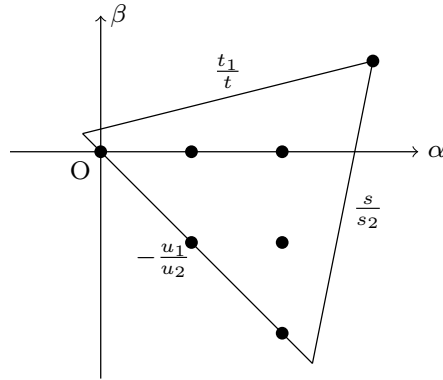


図 6: Δ_3

注意 3.6 と命題 3.7 より, g が negative curve であることと, $\frac{21}{4} < \frac{s}{s_2}$ であることは同値であるので, 図 4, 5, 6 より, Δ_ℓ ($\ell < t$) は ℓ -EU を満足する. 命題 4.2 の証明と同様にして, (4.7) が成立することが示せる. 証明終

4.2.2 $b \equiv 4c \pmod{5}$: (2) の場合

命題 3.8 より, $t = 3$, $u = 3$, $t_1 = 1$, $t_3 = 2$, $u_1 = 1$, $u_2 = 2$ である. さらに, 必ず f が negative curve になる. このとき, 次の命題 4.12 より, $R_s(\mathfrak{p})$ は Cohen-Macaulay 環である.

命題 4.12 次が成立する.

1) 任意の $1 \leq \ell < s$ に対し,

$$(f, Y) + \mathfrak{p}^{(\ell)} = (X^s, Y) + (X^{(d_\ell+1)s-\ell s_3} Z^{u_\ell-u_1(d_\ell+1)}, Z^{u_\ell-u_1 d_\ell}).$$

ただし, d_ℓ は $0 \leq (d_\ell + 1)s - \ell s_3 < s$ を満たす整数^{*18} である.

2) 任意の $1 \leq \ell < s$ に対し, $S/(f) + \mathfrak{p}^{(\ell)}$ は Cohen-Macaulay である.

証明 命題 4.2 の証明と同じ議論により,

$$X^{(d_\ell+1)s-\ell s_3} Z^{u_\ell-u_1(d_\ell+1)}, Z^{u_\ell-u_1 d_\ell} \in (f, Y) + \mathfrak{p}^{(\ell)}$$

を示せば良い. 以下, これを ℓ に関する帰納法で示してゆく.

$\ell = 1$ のとき, $0 \leq (d_1 + 1)s - s_3 < s$ を満たすような d_1 は 0 である. さらに $(f, Y) + \mathfrak{p} = (X^s, Y) + (X^{s-s_3} Z^{u-u_1}, Z^u)$ であるので, $\ell = 1$ の時は正しい.

$\ell \geq 2$ とし, $X^{(d_\ell+1)s-\ell s_3} Z^{u_\ell-u_1(d_\ell+1)}, Z^{u_\ell-u_1 d_\ell} \in (f, Y) + \mathfrak{p}^{(\ell)}$ の成立を仮定し, $X^{(d_{\ell+1}+1)s-(\ell+1)s_3} Z^{u_{\ell+1}-u_1(d_{\ell+1}+1)}, Z^{u_{\ell+1}-u_1 d_{\ell+1}} \in (f, Y) + \mathfrak{p}^{(\ell+1)}$ が成り立つことを示す. $-s_3 < (d_\ell+1)s-(\ell+1)s_3 < s-s_3$ であるので, $d_{\ell+1} = d_\ell$ または $d_{\ell+1} = d_\ell + 1$ のいずれかである.

$$v = \frac{X^{s_3} Y^{t_3}}{Z^u}, w = \frac{Y^{t_1} Z^{u_1}}{X^s}$$

とおく.

Case1 $d_{\ell+1} = d_\ell$ と仮定する. このとき,

$$Z^{u_{\ell+1}-u_1 d_{\ell+1}} = Z^{u_\ell-u_1 d_\ell} \cdot Z^u \in (f, Y) + \mathfrak{p}^{(\ell)} \mathfrak{p}$$

である. 次に,

$$\xi(X, Z) := X^{(d_\ell+1)s-(\ell+1)s_3} Z^{u_{\ell+1}-u_1(d_\ell+1)} \in (f, Y) + \mathfrak{p}^{(\ell+1)} \quad (4.8)$$

を示す. $\Delta_{\ell+1,1}$ を

$$\Delta_{\ell+1,1} = \left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \left| \begin{array}{l} s_3 \alpha - s \beta + (d_\ell + 1)s - (\ell + 1)s_3 \geq 0 \\ t_3 \alpha + t_1 \beta \geq 0 \\ -u \alpha + u_1 \beta + u(\ell + 1) - u_1(d_\ell + 1) \geq 0 \end{array} \right. \right\}$$

と定義すると,

$$S_{\deg \xi(X, Z)} = \xi(X, Z) \left(\bigoplus_{(\alpha, \beta) \in \Delta_{\ell+1,1} \cap \mathbb{Z}^2} K v^\alpha w^\beta \right)$$

^{*18} このような d_ℓ は一意的に存在することがわかる. また, このとき $d_\ell + 1 \leq \ell$ であるので, $u_\ell - u_1(d_\ell + 1) \geq 0$ である.

を得る．さらに，

$$\Delta'_{\ell+1,1} = \left\{ (\alpha, \beta) \in \Delta_{\ell+1,1} \left| \begin{array}{l} s_3\alpha - s\beta + (d_\ell + 1)s - (\ell + 1)s_3 \geq s \\ \text{あるいは,} \\ t_3\alpha + t_1\beta \geq 1 \end{array} \right. \right\}$$

とおくと，

$$S_{\deg \xi(X,Z)} \cap (f, Y)S = \xi(X, Z) \left(\bigoplus_{(\alpha, \beta) \in \Delta'_{\ell+1,1} \cap \mathbb{Z}^2} K v^\alpha w^\beta \right)$$

である．

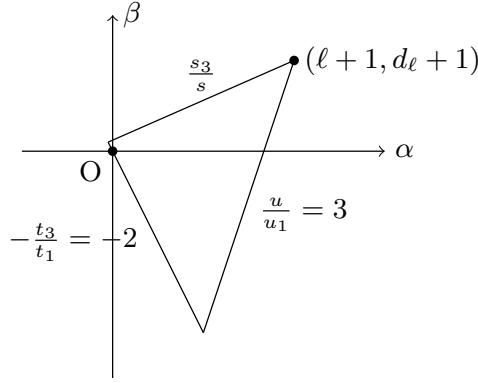


図 7: $\Delta_{\ell+1, 1}$

$\#\left\{\left[-2, \frac{s_3}{s}\right] \cap \mathbb{Z}^2\right\} = 3$, $\#\left\{\left[\frac{s_3}{s}, 3\right] \cap \mathbb{Z}^2\right\} = 3$ であるので， $\Delta_{\ell+1,1}$ は $(\ell + 1)$ -EU を満足することは容易に証明できる．

命題 4.2 の証明と同様にして，(4.8) が成立することが示せる．

Case2 $d_{\ell+1} = d_\ell + 1$ と仮定する．このとき，

$$\begin{aligned} & X^{(d_{\ell+1}+1)s-(\ell+1)s_3} Z^{u(\ell+1)-u_1(d_{\ell+1}+1)} \\ &= X^{(d_\ell+1)s-(\ell+1)s_3} Z^{u\ell-u_1(d_\ell+1)} \cdot X^{s-s_3} Z^{u-u_1} \\ &\in (f, Y) + \mathfrak{p}^{(\ell)} \mathfrak{p} \end{aligned}$$

である．次に，

$$\eta(Z) := Z^{u(\ell+1)-u_1(d_\ell+1)} \in (f, Y) + \mathfrak{p}^{(\ell+1)} \quad (4.9)$$

を示す． $\Delta_{\ell+1,2}$ を

$$\Delta_{\ell+1,2} = \left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \left| \begin{array}{l} s_3\alpha - s\beta \geq 0 \\ t_3\alpha + t_1\beta \geq 0 \\ -u\alpha + u_1\beta + u(\ell+1) - u_1(d_\ell+1) \geq 0 \end{array} \right. \right\}$$

と定義すると,

$$S_{\deg \eta(Z)} = \eta(Z) \left(\bigoplus_{(\alpha, \beta) \in \Delta_{\ell+1,2} \cap \mathbb{Z}^2} K v^\alpha w^\beta \right)$$

を得る．さらに,

$$\Delta'_{\ell+1,2} = \left\{ (\alpha, \beta) \in \Delta_{\ell+1,2} \left| \begin{array}{l} s_3\alpha - s\beta \geq s \\ \text{あるいは} \\ t_3\alpha + t_1\beta \geq 1 \end{array} \right. \right\}$$

とおくと,

$$S_{\deg \eta(Z)} \cap (f, Y)S = \eta(Z) \left(\bigoplus_{(\alpha, \beta) \in \Delta'_{\ell+1,2} \cap \mathbb{Z}^2} K v^\alpha w^\beta \right)$$

である．

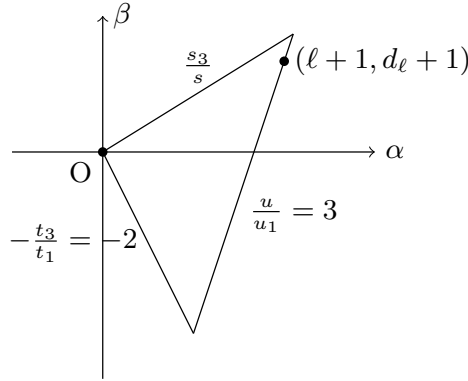


図 8: $\Delta_{\ell+1,2}$

$\#\left\{\left[-2, \frac{s_3}{s}\right] \cap \mathbb{Z}^2\right\} = 3$, $\#\left\{\left[\frac{s_3}{s}, 3\right] \cap \mathbb{Z}^2\right\} = 3$ であるので, $\Delta_{\ell+1,2}$ は $(\ell+1)$ -EU を満足することは容易に証明できる.

命題 4.2 の証明と同様にして, (4.9) が成立することが示せる.

証明終

5 CRS

以下、この章では、 K を標数 0 の体、 a, b, c は 2 つずつが互いに素な自然数とし、 $a = \min\{a, b, c\} = 5$ とする。この章では、 $\mathfrak{p}_K(a, b, c)$ の生成元の中に negative curve が存在する場合、negative curve が CRS であるかどうかを決定する (定理 5.1)。

定理 5.1 K を標数 0 の体、 a, b, c を 2 つずつが互いに素な自然数とし、 $a = \min\{a, b, c\} = 5$ とする。 $\mathfrak{p}_K(a, b, c)$ の生成元の一つが negative curve であると仮定する。

- 1) $b \equiv c \pmod{5}$ ならば、negative curve は CRS である。
- 2) $b \equiv 4c \pmod{5}$ ならば、negative curve は CRS である。
- 3) $b \equiv 2c \pmod{5}$, $\mu(\mathfrak{p}) = 2$ ならば、negative curve は CRS である。
- 4) $b \equiv 2c \pmod{5}$, $\mu(\mathfrak{p}) = 3$ であるとする^{*19}。このとき、次が成立する。
 - i) g が negative curve であることと、 $\frac{9}{5}b < c < 3b$ であることは同値である^{*20}。
更に、 g が negative curve であるとき、negative curve が CRS である必要十分条件は、 $\frac{38}{21}b \leq c < 3b$ となることである。
 - ii) h が negative curve であることと、 $\frac{1}{2}b < c < \frac{5}{4}b$ であることは同値である。
更に、 h が negative curve であるとき、negative curve が CRS である必要十分条件は、 $\frac{1}{2}b < c \leq \frac{21}{17}b$ となることである。

1), 3) のときは、系 2.34 より negative curve は CRS である。2) のとき、 $-K$ が big なので、negative curve は CRS である。

以下、4) を示す。

5.1 g が negative curve の場合

このとき、negative curve の次数は

$$d = \deg g = 3b$$

^{*19} このとき、 $\mathfrak{p}$ の中に negative curve が存在するならば、negative curve は g か h であることに注意。

^{*20} これは注意 3.4 より従う。

である。注意 3.6 より,

$$b = 2s_2 + s_3 \quad (5.1)$$

$$c = s_2 + 3s_3 \quad (5.2)$$

であるので,

$$g \text{ が negative curve である} \iff c > \frac{9}{5}b \iff \frac{s_3}{s_2} > \frac{13}{6} \quad (5.3)$$

が従う.

$$nd - a - b - c = -a + (3n - 1)b - c$$

であるので, $v = \frac{X^{s_3}Y}{Z^2}$, $w = \frac{X^{s_2}Z}{Y^3}$ とおくと,

$$\begin{aligned} & \left[\mathbf{p}^{(n-1)} \right]_{nd-a-b-c} \\ &= X^{-1}Y^{3n-1}Z^{-1} \left\{ \left(\bigoplus_{(\alpha, \beta) \in \Delta_n \cap \mathbb{Z}^2} K v^\alpha w^\beta \right) \cap (v-1, w-1)^{n-1} K[v^{\pm 1}, w^{\pm 1}] \right\} \end{aligned} \quad (5.4)$$

である。ここで,

$$\Delta_n = \left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \left| \begin{array}{l} s_3\alpha + s_2\beta - 1 \geq 0 \\ \alpha - 3\beta + 3n - 1 \geq 0 \\ -2\alpha + \beta - 1 \geq 0 \end{array} \right. \right\}$$

であり, すなわち,

$$\Delta_n \cap \mathbb{Z}^2 = \left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2 \left| \begin{array}{l} \beta > -\frac{s_3}{s_2}\alpha \\ \beta \leq \frac{1}{3}\alpha + n - \frac{1}{3} \\ \beta \geq 2\alpha + 1 \end{array} \right. \right\} \quad (5.5)$$

である.

補題 5.2 a, b, c は定理 5.1 の 4) の仮定を満たし, g が negative curve であるとする. 次の成立する.

- i) $\left[\mathbf{p}^{(12-1)} \right]_{12d-a-b-c} = 0$
- ii) $\frac{s_3}{s_2} < \frac{11}{5} \implies \left[\mathbf{p}^{(13-1)} \right]_{13d-a-b-c} \neq 0$.

証明 i) を示す.

$$U_n = \left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2 \left| \begin{array}{l} \beta > -\frac{13}{6}\alpha \\ \beta \leq \frac{1}{3}\alpha + n - \frac{1}{3} \\ \beta \geq 2\alpha + 1 \end{array} \right. \right\}$$

とおくと, (5.3), (5.5) より, $\Delta_{12} \cap \mathbb{Z}^2 \subset U_{12}$ である.

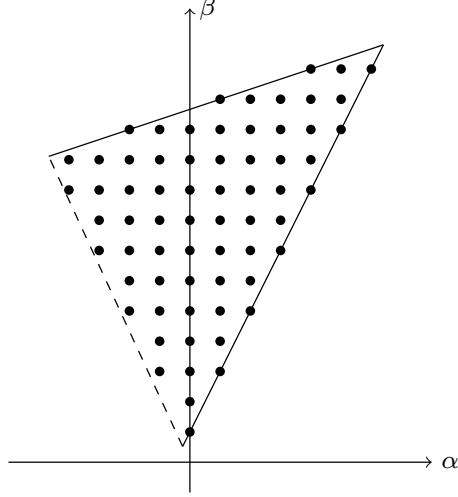


図 9: U_{12}

$\ell_i = \#(U_{12} \cap \{(i, \beta) \mid \beta \in \mathbb{Z}\})$ とおくと,

$$\begin{array}{lll} \ell_{-4} = 2 & \ell_0 = 11 & \ell_4 = 5 \\ \ell_{-3} = 4 & \ell_1 = 10 & \ell_5 = 3 \\ \ell_{-2} = 7 & \ell_2 = 8 & \ell_6 = 1 \\ \ell_{-1} = 9 & \ell_3 = 6 & \end{array}$$

であるので, 補題 2.16 より

$$\left(\bigoplus_{(\alpha, \beta) \in U_{12}} K v^\alpha w^\beta \right) \cap (v-1, w-1)^{11} K[v^{\pm 1}, w^{\pm 1}] = 0$$

が成立. したがって, (5.4) より $[\mathfrak{p}^{(12-1)}]_{12d-a-b-c} = 0$ である.

ii) を示す.

$$\tilde{U}_n = \left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2 \left| \begin{array}{l} \beta \geq -\frac{11}{5}\alpha \\ \beta \leq \frac{1}{3}\alpha + n - \frac{1}{3} \\ \beta \geq 2\alpha + 1 \end{array} \right. \right\}$$

とおくと, $\frac{s_3}{s_2} < \frac{11}{5}$ のとき, $\Delta_{13} \cap \mathbb{Z}^2 \supset \tilde{U}_{13}$ である.

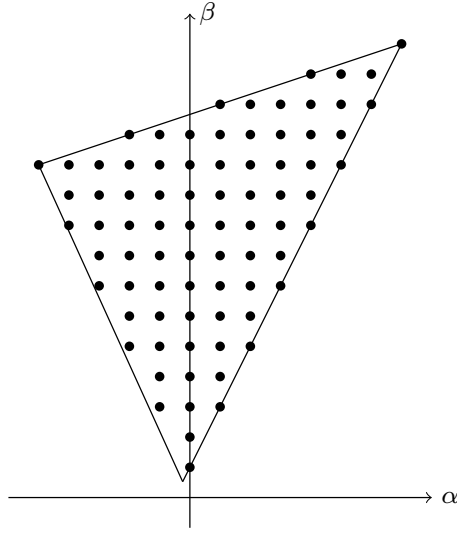


図 10: $\tilde{U}_{13}$

$\ell'_i = \#(\tilde{U}_{13} \cap \{(i, \beta) \mid \beta \in \mathbb{Z}\})$ とおくと,

$$\begin{array}{lll} \ell'_{-5} = 1 & \ell'_0 = 12 & \ell'_5 = 4 \\ \ell'_{-4} = 3 & \ell'_1 = 11 & \ell'_6 = 2 \\ \ell'_{-3} = 5 & \ell'_2 = 9 & \ell'_7 = 1 \\ \ell'_{-2} = 8 & \ell'_3 = 7 & \\ \ell'_{-1} = 10 & \ell'_4 = 6 & \end{array}$$

であるので,

$$\#\tilde{U}_{13} > \frac{12 \cdot 13}{2}$$

が成立する. 補題 2.18 より,

$$\left(\bigoplus_{(\alpha, \beta) \in \tilde{U}_{13}} K v^\alpha w^\beta \right) \cap (v-1, w-1)^{12} K[v^{\pm 1}, w^{\pm 1}]$$

の中に 0 でない元が存在する. (5.4) より $[\mathbf{p}^{(13-1)}]_{13d-a-b-c} \neq 0$ である.

証明終

命題 5.3 a, b, c は定理 5.1 の 4) の仮定を満たし, g が negative curve であるとする. このとき, 次は同値である.

- 1) negative curve は CRS でない.
- 2) $n_0 \geq 13$
- 3) $\frac{s_3}{s_2} < \frac{11}{5}$

但し, n_0 は

$$nd - a - b - c \geq \frac{abc}{d}(n - 1)$$

を満たす整数 n の最大値である. (命題 2.32 を参照.)

証明の前に, 次のことに注意する.

注意 5.4 A) (5.1), (5.2) より,

$$nd - a - b - c \geq \frac{abc}{d}(n - 1) \iff n \leq \frac{3\frac{s_3}{s_2} - 4 - \frac{15}{s_2}}{6\frac{s_3}{s_2} - 13}$$

が成り立つ. ($a = 5$, $d = 3b$ に注意.)

B) $\frac{3x - 4}{6x - 13}$ は $x \in \left(\frac{13}{6}, \infty\right)$ で単調減少である.

命題 5.3 の証明 1) $\implies$ 2) は補題 5.2 の i) による. また, $\frac{s_3}{s_2} < \frac{11}{5}$ のとき, 補題 5.2 より $[p^{(13-1)}]_{13d-a-b-c} \neq 0$ であるので, 3) $\implies$ 1) が従う.

2) $\implies$ 3) を示す. $\frac{s_3}{s_2} \geq \frac{11}{5}$ だと仮定する. このとき,

$$\frac{3\frac{s_3}{s_2} - 4 - \frac{15}{s_2}}{6\frac{s_3}{s_2} - 13} < \frac{3\frac{s_3}{s_2} - 4}{6\frac{s_3}{s_2} - 13} \leq \frac{3\frac{11}{5} - 4}{6\frac{11}{5} - 13} = 13$$

である. したがって, 注意 5.4 より $n_0 \leq 12$ である.

証明終

(5.1), (5.2) より, $\frac{s_3}{s_2} < \frac{11}{5}$ であることと, $c < \frac{38}{21}b$ であることは同値である. よって, 定理 5.1 の 4) の i) が示された.

例 5.5 $a = 5$, b を十分大きな素数とし, c を

$$\left[\frac{38}{21}b\right], \left[\frac{38}{21}b\right] - 1, \left[\frac{38}{21}b\right] - 2, \left[\frac{38}{21}b\right] - 3, \left[\frac{38}{21}b\right] - 4$$

の中で $b \equiv 2c \pmod{5}$ を満たすものとする. このとき, a, b, c は定理 5.1 の 4) の仮定を満たし, g が negative curve になる. 定理 5.1 より, negative curve は CRS でない.

5.2 h が negative curve の場合

このとき, negative curve の次数は

$$d = \deg h = 2c$$

である. (5.1), (5.2) より,

$$h \text{ が } \mathfrak{s} \text{ negative curve である} \iff c < \frac{5}{4}b \iff \frac{s_2}{s_3} > \frac{7}{6} \quad (5.6)$$

が従う.

$$nd - a - b - c = -a - b + (2n - 1)c$$

であるので, $v = \frac{X^{s_2}Z}{Y^3}$, $w = \frac{X^{s_3}Y}{Z^2}$ とおくと,

$$\begin{aligned} & \left[\mathfrak{p}^{(n-1)} \right]_{nd-a-b-c} \\ &= X^{-1}Y^{-1}Z^{2n-1} \left\{ \left(\bigoplus_{(\alpha, \beta) \in \Delta_n \cap \mathbb{Z}^2} K v^\alpha w^\beta \right) \cap (v-1, w-1)^{n-1} K[v^{\pm 1}, w^{\pm 1}] \right\} \end{aligned} \quad (5.7)$$

である. ここで,

$$\Delta_n = \left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \left| \begin{array}{l} s_2\alpha + s_3\beta - 1 \geq 0 \\ -3\alpha + \beta - 1 \geq 0 \\ \alpha - 2\beta + 2n - 1 \geq 0 \end{array} \right. \right\}$$

であり, すなわち,

$$\Delta_n \cap \mathbb{Z}^2 = \left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2 \left| \begin{array}{l} \beta > -\frac{s_2}{s_3}\alpha \\ \beta \geq 3\alpha + 1 \\ \beta \leq \frac{1}{2}\alpha + n - \frac{1}{2} \end{array} \right. \right\} \quad (5.8)$$

である.

補題 5.6 a, b, c は定理 5.1 の 4) の仮定を満たし, h が $\mathfrak{s}$ negative curve であるとする. 次が成立する.

- i) $\left[\mathfrak{p}^{(8-1)} \right]_{8d-a-b-c} = 0$
- ii) $\frac{s_2}{s_3} < \frac{6}{5} \implies \left[\mathfrak{p}^{(9-1)} \right]_{9d-a-b-c} \neq 0$.

証明 i) を示す.

$$V_n = \left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2 \left| \begin{array}{l} \beta > -\frac{7}{6}\alpha \\ \beta \geq 3\alpha + 1 \\ \beta \leq \frac{1}{2}\alpha + n - \frac{1}{2} \end{array} \right. \right\}$$

とおくと, (5.6), (5.8) より, $\Delta_8 \cap \mathbb{Z}^2 \subset V_8$ である.

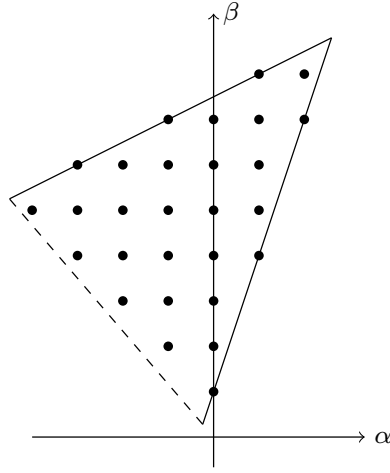


図 11: V_8

$\ell_i = \#(V_8 \cap \{(i, \beta) \mid \beta \in \mathbb{Z}\})$ とおくと,

$$\begin{aligned} \ell_{-4} &= 1 & \ell_0 &= 7 \\ \ell_{-3} &= 3 & \ell_1 &= 5 \\ \ell_{-2} &= 4 & \ell_2 &= 2 \\ \ell_{-1} &= 6 \end{aligned}$$

であるので, 補題 2.16 より

$$\left(\bigoplus_{(\alpha, \beta) \in V_8} K v^\alpha w^\beta \right) \cap (v-1, w-1)^7 K[v^{\pm 1}, w^{\pm 1}] = 0$$

が成立. したがって, (5.7) より $[\mathfrak{p}^{(8-1)}]_{8d-a-b-c} = 0$ である.

ii) を示す.

$$\tilde{V}_9 = \left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2 \mid \begin{array}{l} \beta \geq -\frac{6}{5}\alpha \\ \beta \geq 3\alpha + 1 \\ \beta \leq \frac{1}{2}\alpha + n - \frac{1}{2} \end{array} \right\}$$

とおくと, $\frac{s_2}{s_3} < \frac{6}{5}$ のとき, $\Delta_9 \cap \mathbb{Z}^2 \supset \tilde{V}_9$ である.

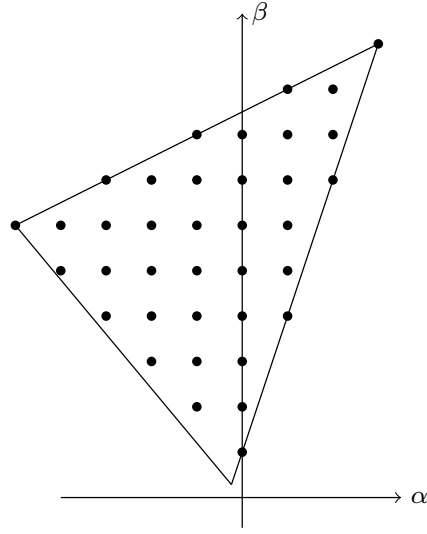


図 12: $\tilde{V}_9$

$\ell'_i = \#(V_8 \cap \{(i, \beta) \mid \beta \in \mathbb{Z}\})$ とおくと,

$$\begin{aligned} \ell'_{-5} &= 1 & \ell'_0 &= 8 \\ \ell'_{-4} &= 2 & \ell'_1 &= 6 \\ \ell'_{-3} &= 4 & \ell'_2 &= 3 \\ \ell'_{-2} &= 5 & \ell'_3 &= 1 \\ \ell'_{-1} &= 7 \end{aligned}$$

であるので,

$$\#\tilde{V}_9 > \frac{8 \cdot 9}{2}$$

が成立する. 補題 2.18 より,

$$\left(\bigoplus_{(\alpha, \beta) \in \tilde{V}_9} K v^\alpha w^\beta \right) \cap (v-1, w-1)^8 K[v^{\pm 1}, w^{\pm 1}]$$

の中に 0 でない元が存在する. (5.7) より $[\mathfrak{p}^{(9-1)}]_{9d-a-b-c} \neq 0$ である.

証明終

命題 5.7 a, b, c は定理 5.1 の 4) の仮定を満たし, h が negative curve であるとする. このとき, 次は同値である.

- 1) negative curve は CRS でない.
- 2) $n_0 \geq 9$
- 3) $\frac{s_2}{s_3} < \frac{6}{5}$

但し, n_0 は

$$nd - a - b - c \geq \frac{abc}{d}(n - 1)$$

を満たす整数 n の最大値である.

証明の前に, 次のことに注意する.

注意 5.8 A) (5.1), (5.2) より,

$$nd - a - b - c \geq \frac{abc}{d}(n - 1) \iff n \leq \frac{4\frac{s_2}{s_3} - 3 - \frac{10}{s_3}}{6\frac{s_2}{s_3} - 7}$$

が成り立つ. ($d = 2c$ に注意.)

B) $\frac{4x-3}{6x-7}$ は $x \in \left(\frac{7}{6}, \infty\right)$ で単調減少である.

命題 5.7 の証明 1) $\implies$ 2) は補題 5.6 の i) による. また, $\frac{s_2}{s_3} < \frac{6}{5}$ のとき, 補題 5.6 より $[p^{(9-1)}]_{9d-a-b-c} \neq 0$ であるので, 3) $\implies$ 1) が従う.

2) $\implies$ 3) を示す. $\frac{s_2}{s_3} \geq \frac{6}{5}$ を仮定する. このとき,

$$\frac{4\frac{s_2}{s_3} - 3 - \frac{10}{s_3}}{6\frac{s_2}{s_3} - 7} < \frac{4\frac{s_2}{s_3} - 3}{6\frac{s_2}{s_3} - 7} \leq \frac{4\frac{6}{5} - 3}{6\frac{6}{5} - 7} = 9$$

である. したがって, 注意 5.8 より $n_0 \leq 8$ である.

証明終

(5.1), (5.2) より, $\frac{s_2}{s_3} < \frac{6}{5}$ であることと, $c > \frac{21}{17}b$ であることは同値である. よって, 定理 5.1 の 4) の ii) が示された.

例 5.9 $a = 5$, b を十分大きな素数とし, c を

$$\left[\frac{21}{17}b\right] + 1, \left[\frac{21}{17}b\right] + 2, \left[\frac{21}{17}b\right] + 3, \left[\frac{21}{17}b\right] + 4, \left[\frac{21}{17}b\right] + 5$$

の中で $b \equiv 2c \pmod{5}$ を満たすものとする. このとき, a, b, c は定理 5.1 の 4) の仮定を満たし, h が negative curve になる. 定理 5.1 より, negative curve は CRS でない.

参考文献

- [1] S. D. CUTKOSKY, *Symbolic algebras of monomial primes*, J. reine angew. Math. **416** (1991), 71-89.

- [2] 海老名智治『次数 5 のモノミアル曲線のシンボリック・リース環について』明治大学大学院理工学研究科修士論文, 2017.
- [3] J. L. GONZÁLEZ AND K. KARU, *Some non-finitely generated Cox rings*, Compos. Math. **152** (2016), 984–996.
- [4] S. GOTO, K. NISHIDA AND Y. SHIMODA, *The Gorensteinness of symbolic Rees algebras for space curves*, J. Math. Soc. Japan **43** (1991), 465–481.
- [5] S. GOTO, K. NISHIDA AND K.-I. WATANABE, *Non-Cohen-Macaulay symbolic blow-ups for space monomial curves and counterexamples to Cowsik’s question*, Proc. Amer. Math. Soc. **120** (1994), 383–392.
- [6] J. HERZOG, *Generators and relations of Abelian semigroups and semigroup rings*, Manuscripta Math. **3** (1970), 175–193.
- [7] C. HUNEKE, *Hilbert functions and symbolic powers*, Michigan Math. J. **34** (1987), 293–318.
- [8] K. KURANO AND K. NISHIDA, *Infinitely generated symbolic Rees rings of space monomial curves having negative curves*, to appear in Michigan Math. J.
- [9] 内澤京也『次数 8 のモノミアル曲線のシンボリック・リース環について』明治大学大学院理工学研究科修士論文, 2017.

謝辞

本修士論文は、藏野研究室先輩の海老名智治さんと、内澤京也さんの修士論文を基にして作られています。特に、条件 EU といった先輩方の手法を大変参考にさせて頂きました。先輩方には深く感謝の意を申し上げます。

6 年間にわたり、丁寧かつ熱心な授業をして下さった数学科の教員の皆様には、この場を借りてお礼申し上げます。特に、副ゼミでお世話になった野原雄一准教授からは興味深い質問を沢山頂きました。

最後に、筆者の指導教員である藏野和彦教授からは、毎回のゼミナールで、熱心なご指導と興味深い知識を頂きました。また、本論文の完成に辿り着けたのも、藏野教授の激励と寛大な姿勢によるものです。心より感謝の意を申し上げます。