2017年度藏野研究室卒業論文
「超越数について」

明治大学理工学部数学科
青木雅史
坂上隆信
福島恭之介
山中宙夢

2018年2月23日

目次

1　序

古代ギリシャの幾何学では、作図問題が研究されていた。**プラトン** [*1]は、複雑な道具を用いれば数多くの図形の作図が可能だが、それでは幾何学的な美しさを損なう恐れがあると考え、作図に利用可能な道具は定木とコンパスのみに制限することを提案した。定木は目盛りがなく 2 点を結ぶ線分を引くこと、コンパスは 1 点を中心に他の 1 点を通る円を描くことだけができる。

この制限下でも、線分の n 等分、角の 2 等分、平行線、正三角形、正五角形、正 n 角形が与えられたときの正 $2n$ 角形など、様々な図形の作図法が古代ギリシャにおいて既に知られていた。これらの作図法を、紀元前 300 年頃に**ユークリッド** [*2]は『**原論** [*3]』にまとめ、幾何学の体系を作り上げた。しかし、定木とコンパスでは、解を持つはずの幾何学的図形でも作図が困難なものが存在した。その中でも、ギリシャの**三大作図問題**として次の問題が知られている。

問題 1.1. 次の 3 つの図形は作図可能であるか？

(1) **立方体倍積問題**
　与えられた立方体の 2 倍の体積を持つ立方体の作図
(2) **角の 3 等分問題**
　与えられた角の 3 等分線の作図
(3) **円積問題**
　与えられた円と等しい面積を持つ正方形の作図

これらは大変困難な問題である。古代ギリシャ人はこれらの作図が不可能であることに気づいていたともいわれている。しかし、古代ギリシャ人には、これらの作図が可能であることも、不可能であることも証明することはできなかった。

これらの問題が解決されたのは 19 世紀に入ってからのことであった。1837 年に **ワンツェル** [*4]は、代数学の手法によって立方体倍積問題、角の 3 等分問題の作図が不可能で

[*1] プラトン : Prato (紀元前 427-紀元前 347) 古代ギリシャの哲学者で、ソクラテスの弟子でアリストテレスの師である。
[*2] ユークリッド : Euclid (紀元前 300 年頃) 古代ギリシャの数学者で『原論』の著者。
[*3] 原論 : 紀元前 300 年頃にユークリッドがまとめた数学書。全 13 巻。
[*4] ワンツェル : P.Wantzel (1814-1848) 三大作図問題の立方体倍積問題と角の 3 等分問題を解決した。

あることを証明した。円積問題の作図が不可能であることは、1882 年に **リンデマン** [*5]によって、円周率 π が超越数であることが示されたことにより証明された。

超越数とは、どんな有理数係数の零でない多項式の根にもならない複素数のことである。対して、有理数係数の零でない多項式の根になる複素数を**代数的数**という。任意の有理数 r は有理数係数の 1 次式 $x-r$ の根であるから代数的数である。また $\sqrt{2}$ は無理数だが、2 次式 x^2-2 の根であるため代数的数である。他に $\sqrt{5}+\sqrt[3]{4}$ や $i=\sqrt{-1}$ といった、自然に思いつく数の多くは代数的数である。

このように、代数的数が存在することは明らかだが、超越数が存在することは明らかではない。最初の超越数の発見は 1844 年の**リューヴィル** [*6]によるもので、

$$\alpha = \frac{1}{2^{1!}} + \frac{1}{2^{2!}} + \cdots + \frac{1}{2^{n!}} + \cdots \tag{1.1}$$

という人工的に作られた級数値であった。非人工的な超越数に関しては、**エルミート** [*7]が 1873 年に自然対数の底 e が超越数であることを証明した。

また 1882 年には、リンデマンが指数関数の値の超越性に関して次の定理を証明した。

定理 1.2. (**リンデマンの定理**) 相異なる代数的数 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ と 0 でない代数的数 β_1, $\beta_2, \ldots \beta_n$ に対して

$$\beta_1 e^{\alpha_1} + \beta_2 e^{\alpha_2} + \cdots + \beta_n e^{\alpha_n} \neq 0$$

が成立する。

この定理により、 $e, \pi, \log 2, \sin\alpha = \dfrac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i}$ ($\alpha \neq 0$ は代数的数) などの非人工的な数が超越数であることがわかる。

ヒルベルト[*8]は 1900 年のパリの国際数学者会議において **23 の問題**[*9]を提出した。そのうちの第 7 問題は超越数に関わる次のような問題であった。

問題 1.3. 代数的数 $\alpha \neq 0, 1$ と有理数でない代数的数 β に対して α^β が超越数であることを示せ。

[*5] リンデマン : C.L.F.Lindemann (1852-1939) 円周率 π が超越数であることを証明し、円積問題を解決した。

[*6] リューヴィル : J.Liouville (1809-1882) 数論、解析学、物理学の各分野で活躍した。

[*7] エルミート : C.Hermite (1822-1901) 楕円関数を用いた一般的な 5 次方程式の解法を発見した。

[*8] ヒルベルト : D.Hilbert (1862-1943) ドイツの数学者で、抽象代数学、代数的整数論、幾何学の公理系などを研究した。

[*9] 23 の問題 : 1900 年の国際数学者会議においてヒルベルトが発表した 23 個の問題。リーマン予想などが含まれる。

この問題は 1934 年に **ゲルフォント** *10と**シュナイダー***11によって独立に解決されたため、**ゲルフォント-シュナイダーの定理**と呼ばれている。ゲルフォント-シュナイダーの定理により、 $2^{\sqrt{2}},\ e^{\pi} = (-i)^{-2i},\ \log_{10} 2$ などが超越数であることが示された。e^{π} は**ゲルフォントの定数**と呼ばれている。また 1929 年に**マーラー** *12は

$$\beta = \frac{1}{2^{2^0}} + \frac{1}{2^{2^1}} + \frac{1}{2^{2^2}} + \cdots + \frac{1}{2^{2^n}} + \cdots \tag{1.2}$$

が超越数であることを証明した。

1966 年に**ベイカー** *13は、ゲルフォント-シュナイダーの定理の一般化として次の定理を証明した。

定理 1.4. (**ベイカーの定理**) 0 でない代数的数 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n$ に対して、

$$\beta_0 + \beta_1 \log \alpha_1 + \beta_2 \log \alpha_2 + \cdots + \beta_n \log \alpha_n \neq 0$$

が成立する。

ベイカーの定理から、 $\gamma = e^{\beta_0}\alpha_1^{\beta_1} \cdots \alpha_n^{\beta_n}$ が超越数であることがわかる。実際 γ が代数的数なら、 $\beta_0 + \beta_1 \log \alpha_1 + \cdots + \beta_n \log \alpha_n - \log \gamma = 0$ となり、定理と矛盾する。また $\pi = i \log(-1)$ であるから、代数的数 $\alpha \neq 0, \beta$ に対して $e^{\alpha+\pi\beta}$ や、$\pi + \log 2$ も超越数である。

また自然に思いつく多くの複素数は代数的数であるが、**カントール** *14は 1874 年に超越数の存在について、次のような定理を証明した。

定理 1.5. 代数的数全体の集合 $\overline{\mathbb{Q}}$ の濃度は自然数全体の集合 $\mathbb{N}$ の濃度に等しい。

この定理は複素数のほとんどすべてが超越数であることを意味している。

この論文の目的は、円積問題と π の超越性の関係を解説し、超越数の具体例についてまとめることがである。

第 2 章では、定木とコンパスでの作図が可能になるための条件を求める。

---

*10ゲルフォント：A.O.Gelfond (1906-1968) ソ連の数学者で、数論、複素解析などを研究した。

*11シュナイダー：Th.Shcneider (1911-1988) 有理形関数の値の超越性に関するシュナイダーの定理を証明した。

*12マーラー：K.Mahler (1903-1988) チャンパノウン数が超越数であることを証明した。

*13ベイカー：A.Baker (1939-) ディオファントス方程式に関する研究でフィールズ賞を獲得した。

*14カントール：G.F.L.P.Cantor (1845-1918) 自然数の集合と実数の集合の間に全単射な写像が存在しないことを証明した。

第 3 章では、(1.1) や (1.2) といった級数値が超越数であることを証明する。これにより超越数の存在が示される。

第 4 章では、円周率 π が超越数であることを証明し、円積問題を解決する。

第 5 章では、リンデマンの定理 (定理 1.2) を弱めた定理を証明し、$e, \log 2, \sin\alpha$ ($\alpha \neq 0$ は代数的数) などが超越数であることを示す。

超越数に関しては『無理数と超越数 (塩川宇賢 著)』に書かれていることを、自分らの言葉で丁寧に説明を加えた。

2　コンパスと定木による作図、円積問題

P_0 は、与えられた $\mathbb{R}^2$ の部分集合とする。以下、作図において許される操作は、次の 2 つであるとする。

- **定木** P_0 内の 2 点を通る直線を引く。
- **コンパス** P_0 内の 2 点をとり、片方の点を中心として、他の点を通る円を描く。

例 2.1. A、B は P_0 の異なる 2 点とする。以下、A を通る直線 AB の垂線を作図する。

(1) 中心を A、半径を AB とする円を描き、直線 AB との交点を C とする。
(2) 中心を B、半径を BC とする円を描く。
(3) 中心を C、半径を CB とする円を描く。
(4) (2) と (3) で描いた円の交点をそれぞれ D、E とし、直線 DE を引くと、これが直線 AB に対する点 A を通る垂線になる。

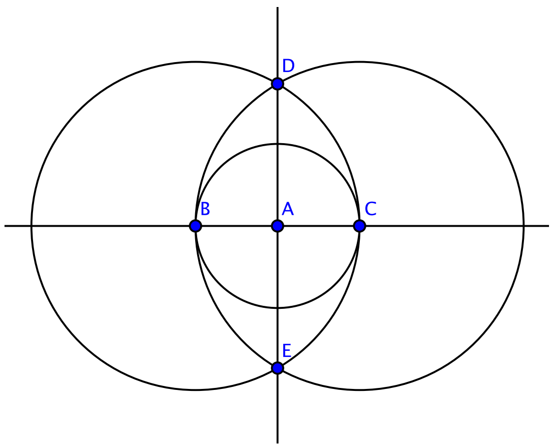

図 1　垂線の作図

例 2.2. p_1, p_2 は P_0 の異なる 2 点とする。このとき、線分 p_1p_2 の中点を以下の手順で見つけることができる。

(1) 直線 p_1p_2 を引く。(定木)
(2) p_1 を中心として p_2 を通る円を描く。(コンパス)
(3) p_2 を中心として p_1 を通る円を描く。(コンパス)
(4) r_1r_2 をこれらの円の交点とする。
(5) 直線 r_1r_2 を引く。(定木)
(6) r_3 を直線 p_1p_2 と r_1r_2 の交点とする。

このとき r_3 が線分 p_1p_2 の中点である。

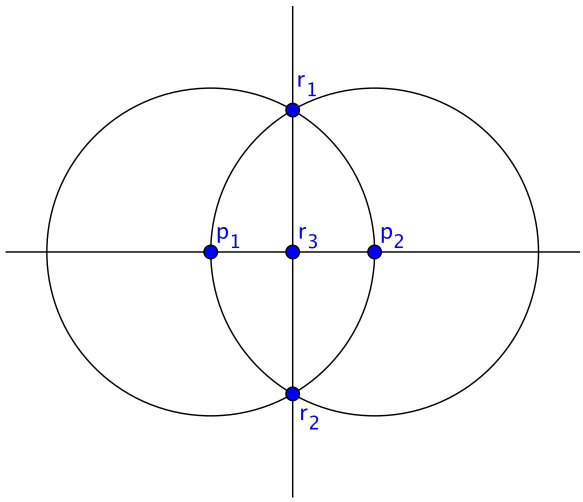

図 2　垂直二等分線の作図

系 2.3. P_0 の異なる 3 点 A, B, C が与えられ、A は直線 BC 上に存在しないとする。直線 BC に対する A を通る垂線を作図する。

(1) 中心が A で C を通る円を描き、直線 BC とのもう 1 つの交点を C′ とする。[15]
(2) 例 2.2 の方法で線分 CC′ の中点を見つけ、その点を D とする。
このとき、線分 AD が直線 BC に対する A を通る垂線となる。

[15] この円と直線 BC が接する場合は、B と C の役割を入れかえて考える。

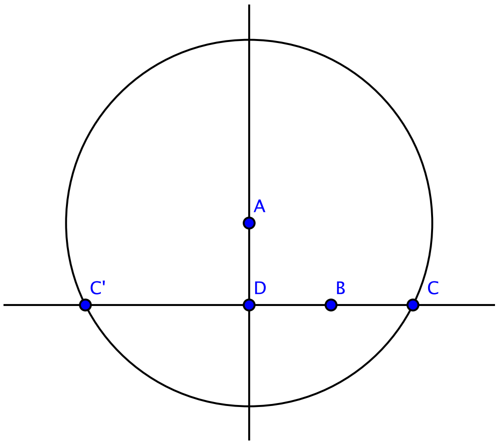

図 3　直線上にない点からの垂線の作図

命題 2.4. P_0 の異なる 3 点 A, B, C が与えられたとする。このとき、定木とコンパスにより、長さが移せる。つまり、C を中心として半径 AB の円を描くことができる。

証明　以下の手順で作図する。

(1) 中心を A、半径を AB とする円を描く。
(2) 線分 AC に対する A を通る垂線を引き、円との交点を B′ とする。
(3) 線分 AB′ に対する B′ を通る垂線を引く。
(4) 線分 AC に対する C を通る垂線を引き、(3) で引いた直線との交点を D とする。
(5) AB=AB′=CD となり、C を中心として半径が AB の円を描くことができる。

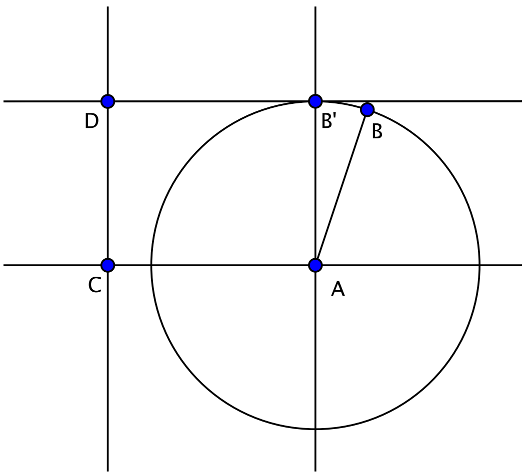

図 4　長さの移動

証明終

命題 2.5. $P_0 = \{(0,0), (1,0), (x_1, y_1), \ldots, (x_r, y_r)\}$ とする。a, b, k は $0, 1, x_1, x_2, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_r$ の中の 3 つの数とする。このとき

(i) $(a+b, 0)$　　(ii) $(a-b, 0)$　　(iii) $(ab, 0)$　　(iv) $(b/a, 0)$　　(v) $(\sqrt{k}, 0)$

を、P_0 から作図によって見つけることができる。ただし、(iv) では $a \neq 0$、(v) では $k > 0$ と仮定する。

証明　まず、座標軸 $x = 0$ と $y = 0$ を作図する。このとき (x_i, y_i) を通り、座標軸に垂線を描けば、$(x_i, 0), (0, y_i)$ さらに $(0, x_i), (y_i, 0)$ を見つけることができることに注意する。よって、仮定より $(a, 0), (b, 0), (k, 0)$ を見つけることは可能である。

(i) と (ii) を示す。まず A$(a, 0)$ と B$(b, 0)$ $(b > 0)$ を見つける。

(1) BO の長さを取り、中心を A、半径を長さ BO とする円を描く。
(2) (2) で描いた円と x 軸との交点を小さい方から C、D とする
(3) C の座標は $(a-b, 0)$、D の座標は $(a+b, 0)$ となる。

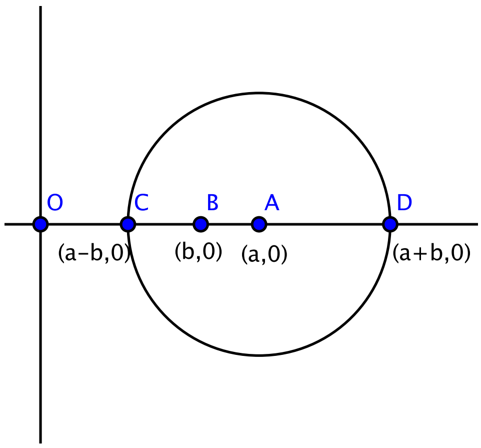

図 5　加法と減法

(iii) を示す。まず B$(a, 0)$ と C$(0, b)$ を見つける。A$(0, 1)$ とする。

(1) A と B を通る直線を引く。
(2) 直線 AB に平行で C を通る直線を引き、x 軸との交点を D とする。[*16]
(3) D の座標は、$(ab, 0)$ となる。

[*16] まず系 2.3 を用いて、AB と直交して C を通る直線を引く。次に、例 2.1 を用いて、その直線と直交して C を通る直線を引けばよい。平行線の作図が可能であることは、後でも使われる。

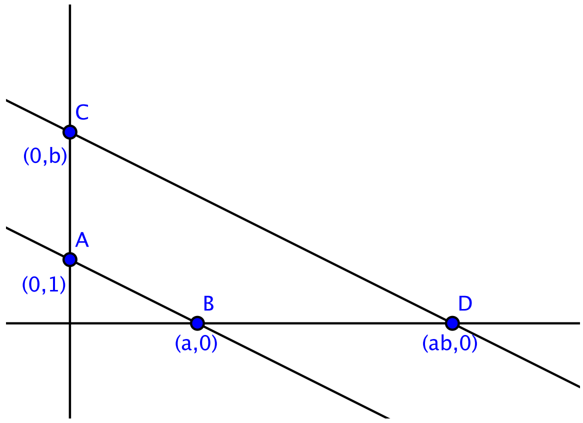

図 6　乗法

(iv) を示す。まず B$(0, a)$ と C$(0, b)$ を見つける。A$(1, 0)$ とする。

(1) A と B を通る直線を引く。
(2) 直線 AB と平行で C を通る直線を引き、x 軸との交点を D とする。
(3) D の座標は、$(b/a, 0)$ となる。

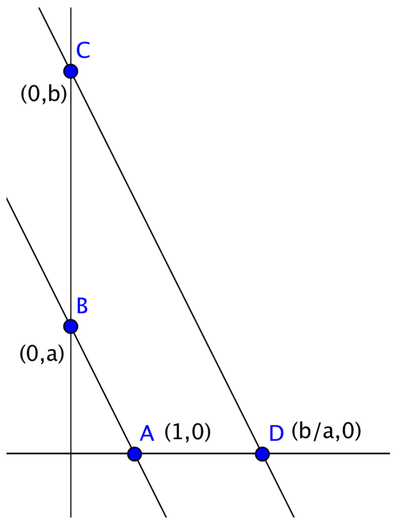

図 7　除法

(v) を示す。C$(k, 0)$ を見つける。A$(-1, 0)$, B$(0, 0)$ とおく。

(1) AC の中点 D をとる。
(2) D を中心、A を通る円を描く。

(3) その円と y 軸との交点を E とおくと、$\mathrm{E}(0,\sqrt{k})$ である。

(4) よって $(0,\sqrt{k})$ を見つけることができる。

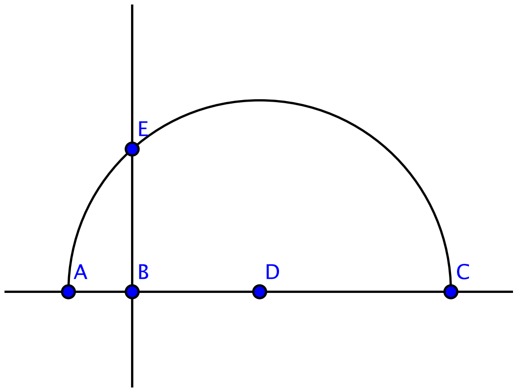

図 8　正の数の開平

証明終

定義 2.6. P_0 は $\mathbb{R}^2$ のある部分集合とする。P_0 の異なる 2 点を結ぶ直線や、P_0 のある点を中心として P_0 の他のある点を通る円を考える。そのような直線と直線、直線と円、円と円の交点を、P_0 から **1 ステップで作図可能な点**ということにする。

定理 2.7. $P_0 = \{(0,0),(1,0)\}$ とおき、1 ステップで作図可能な点 (x_1, y_1) をとる。次に、$P_0 \in (x_1, y_1)$ から 1 ステップで作図可能な点 (x_2, y_2) をとる。このようにして順に (x_1, y_1), (x_2, y_2), $\ldots$, (x_r, y_r) をとる。ここで $K_0 = \mathbb{Q}, K_1 = K_0(x_1, y_1), K_2 = K_1(x_2, y_2), \ldots, K_r = K_{r-1}(x_r, y_r)$ とおく。このとき、$j = 1, \ldots, r$ に対して、x_j および y_j は K_{j-1} 上 2 次以下の多項式の K_j における零点である。

証明　(x_j, y_j) が直線と直線、直線と円、円と円が交わる 3 つの場合を考える。

まず直線と直線の場合を考える。A, B, C, D は $(0,0)$, $(1,0)$, (x_1, y_1),$\ldots$, (x_{j-1}, y_{j-1}) のどれかであり、(x_j, y_j) は直線 AB と直線 CD の交点とする。A, B, C, D の座標を (a,b), (c,d), (e,f), (g,h) とおく。ここで、a, b, c, d, e, f, g, $h \in K_{j-1}$ であることに注意する。直線 AB、直線 CD を引くと、直線 AB の方程式は

$$\frac{y-b}{d-b} = \frac{x-a}{c-a}$$

となり、直線 CD の方程式は

$$\frac{y-f}{h-f} = \frac{x-e}{g-e}$$

となる。この 2 つの方程式から、

$$\frac{d-b}{c-a}(x-a)-\frac{h-f}{g-e}(x-e)=f-b$$

を得る。よって直線と直線の交点の x 座標は K_{j-1} の元である。y 座標についても同様に K_{j-1} の元である。特にこれらは K_{j-1} 上の 1 次式の零点である。

次に直線と円の場合を考える。直線 AB と、中心が C で半径が w の円の交点が (x_j, y_j) としよう。A, B, C の座標は (p,q), (r,s), (t,u) とする。ここで、p, q, r, s, t, $u \in K_{j-1}$ である。w は $(0,0)$, $(1,0)$, (x_1, y_1), $\ldots$, (x_{j-1}, y_{j-1}) の中の 2 点間の距離であるので三平方の定理より求めることができる。よって $w^2 \in K_{j-1}$ である。直線 AB の方程式は

$$\frac{y-q}{s-q}=\frac{x-p}{r-p}$$

となり、円の方程式は

$$(x-t)^2+(y-u)^2=w^2$$

となる。円の方程式も直線の方程式も、係数は K_{j-1} の元であることに注意する。この 2 つの方程式を解いて、

$$(x-t)^2+\left(\frac{s-q}{r-p}(x-p)+q-u\right)^2=w^2$$

を得る。よって直線と円の交点の x 座標は K_{j-1} 上の 2 次の多項式の零点である。y 座標も同様に成り立つ。

最後に円と円の場合だが、これは直線と円の場合に帰着させることができる。 **証明終**

系 2.8. 与えられた点 (a,b) を作図する方法が存在するならば、a, b は、2 次方程式を有限回解いて得られる代数的数である。

次の問題は、ギリシャの三大作図問題の一つの円積問題と呼ばれる。

円積問題：半径 1 の円の面積 (π である) と同じ面積を持つ正方形を、定木とコンパスを用いて作図することができるか？

命題 2.9. 円積問題は否定的である。

証明 この作図は点の初期集合 $P_0 =\{(0,0),\ (1,0)\}$ から $(0,\sqrt{\pi})$ を作図することと同値である。$(0,\sqrt{\pi})$ が作図できれば系 2.5 の (5) より $(0,\pi)$ は容易に作図できる。そのような作図が存在するならば π は $\mathbb{Q}$ 上代数的である。しかし、定理 4.2 で述べるように π は $\mathbb{Q}$ 上代数的ではない。よって定理が成り立つ。 **証明終**

3　ある級数の値の超越性

3.1　代数的数と超越数

定義 3.1. 整数 $a_0, a_1, \ldots, a_n$ を係数とする零でない多項式

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 \tag{3.1}$$

の根、すなわち $P(\alpha) = 0$ となる複素数 α を**代数的数**という。代数的数全体の集合を $\overline{\mathbb{Q}}$ と書く。代数的数でない複素数を**超越数**という。

補題 3.2. α, β を代数的数とする。このとき、$\alpha \pm \beta$, $\alpha\beta$, $\dfrac{1}{\alpha}$ も代数的数である。

証明　α, β の満たす有理係数の代数方程式をそれぞれ

$$\begin{aligned} p(x) &= x^m - a_1 x^{m-1} + \cdots + (-1)^m a_m \\ q(x) &= x^n - b_1 x^{n-1} + \cdots + (-1)^n b_n \end{aligned}$$

とおく。つまり、$p(\alpha) = 0$, $q(\beta) = 0$ であり、a_i, b_j は有理数である。代数学の基本定理より、$\alpha = \alpha_1$, $\beta = \beta_1$ として、α_1, α_2, $\ldots$, α_m, β_1, β_2, $\ldots$, $\beta_n \in \mathbb{C}$ をうまく選んで

$$p(x) = \prod_{i=1}^{m} (x - \alpha_i), \quad q(x) = \prod_{j=1}^{n} (x - \beta_j)$$

と書ける。すると、a_1, a_2, $\ldots$, a_m は α_1, α_2, $\ldots$, α_m の基本対称式である。また、b_1, b_2, $\ldots$, b_n は β_1, β_2, $\ldots$, β_n の基本対称式である。

$$r(x, \lambda_1, \ldots, \lambda_m, \zeta_1, \ldots, \zeta_n) := \prod_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{n} (x - \lambda_i - \zeta_j)$$

とおくと、$r(x, \lambda_1, \ldots, \lambda_m, \zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ は x, ζ_1, $\ldots$, ζ_n の多項式とみると、その係数は λ_1, $\ldots$, λ_m の整数を係数とする対称式となる。したがって、対称式の基本定理より $r(x, \alpha_1, \ldots, \alpha_m, \zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ は有理係数の x, ζ_1, $\ldots$, ζ_n に関する多項式である。さらに、$r(x, \alpha_1, \ldots, \alpha_m, \zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ を x に関して整理すると各係数は ζ_1, $\ldots$, ζ_n の対称式である。したがって、対称式の基本定理より $r(x, \alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \ldots, \beta_n)$ は有理数を係数とする x の多項式である。よって、$\alpha + \beta$ は $r(x, \alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \ldots, \beta_n) = 0$ の解であるので $\alpha + \beta$ は代数的である。

同様にして、$\alpha - \beta$, $\alpha\beta$, $\dfrac{1}{\alpha}$ も代数的である。　証明終

補題 3.2 から次の系が直ちに従う。

系 3.3. $\overline{\mathbb{Q}}$ は体である。

定義 3.4. 代数的数 α を根に持つ多項式 (3.1) の形の中で次数が最小かつ $a_n > 0$, a_{n-1}, $\ldots$, a_0 が互いに素となるものがただ一つ定まる。これは既約で α の**最小多項式**という。

定義 3.5. α の最小多項式の次数が n であるとき、α を n **次代数的数**という。

定義 3.6. $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{C}$ に対して、零でない m 変数の整数係数多項式 $P(x_1, \ldots, x_m)$ が存在して, $P(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) = 0$ が成り立つとき $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ は**代数的従属**という。[*17] そうでないとき**代数的独立**という。[*18]

系 3.7. $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{C}$ が代数的独立ならば $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ は超越数である。

注意 3.8. 逆は成り立たない。

例 3.9. $P(x_1, x_2) = x_1 - x_2$ とすると $P(\pi, \pi) = 0$ なので、x_1, x_2 は代数的従属である。[*19]

系 3.7 の証明 $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ のうち代数的であるものがあるとする。α_1 を代数的とすると、零でない多項式 $f(x)$ が存在して $f(\alpha_1) = 0$ となるものがある。ここで $P(x_1, x_2, \ldots, x_m) = f(x_1)$ とおくと、$P(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m) = f(\alpha_1) = 0$ である。
したがって、$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ は代数的従属である。 証明終

3.2 リューヴィル数

定理 3.10. (リューヴィルの不等式) $n\ (\geq 2)$ 次代数的数 α に対して正定数 $c = c(\alpha)$ が存在し、不等式

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{c}{q^n}$$

がすべての有理数 $\dfrac{p}{q}$ $(q > 0, p, q \in \mathbb{Z})$ に対して成り立つ。

[*17] $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{C}$ が代数的従属 $\iff \exists P(x_1, \ldots, x_m) \neq 0\ s,t\ P(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) = 0$

[*18] $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{C}$ が代数的独立 $\iff \forall P(x_1, \ldots, x_m) \neq 0, P(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \neq 0$

[*19] π の超越性については定理 4.2

証明 $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < 1$ と仮定する。α の最小多項式 $P(x)$ を $x = \alpha$ で Taylor 展開する。

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} P^{(k)}(\alpha)(x-\alpha)^k$$

$x = \frac{p}{q}$ を代入すると、$P(\alpha) = 0$ より

$$\begin{aligned}\left|P\left(\frac{p}{q}\right)\right| &= \left|\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} P^{(k)}(\alpha)\left(\frac{p}{q} - \alpha\right)^k\right| \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \left|P^{(k)}(\alpha)\right| \cdot \left|\frac{p}{q} - \alpha\right|^k\end{aligned}$$

となる。$\left|\frac{p}{q} - \alpha\right| < 1$ より $\left|\frac{p}{q} - \alpha\right|^k < \left|\frac{p}{q} - \alpha\right|$ であるから

$$\left|P\left(\frac{p}{q}\right)\right| < \left|\frac{p}{q} - \alpha\right| \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \left|P^{(k)}(\alpha)\right|$$

となり、$P(x)$ は 2 次以上の既約多項式なので $P\left(\frac{p}{q}\right) \neq 0$ となることに注意すると

$$\begin{aligned}\left|P\left(\frac{p}{q}\right)\right| &= \left|a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \cdots + a_0\right| \\ &= \frac{1}{q^n}\left|a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \cdots + a_0 q^n\right| \geq \frac{1}{q^n}\end{aligned}$$

となる。よって

$$\frac{1}{q^n} \leq \left|P\left(\frac{p}{q}\right)\right| < \left|\frac{p}{q} - \alpha\right| \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \left|P^{(k)}(\alpha)\right|$$

となり、$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \left|P^{(k)}(\alpha)\right| \neq 0$ に注意する。ここで、$c = \min\left\{\frac{1}{2}, \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \left|P^{(k)}(\alpha)\right|\right)^{-1}\right\}$ とすると

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{c}{q^n}$$

が成り立つ。特に $c<1$ なので $\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|\geq 1$ のときは

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|\geq 1>\frac{c}{q^n}$$

が成り立つ。 証明終

定義 3.11. α は実数で任意の正整数 ν に対して

$$0<\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q^\nu}$$

を満たす有理数 $\frac{p}{q}$ $(p\in\mathbb{Z},\ q\in\mathbb{N})$ が少なくとも一つ存在するとき、α を**リューヴィル数**という。

例 3.12. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}2^{-k!}$ はリューヴィル数である。

証明

$$\sum_{k=0}^{N}2^{-k!}<\sum_{k=0}^{N}2^{-k}<\sum_{k=0}^{\infty}2^{-k}=2$$

となる。数列 $\displaystyle\sum_{k=0}^{N}2^{-k!}$ は単調増加なので、$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}2^{-k!}$ は収束する。

$\displaystyle\alpha:=\sum_{k=0}^{\infty}2^{-k!}$, $q_m=2^{m!}$, $\displaystyle p_m=\sum_{k=0}^{m}2^{m!-k!}$ とすると、$\displaystyle\frac{p_m}{q_m}=\sum_{k=0}^{m}2^{-k!}$ である。

$$\begin{aligned}
0<\alpha-\frac{p_m}{q_m}&=\sum_{k=m+1}^{\infty}2^{-k!}\\
&=\frac{1}{2^{(m+1)!}}+\frac{1}{2^{(m+2)!}}+\cdots\\
&=\left(\frac{1}{2^{m!}}\right)^{m+1}+\left(\frac{1}{2^{m!}}\right)^{(m+1)(m+2)}+\cdots\\
&<\left(\frac{1}{2^{m!}}\right)^{m+1}+\left(\frac{1}{2^{m!}}\right)^{m+1}\times\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2^{m!}}\right)^{m+1}\times\frac{1}{2^2}+\cdots\\
&=\left(\frac{1}{2^{m!}}\right)^{m+1}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots\right)\\
&=\left(\frac{1}{2^{m!}}\right)^{m+1}\times 2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&< \frac{1}{2^{m\cdot m!}} \\
&= \frac{1}{q_m^m}
\end{aligned}
$$

したがって、$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k!}$ はリューヴィル数である。 証明終

命題 3.13. リューヴィル数は超越数である。

証明 α が有理数のとき、$\alpha = \dfrac{a}{b}$ $(a, b \in \mathbb{Z}, b > 0)$ とし、正整数 ν を $2^{\nu-1} > b$ となるようにとる。$p, q \in \mathbb{Z}$, $q > 1$, $\dfrac{p}{q} \neq \alpha$ とする。

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| = \left|\frac{a}{b} - \frac{p}{q}\right| = \left|\frac{aq - bp}{bq}\right| \geq \frac{1}{bq} > \frac{1}{2^{\nu-1}\cdot q} \geq \frac{1}{q^\nu}$$

であるから、α はリューヴィル数でない。

次に α が有理数でなく、リューヴィル数かつ n 次代数的数であると仮定する。仮定より $n \geq 2$ である。
定理 3.10 より $0 < c \leq 1$ が存在して、任意の整数 p, q $(q > 0)$ に対して

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{c}{q^n}$$

が成り立つ。正整数 ν を $2^{\nu-n} > \dfrac{1}{c}$ となるようにとる。
α はリューヴィル数なので、整数 p_0, q_0 $(q_0 > 1)$ が存在し

$$\left|\alpha - \frac{p_0}{q_0}\right| < \frac{1}{q_0^\nu}$$

が成り立つ。しかし、このとき

$$\left|\alpha - \frac{p_0}{q_0}\right| \leq \frac{1}{2^{\nu-n}\cdot q_0^n} < \frac{c}{q_0^n}$$

となり、矛盾する。 証明終

3.3 代数的整数

定理 3.14. 有限個の代数的数 α, β, $\ldots$, γ を含む最小の体を $\mathbb{Q}(\alpha, \beta, \ldots, \gamma)$ と書き、代数体と呼ぶ。このとき、$\mathbb{Q}(\alpha, \beta, \ldots, \gamma) = \mathbb{Q}(\omega)$ となる代数的数 ω が存在する。

証明 K を標数 0 の体、α, β は K 上代数的とし、f, g をそれぞれ α, β の K 上の最小多項式とする。[*20] $\alpha = \alpha_1$ として f の解を $\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_t$, $\beta = \beta_1$ として g の解を $\beta_1, \ldots, \beta_s$ とする。

$$\begin{array}{c} K \subset K(\alpha_1, \beta_1) \subset \overline{K} \\ \rotatebox{90}{$\in$} \\ \alpha_1, \ldots, \alpha_t, \beta_1, \ldots, \beta_s \end{array}$$

である。ここで $c \in \mathbb{Q}$ を、$1 \leq i, j \leq t$, $1 \leq k, \ell \leq s$, $i \neq j$ を満たすすべての i, j, k, ℓ に対して

$$c \neq \frac{\beta_k - \beta_\ell}{\alpha_i - \alpha_j}$$

を満たすようにとる。[*21]このとき

$$K(\alpha_1, \beta_1) = K(c\alpha_1 + \beta_1)$$

を示す。この操作を繰り返すことで、代数的数 ω をとれる。

(1) $K(\alpha_1, \beta_1) \supset K(c\alpha_1 + \beta_1)$ は明らか。

(2) $c\alpha_1 + \beta_1 = \omega$ とする。$\beta_1 = \omega - c\alpha_1$ より、$g(\omega - c\alpha_1) = 0$ であるから

$$h(x) := g(\omega - cx) \in K(\omega)[x]$$

とすると、$h(\alpha_1) = 0$, $f(\alpha_1) = 0$ である。このとき h と f の共通解は α_1 のみである。なぜならば、共通解が他にもあるとする。その共通解を α_i $(i \geq 2)$ とする。$0 = h(\alpha_i) = g(\omega - c\alpha_i)$ より $\omega - c\alpha_i = \beta_\ell$ となる β_ℓ が存在する。すると、$\omega = c\alpha_1 + \beta_1$ なので

$$c\alpha_1 + \beta_1 - c\alpha_i = \beta_\ell$$
$$c = \frac{\beta_\ell - \beta_1}{\alpha_1 - \alpha_i}$$

となる。これは矛盾である。よって、共通解は α_1 のみである。
$f(x) \in K[x] \subset K(\omega)[x]$ より

$$f(x), h(x) \in K(\omega)[x]$$

[*20] f と g はモニックとは限らないことに注意する。
[*21] $\mathbb{Q}$ は無限体なので、これを満たす c は存在する。

である。$\gcd(f(x), h(x)) = d(x) \in K(\omega)[x]$ で、$d(x)$ はモニックとする。このとき $d(x)$ は $f(x)$ と $h(x)$ の両方を割り切る。$f(x) = \prod_{i=1}^{t}(x-\alpha_i)$ より $d(x)$ は $x-\alpha_i$ の形の式の有限個の積で書ける。f, h の共通解は α_1 のみであるから、$d(x) = x-\alpha_1$ である。

したがって、$d(x) \in K(\omega)[x]$ より $\alpha_1 \in K(\omega)$ である。よって、$\beta_1 = \omega - c\alpha_1$ より $\beta_1 \in K(\omega)$ であるから

$$K(\alpha_1, \beta_1) \subset K(\omega) = K(c\alpha_1 + \beta_1)$$

を得る。

ゆえに、(1) と合わせて $K(\alpha_1, \beta_1) = K(c\alpha_1 + \beta_1)$ である。　証明終

命題 3.15. θ を n 次代数的数とする。$K = \mathbb{Q}(\theta)$ は 1, θ, $\ldots$, θ^{n-1} を基底とする $\mathbb{Q}$ 上のベクトル空間となる。

証明　θ の $\mathbb{Q}$ 上の最小多項式を f とすると、$\deg f = n$ である。

(1) 一次独立性

$$c_0 + c_1\theta + \cdots + c_{n-1}\theta^{n-1} = 0 \quad (c_i \in \mathbb{Q})$$

とする。このとき $1 \leq j \leq n-1$ で $c_j \neq 0$ となる j があるとすると、θ の $\mathbb{Q}$ 上の最小多項式の次数は n 未満となり $\deg f$ の最小性に反する。
したがって、$c_i = 0$ $(0 \leq i \leq n-1)$ である。

(2) $\mathbb{Q}(\theta) = \left\langle 1, \theta, \ldots, \theta^{n-1} \right\rangle$ は明らか。　証明終

以下、この節では $K = \mathbb{Q}(\theta)$、θ は n 次代数的数と仮定する。

命題 3.16. 任意の K の元 α の表し方は

$$\alpha = c_0 + c_1\theta + \cdots + c_{n-1}\theta^{n-1} \quad (c_i \in \mathbb{Q})$$

の形で書け、c_0, c_1, $\ldots$, $c_{n-1} \in \mathbb{Q}$ の α に対して一意的に決まる。

証明　$\alpha = c_0 + c_1\theta + \cdots + c_{n-1}\theta^{n-1} = d_0 + d_1\theta + \cdots + d_{n-1}\theta^{n-1}$ と二通りで書けたとする。

$$(c_0 - d_0) + (c_1 - d_1)\theta + \cdots + (c_{n-1} - d_{n-1})\theta^{n-1} = 0$$

となり、1, θ, $\ldots$, θ^{n-1} は一次独立なので $c_i - d_i = 0$ すなわち $c_i = d_i$ である。　証明終

n を K の次数といい、$[K:\mathbb{Q}] = n$ と書く。θ の $\mathbb{Q}$ 上の最小多項式は $\overline{\mathbb{Q}}$ 内に相異なる n 個の根 $\theta = \theta^{(1)}, \theta^{(2)}, \ldots, \theta^{(n)}$ をもつ。これらを θ の**共役**という。

定理 3.17. $\alpha = c_0 + c_1\theta + \cdots + c_{n-1}\theta^{n-1}$ $(c_0, c_1, \ldots, c_{n-1} \in \mathbb{Q})$ に対して

$$\sigma_i(\alpha) = c_0 + c_1\theta^{(i)} + \cdots + c_{n-1}(\theta^{(i)})^{n-1} \quad (1 \leq i \leq n)$$

と定める。このとき、写像

$$\begin{array}{cccc} \sigma_i: & K & \longrightarrow & \overline{\mathbb{Q}} \\ & \Cup & & \Cup \\ & \alpha & \longmapsto & \sigma_i(\alpha) \end{array}$$

は単射準同型写像である。ただし、$\mathbb{Q}$ の元は動かさない。

証明 f を θ の $\mathbb{Q}$ 上の最小多項式とすると、$\theta^{(i)}$ $(1 \leq i \leq n)$ の最小多項式も f である。

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{Q} \arrow[ddl] \arrow[d] \arrow[ddr] & \\
 & \mathbb{Q}[x] \arrow[d] & \\
\mathbb{Q}(\theta) & \mathbb{Q}[x]/ < f > \arrow[l, "\phi", "\sim"'] \arrow[r, "\psi", "\sim"'] & \mathbb{Q}(\theta^{(i)})
\end{tikzcd}$$

ϕ は x を θ へ、ψ は x を $\theta^{(i)}$ へとそれぞれ写像する。このとき、$\psi\phi^{-1}$ は $\mathbb{Q}(\theta)$ から $\mathbb{Q}(\theta^{(i)})$ への同型写像であり、θ を $\theta^{(i)}$ へと写す。よって、$\sigma_i = \psi\phi^{-1}$ が成り立つ。そして、$\mathbb{Q}$ 上では恒等写像である。 **証明終**

命題 3.18. $K = \mathbb{Q}(\theta)$, $[K:\mathbb{Q}] = n$ とし、$\alpha \in K$ とする。α の $\mathbb{Q}$ 上の最小多項式の次数を m とすると、$\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\alpha) \subset K$ より

$$n = [K:\mathbb{Q}] = [K:\mathbb{Q}(\alpha)][\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}] = [K:\mathbb{Q}(\alpha)] \cdot m$$

なので、m は n を割り切る。

このとき、α の共役 $\alpha = \alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \ldots, \alpha^{(m)}$ は、それぞれ $\{\sigma_1(\alpha), \sigma_2(\alpha), \ldots, \sigma_n(\alpha)\}$ の中にちょうど n/m 個ずつ現れる。

証明

$$\underbrace{\mathbb{Q} \quad \subset \quad \mathbb{Q}(\alpha) \quad \subset \quad K = \mathbb{Q}(\theta) \quad \subset \quad L}_{\text{ガロア拡大}}$$

とすると
$$H := \mathrm{Gal}(L/K) \subset N := \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}(\alpha)) \subset G := \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$$
である。$[K:\mathbb{Q}] = n$, $[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}] = m$ より $\dfrac{\#G}{\#H} = n$, $\dfrac{\#G}{\#N} = m$ である。$\dfrac{\#N}{\#H} = \dfrac{n}{m}$ を ℓ とおき
$$\begin{aligned} N &= p_1 H \cup p_2 H \cup \cdots \cup p_\ell H \\ G &= q_1 N \cup q_2 N \cup \cdots \cup q_m N \end{aligned}$$
と左剰余類に分解する。このとき
$$G = \bigcup_{j,k} q_j p_k H$$
も左剰余類分解である。このとき
$$\{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\} = \{q_i p_j \,\big|\, i = 1, \ldots, m\,;\, j = 1, \ldots, \ell\}$$
となる。このとき、α の共役は $q_1(\alpha)$, $q_2(\alpha)$,. . . , $q_m(\alpha)$ であり、任意の j に対して $p_j(\alpha) = \alpha$ である。よって、$\sigma_1(\alpha), \ldots, \sigma_n(\alpha)$ の中に、α の共役がそれぞれ ℓ 個ずつ現れる。
証明終

定義 3.19. $\alpha \in K$ に対して
$$\|\alpha\| = \max\{|\sigma_1(\alpha)|, \ldots, |\sigma_n(\alpha)|\} = \max\{|\alpha^{(1)}|, \ldots, |\alpha^{(m)}|\}$$
を α のハウスと呼ぶ。

命題 3.20. α, $\beta \in K$ に対して

(1) $\|\alpha + \beta\| \leq \|\alpha\| + \|\beta\|$
(2) $\|\alpha\beta\| \leq \|\alpha\| \cdot \|\beta\|$

が成り立つ。

証明 (1) $\|\alpha + \beta\| = \max\{|\sigma_1(\alpha+\beta)|, \ldots, |\sigma_n(\alpha+\beta)|\} = |\sigma_i(\alpha+\beta)|$ なる i を選ぶ。このとき
$$\begin{aligned} \|\alpha + \beta\| &= |\sigma_i(\alpha+\beta)| \\ &= |\sigma_i(\alpha) + \sigma_i(\beta)| \\ &\leq |\sigma_i(\alpha)| + |\sigma_i(\beta)| \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\le \max\{|\sigma_1(\alpha)|,\dots,|\sigma_n(\alpha)|\} + \max\{|\sigma_1(\beta)|,\dots,|\sigma_n(\beta)|\} \\
&= \|\alpha\| + \|\beta\|
\end{aligned}
$$

である。

(2) $\|\alpha\beta\| = \max\{|\sigma_1(\alpha\beta)|,\dots,|\sigma_n(\alpha\beta)|\} = |\sigma_i(\alpha\beta)|$ なる i を選ぶ。このとき

$$
\begin{aligned}
\|\alpha\beta\| &= |\sigma_i(\alpha\beta)| \\
&= |\sigma_i(\alpha)\cdot\sigma_i(\beta)| \\
&\le |\sigma_i(\alpha)|\cdot|\sigma_i(\beta)| \\
&\le \max\{|\sigma_1(\alpha)|,\dots,|\sigma_n(\alpha)|\}\cdot\max\{|\sigma_1(\beta)|,\dots,|\sigma_n(\beta)|\} \\
&= \|\alpha\|\cdot\|\beta\|
\end{aligned}
$$

である。 証明終

α の K におけるノルムを

$$
N_K(\alpha) = \sigma_1(\alpha)\cdots\sigma_n(\alpha) = \left(\alpha^{(1)}\cdots\alpha^{(m)}\right)^{\frac{n}{m}}
$$

により定義する。解と係数の関係より $\alpha^{(1)}\cdot\alpha^{(2)}\cdots\alpha^{(m)} \in \mathbb{Q}$ であるから、$N_K(\alpha) \in \mathbb{Q}$ である。また、σ_i の単射性より $N_K(\alpha) = 0$ ならば $\alpha = 0$ である。さらに、$\alpha, \beta \in K$ に対して、各 σ_i は準同型写像なので、$N_K(\alpha\beta) = N_K(\alpha)N_K(\beta)$ となる。また、$r \in \mathbb{Q}$ ならば $\sigma_i(r) = r$ より $N_K(r) = r^n$ が成り立つ。

代数的数 α の最小多項式が

$$
P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 \quad (a_i \in \mathbb{Z}) \tag{3.2}
$$

のとき、すなわちモニックであるとき α を**代数的整数**という。代数的整数全体の集合は環をなす。[*22] $\mathbb{Z}$ の元を代数的整数と区別するために**有理整数**と呼ぶ。

系 3.21. 代数的整数で有理数であるものは有理整数である。

証明 α を代数的整数とし、α の最小多項式を (3.2) とする。

$\alpha = \dfrac{p}{q}$ $(\gcd(p,q) = 1,\ q \neq 0)$ とする。このとき

$$
P(\alpha) = \left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \cdots + a_0 = 0
$$

[*22] 補題 3.2 の証明において有理数を整数と読みかえればよい。

であるから

$$p^n = -q(a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_0 q^{n-1})$$

となる。したがって、q は p^n を割り切る。$\gcd(p, q) = 1$ より $q = \pm 1$ となる。よって α は有理整数である。 証明終

命題 3.22. 代数的数 α が

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 \quad (a_i \in \mathbb{Z})$$

の根であるとき、$a_n\alpha$ は代数的整数である。

証明 仮定から

$$P(\alpha) = a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_{n-i}\alpha^{n-i} + \cdots + a_0 = 0$$

より、両辺に a_n^{n-1} を乗じて

$$(a_n\alpha)^n + a_{n-1}(a_n\alpha)^{n-1} + \cdots + a_{n-i}a_n^{i-1}(a_n\alpha)^{n-i} + \cdots + a_0 a_n^{n-1} = 0$$

となる。よって

$$Q(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_{n-i}a_n^{i-1}x^{n-i} + \cdots + a_0 a_n^{n-1}$$

とすると、$Q(x)$ は整数係数のモニック多項式であり $Q(a_n\alpha) = 0$ なので、$a_n\alpha$ は代数的整数である。 証明終

定義 3.23. $d\alpha$ が代数的整数となる最小の正整数 d を α の**分母**といい、$\mathrm{den}(\alpha)$ と書く。

命題 3.24. 代数的数 α, β と自然数 m に対して

(1) $\mathrm{den}(\alpha + \beta) \leq \mathrm{den}(\alpha) \cdot \mathrm{den}(\beta)$
(2) $\mathrm{den}(\alpha\beta) \leq \mathrm{den}(\alpha) \cdot \mathrm{den}(\beta)$
(3) $m\alpha$, $m\beta$ がともに代数的整数ならば $\mathrm{den}(\alpha + \beta) \leq m$

が成り立つ。

証明 $\mathrm{den}(\alpha) = p$, $\mathrm{den}(\beta) = q$ とする。系 3.21 の直前に書かれているが、代数的整数の和、差、積は再び代数的整数であることに注意する。

(1) $pq(\alpha+\beta) = p\alpha q + pq\beta$ は代数的整数である。

(2) $pq\alpha\beta = p\alpha q\beta$ は代数的整数である。

(3) $m(\alpha+\beta) = m\alpha + m\beta$ は代数的整数である。 証明終

命題 3.25. 代数的整数 $\alpha \in K$ のノルム $N_K(\alpha)$ は有理整数である。

証明　α は代数的整数なので (3.3) の形の多項式が存在して

$$P(\alpha) = \alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$$

である。$1 \le i \le n$ に対して

$$\sigma_i(\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_0) = \sigma_i(0)$$

より

$$\sigma_i(\alpha)^n + a_{n-1}\sigma_i(\alpha)^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$$

であるから、$P(\sigma_i(\alpha)) = 0$ である。したがって、$\sigma_i(\alpha)$ は代数的整数である。よって、$N_K(\alpha) = \sigma_1(\alpha)\cdots\sigma_n(\alpha)$ も代数的整数である。$N_K(\alpha) \in \mathbb{Q}$ より $N_K(\alpha)$ は有理整数である。 証明終

特に代数的整数 α が 0 でないならば

$$|N_K(\alpha)| \ge 1$$

である。したがって、0 でない代数的数 $\alpha \in K$ に対して、$d\alpha$ が代数的整数となる正整数 d をとると

$$|N_K(d\alpha)| \ge 1$$

である。さらに

$$1 \le |N_K(d\alpha)| = |\sigma_1(d\alpha)\cdots\sigma_n(d\alpha)| = |\sigma_1(d\alpha)|\cdots|\sigma_n(d\alpha)|$$

である。ここで、$|\sigma_i(d\alpha)| = d|\sigma_i(\alpha)| \le d\|\alpha\|$ $(2 \le i \le n)$ であり、$\sigma_1(d\alpha) = d\alpha$ なので

$$1 \le d^n|\alpha|\cdot\|\alpha\|^{n-1}$$

となる。したがって

$$|\alpha| \ge d^{-n}\|\alpha\|^{-n+1} \tag{3.3}$$

となる。両辺の対数をとることにより次の補題を得る。

補題 3.26. (基本不等式) n 次代数的数 $\alpha \neq 0$ に対して

$$\log|\alpha| \geq -2n\max\{\log\|\alpha\|, \log\operatorname{den}(\alpha)\}$$

が成り立つ。

証明 $\operatorname{den}(\alpha) = d$ とする。(3.3) の対数をとると

$$\log|\alpha| \geq -n\log d + (-n+1)\log\|\alpha\| \tag{3.4}$$

となる。

(1) $\log\|\alpha\| \geq 0$ のとき

$$\begin{aligned}\log|\alpha| &\geq -n\log d - n\log\|\alpha\| \\ &= -n(\log d + \log\|\alpha\|) \\ &\geq -2n\max\{\log d, \log\|\alpha\|\}\end{aligned}$$

である。

(2) $\log\|\alpha\| < 0$ のとき、$d \in \mathbb{N}$ より $\log d \geq 0$ なので

$$-2n\max\{\log\|\alpha\|, \log d\} = -2n\log d \tag{3.5}$$

である。

$$(-n+1)\log\|\alpha\| \geq 0 \geq -n\log d$$

の各辺に $-n\log d$ を加えると、(3.5) より

$$-n\log d + (-n+1)\log\|\alpha\| \geq -2n\log d = -2n\max\{\log\|\alpha\|, \log d\}$$

である。よって (3.4) より

$$\log|\alpha| \geq -n\log d + (-n+1)\log\|\alpha\| \geq -2n\max\{\log\|\alpha\|, \log d\}$$

となる。 **証明終**

3.4 リューヴィル級数の値の超越性

単位円の内部で収束するベキ級数[23]

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} z^{k!}$$

[23]収束の示し方は定理 3.27 の証明の冒頭と同様

をリューヴィル級数という。

定理 3.27. 代数的数 α $(0 < |\alpha| < 1)$ に対して $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \alpha^{k!}$ は超越数である。

証明 ある $0 < |\alpha| < 1$ を満たす代数的数 α に対して、$\beta = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \alpha^{k!}$ が代数的数になると仮定する。まず

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} \alpha^{k!}\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha|^{k!} \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha|^{k} = \frac{|\alpha|}{1-|\alpha|}$$

より $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \alpha^{k!}$ は収束することに注意する。十分大きな k に対して

$$\beta_k = \beta - \sum_{h=1}^{k} \alpha^{h!} = \sum_{h=k+1}^{\infty} \alpha^{h!}$$

とおく。このとき、$\beta_k \in \mathbb{Q}(\alpha, \beta)$ かつ $\beta_k \neq 0$ であることを示す。

$\beta_k = \beta - \displaystyle\sum_{h=1}^{k} \alpha^{h!} \in \mathbb{Q}(\alpha, \beta)$ より前半は明らかである。また

$$\begin{aligned}
\beta_k &= \sum_{h=k+1}^{\infty} \alpha^{h!} = \alpha^{(k+1)!} + \alpha^{(k+2)!} + \cdots \\
&= \alpha^{(k+1)!}(1 + \alpha^{(k+2)!-(k+1)!} + \alpha^{(k+3)!-(k+1)!} + \cdots)
\end{aligned}$$

であるので

$$\alpha^{(k+2)!-(k+1)!} + \alpha^{(k+3)!-(k+1)!} + \cdots \neq -1$$

を示せば $\beta_k \neq 0$ が言える。

$$\begin{aligned}
|\alpha|^{(k+2)!-(k+1)!} + |\alpha|^{(k+3)!-(k+1)!} + \cdots &= |\alpha|^{(k+2)!-(k+1)!}(1 + |\alpha|^{(k+3)!-(k+2)!} + \cdots) \\
&\leq |\alpha|^{(k+2)!-(k+1)!}(1 + |\alpha| + |\alpha|^2 + \cdots) \\
&= \frac{|\alpha|^{(k+2)!-(k+1)!}}{1-|\alpha|} < 1
\end{aligned}$$

が十分大きな k に対して成立する。よって、$\beta_k \neq 0$ であることがわかった。

$n = [\mathbb{Q}(\alpha, \beta) : \mathbb{Q}]$, $m = [\mathbb{Q}(\beta_k) : \mathbb{Q}]$ とする。$\beta_k \in \mathbb{Q}(\alpha, \beta)$ より $m \leq n$ であるから、補題 3.26 より

$$\log |\beta_k| \geq -2m \max\{\log \|\beta_k\|, \log \mathrm{den}\beta_k\} \geq -2n \max\{\log \|\beta_k\|, \log \mathrm{den}\beta_k\} \tag{3.6}$$

である。さらに

$$\|\beta_k\| = \left\|\beta - \sum_{h=1}^{k} \alpha^{h!}\right\| \le \|\beta\| + \left\|\sum_{h=1}^{k} \alpha^{h!}\right\| \le \|\beta\| + \sum_{h=1}^{k} \|\alpha\|^{h!}$$

であり、二項定理より $(1+\|\alpha\|)^{k!} = \displaystyle\sum_{h=0}^{k!} \binom{k!}{h} \|\alpha\|^h$ なので $\displaystyle\sum_{h=1}^{k} \|\alpha\|^{h!} \le (1+\|\alpha\|)^{k!}$ であるから

$$\|\beta_k\| \le \|\beta\| + \sum_{h=1}^{k} \|\alpha\|^{h!} \le \|\beta\| + (1+\|\alpha\|)^{k!} \le c_1^{k!} \tag{3.7}$$

を満たす k に無関係な正定数 c_1 がとれる。[*24]また

$$\begin{aligned}
\mathrm{den}(\beta_k) &= \mathrm{den}\left(\beta - \sum_{h=1}^{k} \alpha^{h!}\right) \\
&\le \mathrm{den}(\beta) \cdot \mathrm{den}\left(\sum_{h=1}^{k} \alpha^{h!}\right) \\
&\le \mathrm{den}(\beta) \cdot (\mathrm{den}(\alpha))^{k!} \\
&\le c_2^{k!}
\end{aligned} \tag{3.8}$$

を満たす k に無関係な正定数 c_2 がとれる。[*25](3.7), (3.8) より

$$\max\{\log\|\beta_k\|, \log\mathrm{den}(\beta_k)\} \le \max\{k!\log c_1, k!\log c_2\}$$

であるから

$$-2n\max\{\log\|\beta_k\|, \log\mathrm{den}(\beta_k)\} \ge -2n\max\{k!\log c_1, k!\log c_2\} = -k!c_3$$

となる。ただし、$c_3 = 2n\max\{\log c_1, \log c_2\}$ である。(3.6) と上式から

$$\log|\beta_k| \ge -k!c_3 \tag{3.9}$$

を得る。一方、k を十分大きくとれば

$$|\beta_k| = \left|\sum_{h=k+1}^{\infty} \alpha^{h!}\right| \le \sum_{h=k+1}^{\infty} |\alpha|^{h!}$$

[*24] c_1 のとりかたとして、例えば $1+\|\alpha\|+\|\beta\|$ がある。

[*25] c_2 のとりかたとして、例えば $\mathrm{den}(\alpha)\cdot\mathrm{den}(\beta)$ がある。

$$
\begin{aligned}
&= |\alpha|^{(k+1)!} + |\alpha|^{(k+2)!} + \cdots \\
&= |\alpha|^{(k+1)!} \underbrace{\left(1 + |\alpha|^{(k+2)!-(k+1)!} + |\alpha|^{(k+3)!-(k+1)!} + \cdots\right)}_{\leq 2} \\
&\leq 2|\alpha|^{(k+1)!}
\end{aligned}
$$

なので、両辺の対数をとると

$$\log|\beta_k| \leq \log 2 + (k+1)! \cdot \log|\alpha|$$

となる。$\log|\alpha| < 0$ より $-c_4 = \log|\alpha|$ とすると上式の右辺は $\log 2 - (k+1)! \cdot c_4$ である。(3.9) より

$$-k! \cdot c_3 \leq \log|\beta_k| \leq \log 2 - (k+1)! \cdot c_4$$

となる。この不等式によって

$$
\begin{aligned}
k! c_3 &\geq (k+1)! c_4 - \log 2 \\
c_3 &\geq (k+1) \cdot c_4 - \frac{1}{k!} \log 2
\end{aligned}
$$

であるが、k が十分大きいと成り立たないので矛盾する。したがって、$\beta = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \alpha^{k!}$ は代数的数である。 証明終

3.5 フレドホルム級数の値の超越性

定理 3.28. (K.Mahler 1929) 整数 $d \geq 2$ と $0 < |\alpha| < 1$ を満たす代数的数 α に対して、$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^{d^k}$ は超越数である。

例 3.29. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-d^k}$ $(d \geq 2,\, d \in \mathbb{Z})$ は超越数である。

命題 3.30. $f(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} z^{d^k}$ に対して

(1) $f(z)$ は単位円の内部で収束する。
(2) $f(z^d) = f(z) - z$ が成立する。

証明

(1) $|z|<1$ のとき

$$\sum_{k=0}^{\infty}|z^{d^k}| \leq \sum_{k=0}^{\infty}|z|^k = \frac{1}{1-|z|}$$

より収束する。

(2) $(z^d)^{d^k} = z^{d^{k+1}}$ より

$$f(z^d) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{d^{k+1}} = \sum_{k=1}^{\infty} z^{d^k} = f(z) - z$$

である。 証明終

$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{d^k}$ をフレドホルム級数という。

$f(z)$ に関する二つの補題を示す。複素数を係数とする有理関数全体のなす体を $\mathbb{C}(z)$ と書く。

補題 **3.31.** $f(z)$ は $\mathbb{C}(z)$ 上超越的である。

証明 $f(z)$ が $\mathbb{C}(z)$ 上代数的であると仮定する。

$$g(t) = t^n + a_{n-1}(z)t^{n-1} + \cdots + a_0(z) \in \mathbb{C}(z)[t]$$

を $f(z)$ の最小多項式とする。$g(f(z)) = 0$ であるから

$$f(z)^n + a_{n-1}(z)f(z)^{n-1} + \cdots + a_0(z) = 0$$

であるので

$$f(z^d)^n + a_{n-1}(z^d)f(z^d)^{n-1} + \cdots + a_0(z^d) = 0$$

となる。命題 3.30 (2) より

$$(f(z)-z)^n + a_{n-1}(z^d)(f(z)-z)^{n-1} + \cdots + a_0(z^d) = 0$$

である。よって、$f(z)$ は

$$h(t) = (t-z)^n + a_{n-1}(z^d)(t-z)^{n-1} + \cdots + a_0(z^d) \in \mathbb{C}(z)[t]$$

の解である。$h(t)$ の t^{n-1} の係数は $-nz + a_{n-1}(z^d)$ で、最小多項式の一意性から

$$a_{n-1}(z) = -nz + a_{n-1}(z^d) \tag{3.10}$$

となる。$a_{n-1}(z)=\dfrac{a(z)}{b(z)}$ とおく。ただし、$a(z),\ b(z)\in\mathbb{C}[z],\ b(z)\neq 0$ で、$a(z)$ と $b(z)$ は互いに素であるとする。$a(z),\ b(z)$ は互いに素より

$$p(z)a(z)+q(z)b(z)=1$$

を満たす $p(z),\ q(z)\in\mathbb{C}[z]$ がある。

$$p(z^d)a(z^d)+q(z^d)b(z^d)=1 \quad \bigl(p(z^d),\ q(z^d)\in\mathbb{C}[z]\bigr)$$

であるので、$a(z^d),\ b(z^d)$ も互いに素である。

(3.10) の分母を払って

$$a(z)b(z^d)=-nzb(z)b(z^d)+a(z^d)b(z)$$

より

$$a(z^d)b(z)=b(z^d)\left(a(z)+nzb(z)\right) \tag{3.11}$$

となる。$b(z^d)$ は $a(z^d)b(z)$ を割り切る。$a(z^d),\ b(z^d)$ は互いに素であるから、$b(z^d)$ は $b(z)$ を割り切る。しかし

$$d\cdot\deg b(z)=\deg b(z^d)\leq\deg b(z)$$

であり、$d\geq 2$ なので、この不等式が成り立つには $\deg b(z)=0$ とならなければならない。よって、$b(z)$ は定数である。$b(z)=1$ としてよい。このとき、$b(z^d)=1$ である。(3.11) より

$$a(z)=-nz+a(z^d) \tag{3.12}$$

である。$a(z)$ は定数でないとする。すなわち $\deg a(z)\neq 0$ と仮定する。このとき

$$\deg a(z)=\deg\bigl(-nz+a(z^d)\bigr)=\deg a(z^d)=d\cdot\deg a(z)$$

となり、これは $d\geq 2$ と $\deg a(z)\neq 0$ に矛盾する。したがって、$\deg a(z)=0$ なので、$a(z)$ は定数である。

よって $a(z)=a(z^d)$ となるので (3.12) より $nz=0$ である。これは、$n\geq 1$ に矛盾する。したがって、$f(z)$ は $\mathbb{C}(z)$ 上超越的である。 証明終

補題 3.32. 任意の正整数 ℓ に対し、次数が ℓ 以下の整係数多項式 $P_0(z),\ \dots,\ P_\ell(z)$ で、そのうち少なくとも一つが 0 でなく、

$$\sum_{i=0}^{\ell} P_i(z)f(z)^i = \sum_{h=0}^{\infty} b_h z^h (= E_\ell(z)) \tag{3.13}$$

と書いたとき

$$b_0 = b_1 = \cdots = b_{\ell^2} = 0$$

を満たすものが存在する。

証明 求める $\ell+1$ 個の多項式を

$$P_i(z) = a_{i0} + a_{i1}z + \cdots + a_{i\ell}z^\ell \quad (0 \le i \le \ell)$$

と書く。$(\ell+1)^2$ 個の係数 $a_{ij} \in \mathbb{Q}$ $(0 \le i, j \le \ell)$ を未知数と考える。(3.13) を z のベキ級数に展開すると

$$\sum_{i=0}^{\ell} P_i(z)f(z)^i = \sum_{i=0}^{\ell}\sum_{j=0}^{\ell} a_{ij}z^j \left(\sum_{k=0}^{\infty} z^{d^k}\right)^i = \sum_{h=0}^{\infty} b_h z^h$$

より b_h は a_{ij} らの一次結合で書ける。連立方程式

$$\begin{cases} b_0 = 0 \\ b_1 = 0 \\ \quad\vdots \\ b_{\ell^2} = 0 \end{cases}$$

は、$\ell^2 + 1 < (\ell+1)^2$ より非自明な有理数解 a_{ij} を持つ。したがって、補題の条件を満たす少なくとも一つは 0 でない多項式 $Q_0(z),\ Q_1(z),\ \dots,\ Q_\ell(z) \in \mathbb{Q}[z]$ が存在する。a_{ij} らの分母すべての積を $d \in \mathbb{N}$ とおき、$P_i(z) = dQ_i(z)$ とおくと、$P_0(z),\ P_1(z),\ \dots,\ P_\ell(z)$ は補題を満たす。 証明終

定理 3.28 の証明 $\beta = f(\alpha)$ を代数的数と仮定とし、$K = \mathbb{Q}(\alpha, \beta)$ とおく。正整数 ℓ に対して補題 3.32 の (3.13) で定義されるベキ級数 $E_\ell(z)$ をとる。補題 3.31 より $f(z)$ は $\mathbb{C}(z)$ 上超越的なので、$E_\ell(z) \ne 0$ である。したがって

$$E_\ell(z) = b_m z^m + b_{m+1}z^{m+1} + \cdots \quad (b_m \ne 0,\ m > \ell^2) \tag{3.14}$$

となる m が存在する。$f(z)$ に $w = z^{d^{k-1}}$ を代入すると、命題 3.30 (2) より、$f(w^d) = f(w) - w$ が成立する。このとき

$$f(z^{d^k}) = f(z^{d^{k-1}}) - z^{d^{k-1}}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(f(z^{d^{k-2}}) - z^{d^{k-2}}\right) - z^{d^{k-1}} \\
&= f(z^{d^{k-3}}) - z^{d^{k-3}} - z^{d^{k-2}} - z^{d^{k-1}} \\
&\vdots \\
&= f(z^{d^0}) - z^{d^0} - z^{d^1} - \cdots - z^{d^{k-1}} \\
&= f(z) - z - z^d - \cdots - z^{d^{k-1}}
\end{aligned}
$$

となる。したがって

$$
\begin{aligned}
f(\alpha^{d^k}) &= f(\alpha) - \alpha - \alpha^d - \cdots - \alpha^{d^{k-1}} \\
&= \beta - \alpha - \alpha^d - \cdots - \alpha^{d^{k-1}}
\end{aligned}
$$

なので、(3.13) に代入して

$$
\begin{aligned}
E_\ell(\alpha^{d^k}) &= \sum_{i=0}^{\ell} P_i(\alpha^{d^k}) f(\alpha^{d^k})^i \\
&= \sum_{i=0}^{\ell} P_i(\alpha^{d^k}) \left(\beta - \alpha - \alpha^d - \cdots - \alpha^{d^{k-1}}\right)^i \qquad (3.15)
\end{aligned}
$$

である。これは α, β の多項式で $P_i(z)$ の係数は ℓ に依る。

$$
\begin{aligned}
\left\|E_\ell(\alpha^{d^k})\right\| &= \left\|\sum_{i=0}^{\ell} P_i(\alpha^{d^k}) \left(\beta - \alpha - \alpha^d - \cdots - \alpha^{d^{k-1}}\right)^i\right\| \\
&\leq \sum_{i=0}^{\ell} \left\|P_i(\alpha^{d^k})\right\| \cdot \left\|\beta - \alpha - \alpha^d - \cdots - \alpha^{d^{k-1}}\right\|^i \qquad (3.16)
\end{aligned}
$$

となる。それぞれを上から評価する。

$$
\begin{aligned}
\left\|\beta - \alpha - \alpha^d - \cdots - \alpha^{d^{k-1}}\right\| &\leq \|\beta\| + \|\alpha\| + \left\|\alpha^d\right\| + \cdots + \left\|\alpha^{d^{k-1}}\right\| \\
&\leq \|\beta\| + \|\alpha\| + \|\alpha\|^d + \cdots + \|\alpha\|^{d^{k-1}} \\
&\leq (1 + \|\alpha\| + \|\beta\|)^{d^k}
\end{aligned}
$$

であるから、$c'_1 = 1 + \|\alpha\| + \|\beta\|$ とおくと

$$
\left\|\beta - \alpha - \alpha^d - \cdots - \alpha^{d^{k-1}}\right\|^\ell \leq \left((1 + \|\alpha\| + \beta\|)^{d^k}\right)^\ell = c_1'^{d^k \ell} \qquad (3.17)
$$

となる。ここで、c_1' は ℓ にも k にも依存しない正定数であることに注意する。また

$$P_i(\alpha^{d^k}) = a_{i0} + a_{i1}\alpha^{d^k} + \cdots + a_{i\ell}\alpha^{d^k\ell} \quad (a_{ij} \in \mathbb{Z})$$

であり、$\|\alpha\| \leq c_1'$ で $1 \leq c_1'$ であるから

$$\begin{aligned}
\|P_i(\alpha^{d^k})\| &\leq \|a_{i0}\| + \left\|a_{i1}\alpha^{d^k}\right\| + \cdots + \left\|a_{i\ell}\alpha^{d^k\ell}\right\| \\
&\leq \|a_{i0}\| + \|a_{i1}\| \cdot \|\alpha\|^{d^k} + \cdots + \|a_{i\ell}\| \cdot \|\alpha\|^{d^k\ell} \\
&\leq \|a_{i0}\| + \|a_{i1}\|c_1'^{d^k} + \cdots + \|a_{i\ell}\|c_1'^{d^k\ell} \\
&\leq c_1'^{d^k\ell} \cdot (\|a_{i0}\| + \|a_{i1}\| + \cdots + \|a_{i\ell}\|) \\
&\leq c_1'^{d^k\ell} \cdot c_1'(\ell) \qquad (3.18)
\end{aligned}$$

となる。ただし、$c_1'(\ell) = \max\left\{\|a_{i0}\| + \|a_{i1}\| + \cdots + \|a_{i\ell}\| \;\middle|\; i = 0, 1, \ldots, \ell\right\}$ である。$c_1'(\ell)$ は d, ℓ によって決まる数であり、k には依存しない正定数である。(3.17), (3.18) より (3.16) は

$$\begin{aligned}
\left\|E_\ell(\alpha^{d^k})\right\| &\leq \sum_{i=0}^{\ell} \underbrace{c_1'^{d^k\ell} \cdot c_1'(\ell) \cdot c_1'^{d^k\ell}}_{i\text{ に依らない}} \\
&= (\ell+1) \cdot c_1'(\ell) \cdot c_1'^{2d^k\ell} \\
&= c_1(\ell) \cdot c_1^{d^k\ell} \quad (c_1(\ell) = (\ell+1)c_1'(\ell),\, c_1 = c_1'^2) \qquad (3.19)
\end{aligned}$$

である。次に

$$\mathrm{den}\left(E_\ell(\alpha^{d^k})\right) = \mathrm{den}\left(\sum_{i=0}^{\ell} P_i(\alpha^{d^k})\left(\beta - \alpha - \alpha^d - \cdots - \alpha^{d^{k-1}}\right)^i\right)$$

である。それぞれを上から評価したい。

$$\mathrm{den}\left(\beta - \alpha - \alpha^d - \cdots - \alpha^{d^{k-1}}\right) \leq \mathrm{den}(\beta) \cdot \mathrm{den}(\alpha)^{d^{k-1}} \leq \mathrm{den}(\beta) \cdot \mathrm{den}(\alpha)^{d^k}$$

である。$q = \mathrm{den}(\alpha)$ とすると

$$q^{d^k\ell}P_i(\alpha^{d^k}) = a_{i0}q^{d^k\ell} + a_{i1}(q\alpha)^{d^k} \cdot q^{d^k(\ell-1)} + \cdots + a_{i\ell}(q\alpha)^{d^k\ell}$$

は代数的整数である。よって、$i = 0, 1, \ldots, \ell$ に対して

$$\mathrm{den}(\alpha)^{d^k\ell} \cdot \mathrm{den}(\beta - \alpha - \alpha^d - \cdots - \alpha^{d^{k-1}})^\ell \cdot P_i(\alpha^{d^k})(\beta - \alpha - \alpha^d - \cdots - \alpha^{d^{k-1}})^i$$

は代数的整数であるから

$$
\begin{aligned}
\operatorname{den}\left(E_\ell(\alpha^{d^k})\right) &\leq \operatorname{den}(\alpha)^{d^k\ell} \cdot \operatorname{den}(\beta - \alpha - \alpha^d - \cdots - \alpha^{d^{k-1}})^\ell \\
&\leq \operatorname{den}(\alpha)^{d^k\ell} \cdot \operatorname{den}(\beta)^\ell \cdot \operatorname{den}(\alpha)^{d^k\ell} \\
&= c_2(\ell) \cdot c_2^{d^k\ell} \qquad (3.20)
\end{aligned}
$$

となる。ただし、$c_2 = \operatorname{den}(\alpha)^2$ は ℓ にも k にも依存しない正定数であり、$c_2(\ell) = \operatorname{den}(\beta)^\ell$ は ℓ に依存するが k には依存しない正定数である。(3.19), (3.20) より

$$
\begin{aligned}
\log\left\|E_\ell(\alpha^{d^k})\right\| &\leq \log c_1(\ell) + d^k\ell\log c_1 \\
\log\operatorname{den}\left(E_\ell(\alpha^{d^k})\right) &\leq \log c_2(\ell) + d^k\ell\log c_2
\end{aligned}
$$

であるから

$$
\max\left\{\log\left\|E_\ell(\alpha^{d^k})\right\|, \log\operatorname{den}\left(E_\ell(\alpha^{d^k})\right)\right\} \leq c_3(\ell) + c_3 d^k\ell \qquad (3.21)
$$

となる。ただし、$c_3(\ell) = \max\{\log c_1(\ell), \log c_2(\ell)\}$, $c_3 = \max\{\log c_1, \log c_2\}$ である。

一方 (3.14) より

$$
z^{-m}E_\ell(z) = b_m + b_{m+1}z + \cdots \xrightarrow[z\to 0]{} b_m \neq 0
$$

なので、十分大きい k に対して

$$
0 < \left|\alpha^{-d^k m}E_\ell(\alpha^{d^k})\right| < 2|b_m|
$$

となる。したがって、$2|b_m| = c_4(\ell)$ とすると

$$
0 < \left|E_\ell(\alpha^{d^k})\right| < c_4(\ell)|\alpha|^{d^k m} < c_4(\ell)|\alpha|^{d^k\ell^2} \quad (m > \ell^2,\ 0 < |\alpha| < 1)
$$

であるから

$$
\begin{aligned}
\log\left|E_\ell(\alpha^{d^k})\right| &\leq \log c_4(\ell) + d^k\ell^2\log|\alpha| \\
&= c_5(\ell) + d^k\ell^2\log|\alpha| \qquad (3.22)
\end{aligned}
$$

となる。ただし、$c_5(\ell) = \log c_4(\ell)$ である。(3.15) より、$E_\ell(\alpha^{d^k}) \in K = \mathbb{Q}(\alpha, \beta)$ に注意する。n を $E_\ell(\alpha^{d^k})$ の最小多項式の次数とすると、$n \leq [K:\mathbb{Q}]$ である。補題 3.26 と (3.21) より

$$
\log\left|E_\ell(\alpha^{d^k})\right| \geq -2n\max\left\{\log\left\|E_\ell(\alpha^{d^k})\right\|, \log\operatorname{den}\left(E_\ell(\alpha^{d^k})\right)\right\}
$$

$$
\begin{aligned}
&\geq -2[K:\mathbb{Q}]\max\left\{\log\left\|E_\ell(\alpha^{d^k})\right\|, \log\operatorname{den}\left(E_\ell(\alpha^{d^k})\right)\right\} \\
&\geq -2[K:\mathbb{Q}](c_3(\ell)+c_3 d^k \ell)
\end{aligned}
$$

である。(3.22) より

$$
c_5(\ell)+d^k\ell^2\log|\alpha| \geq -2[K:\mathbb{Q}](c_3(\ell)+c_3 d^k \ell)
$$

となり

$$
\frac{c_5(\ell)}{d^k}+\ell^2\log|\alpha| \geq -2[K:\mathbb{Q}]\left(\frac{c_3(\ell)}{d^k}+c_3\ell\right)
$$

となる。$k\to\infty$ とすると

$$
\ell^2\log|\alpha| \geq -2[K:\mathbb{Q}]c_3\ell
$$

となる。よって

$$
\log|\alpha| \geq -2[K:\mathbb{Q}]\frac{c_3}{\ell}
$$

となり、$\ell\to\infty$ ととると

$$
\log|\alpha| \geq 0
$$

となる。したがって、$|\alpha|\geq 1$ となり $0<|\alpha|<1$ に矛盾するので $\beta=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\alpha^{d^k}$ は超越数である。 証明終

4 π の超越性

この章で、π が超越数であることを示す。

補題 4.1. $a>0$ に対して、$n\to\infty$ としたとき $\dfrac{a^n}{n!}$ は 0 に収束する。

証明 実数の性質（アルキメデスの公理）より $n_0\in\mathbb{N}$ を $n_0+1\geq 2a$ を満たすようにとれて、$n>n_0$ に対して

$$
0<\frac{a^n}{n!}=\frac{a^{n_0}}{n_0!}\frac{a}{n_0+1}\frac{a}{n_0+2}\cdots\frac{a}{n}\leq\frac{a^{n_0}}{n_0!}2^{-(n-n_0)}\xrightarrow[n\to\infty]{}0
$$

となる。 証明終

定理 4.2. **(リンデマン)** π は超越的である。

証明　π は代数的と仮定する。このとき補題 3.2 より $i\pi$ も代数的数である。すると

$$\theta_1(x) = x^n + \gamma_1 x^{n-1} + \cdots + \gamma_{n-1}x + \gamma_n \in \mathbb{Q}[x] \tag{4.1}$$

で $\theta_1(i\pi) = 0$ となるものがある。代数学の基本定理より

$$\theta_1(x) = \prod_{j=1}^{n}(x - \alpha_j) \tag{4.2}$$

と書ける。ここで $\alpha_1 = i\pi$ とする。$e^{i\pi} + 1 = 0$ より

$$0 = (e^{\alpha_1} + 1)(e^{\alpha_2} + 1)\cdots(e^{\alpha_n} + 1) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \sum_{1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_k \le n} e^{\alpha_{j_1} + \alpha_{j_2} + \cdots + \alpha_{j_k}}$$

である。$k = 1, 2, \ldots, n$ に対して

$$\theta_k(x) = \prod_{1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_k \le n} (x - (\alpha_{j_1} + \alpha_{j_2} + \cdots + \alpha_{j_k}))$$

とする。$\theta_k(x)$ を x に関して整理したとき、各 i に対して、x^i の係数は α_1, α_2, ..., α_n の整数を係数とする対称式である。

よって、対称式の基本定理により、$\theta_k(x)$ の係数は α_1, α_2, ..., α_n の基本対称式 $-\gamma_1$, γ_2, ..., $(-1)^n\gamma_n$ の整数を係数とする多項式である。

以上のことと、$-\gamma_1$, γ_2, ..., $(-1)^n\gamma_n \in \mathbb{Q}$ より、$\theta_k(x) \in \mathbb{Q}[x]$ である。

$$\tilde{\theta}(x) = \theta_1(x)\theta_2(x)\cdots\theta_n(x)$$

とおき、零でない整数 c と非負整数 δ を選んで

$$\theta(x) = cx^{-\delta}\tilde{\theta}(x) \in \mathbb{Z}[x]$$

かつ $\theta(0) \neq 0$ としてよい。ここで

$$\delta = {}^{\#}\left\{ (j_1, j_2, \ldots, j_k) \;\middle|\; \begin{array}{l} k = 1, 2, \ldots, n \\ 1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_k \le n \\ \alpha_{j_1} + \alpha_{j_2} + \cdots + \alpha_{j_k} = 0 \end{array} \right\}$$

である。

$$\begin{aligned}\tilde{\theta}(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\cdots(x - \alpha_n)(x - \alpha_1 - \alpha_2)\cdots(x - \alpha_{n-1} - \alpha_n) \\ \cdots(x - \alpha_1 - \alpha_2 - \cdots - \alpha_n)\end{aligned}$$

であるから、$\deg\theta_k(x)=\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ より、$\deg\tilde{\theta}(x)=\sum_{k=1}^{n}\deg\theta_k(x)=2^n-1$ となる。

このとき

$$\theta(x)=cx^r+c_1x^{r-1}+\cdots+c_r=c\prod_{j=1}^{r}(x-\beta_j)\in\mathbb{Z}[x]\quad(\beta_j\neq 0)\tag{4.3}$$

と書ける。ここで $c_1,c_2,\ldots,c_r\in\mathbb{Z}$ で c_r は零でない整数、$r=\deg\theta(x)=2^n-1-\delta$ である。

$$0=(e^{\alpha_1}+1)(e^{\alpha_2}+1)\cdots(e^{\alpha_n}+1)=e^{\beta_1}+e^{\beta_2}+\cdots+e^{\beta_r}+\delta+1\tag{4.4}$$

と書ける。p を素数、$s=rp-1$ として

$$f(x)=c^sx^{p-1}\frac{\theta(x)^p}{(p-1)!}\tag{4.5}$$

$$F(x)=\sum_{i=0}^{s+p}f^{(i)}(x)$$

とおく。$\deg\theta(x)=r$ より、$\deg f(x)=p-1+rp=s+p$ である。よって

$$\frac{d}{dx}[e^{-x}F(x)]=e^{-x}(-F(x)+F'(x))$$

$$F'(x)=f'(x)+f''(x)+\cdots+f^{(s+p)}(x)$$

$$-F(x)+F'(x)=-f(x)$$

$$\frac{d}{dx}[e^{-x}F(x)]=-e^{-x}f(x)$$

$$-\int_0^x e^{-y}f(y)dy=e^{-x}F(x)-F(0)$$

となる。$y=\lambda x$ とすると、$dy=xd\lambda$ なので、

$$-\int_0^1 e^{-\lambda x}f(\lambda x)xd\lambda=e^{-x}F(x)-F(0)$$

$$-x\int_0^1 e^{(1-\lambda)x}f(\lambda x)d\lambda=F(x)-e^xF(0)\tag{4.6}$$

となる。(4.6) において、$x=\beta_j$ を代入し、j について 1 から r までの和をとる。(4.4) により、$\sum_{j=1}^{r}e^{\beta_j}=-(1+\delta)$　であるので、

$$-\sum_{j=1}^{r}\beta_j\int_0^1 e^{(1-\lambda)\beta_j}f(\lambda\beta_j)d\lambda=\sum_{j=1}^{r}F(\beta_j)+(1+\delta)F(0)\tag{4.7}$$

となる。

主張 4.3. 次が成立する。

(A) (4.7) の右辺は p を十分大きくすると、p で割れないでない整数である。
(B) (4.7) の左辺の絶対値は p を十分大きくするといくらでも小さくできる。

証明

(A) $f(x) = \dfrac{c^s}{(p-1)!}x^{p-1}\theta(x)^p$ を t 階微分すると、

$$f^{(t)}(x) = \frac{c^s}{(p-1)!}\sum_{k=0}^{t}\binom{t}{k}(\theta(x)^p)^{(k)}(x^{p-1})^{(t-k)} \tag{4.8}$$

となる。
$0 \leq t < p$ のとき、$\theta(\beta_j) = 0$ より

$$f^{(t)}(\beta_j) = 0 \tag{4.9}$$

である。
$t \geq p$ のとき $0 \leq k < p$ ならば $(\theta(x)^p)^{(k)}\Big|_{x=\beta_j} = 0$ より

$$f^{(t)}(\beta_j) = \frac{c^s}{(p-1)!}\sum_{k=p}^{t}\binom{t}{k}\left\{(\theta(x)^p)^{(k)}(x^{p-1})^{(t-k)}\right\}\Big|_{x=\beta_j}$$

である。$(\theta(x)^p)^{(k)}$ において、$\theta(x)$ が残る項は $x = \beta_j$ を代入して 0 になる。$\theta(x)$ が残らない項には $p!$ がかかっているはずである。よって、$\left\{(\theta(x)^p)^{(k)}\Big|_{x=\beta_j}\right\}$ は β_j に関する整数係数の多項式と $p!$ の積である。つまり、$k = p, p+1, \ldots, t$ に対して $h_k(x) \in \mathbb{Z}[x]$ で、$(\theta(x)^p)^{(k)}|_{x=\beta_j} = p!h_k(\beta_j)$ を満たすものが存在する。

$$g_t(x) = \frac{c^s}{(p-1)!}\sum_{k=p}^{t}\binom{t}{k}p!h_k(x)(x^{p-1})^{(t-k)}$$

とすると $g_t(\beta_j) = f^{(t)}(\beta_j)$ である。$e_1, e_2, \ldots, e_r$ は $y_1, y_2, \ldots, y_r$ に関する基本対称式とし、

$$\sum_{j=1}^{r} g_t(y_j) = pc^s\phi(e_1, e_2, \ldots, e_r)$$

とする。ただし、$\phi(e_1, e_2, \cdots, e_r)$ は $\mathbb{Z}$-係数の多項式である。ここで、$\deg g_t(x) \leq s + p - t \leq s$ であるので、$\phi(e_1, e_2, \cdots, e_r)$ の $y_1, y_2, \ldots, y_r$ に関する次数は s

以下である。よって $\phi(e_1, e_2, \cdots, e_r)$ の e_1, e_2, $\ldots$, e_r に関する次数も s 以下である。
e'_1, e'_2, $\ldots$, e'_r は β_1, β_2, $\ldots$, β_r に関する基本対称式とすると、

$$\sum_{j=1}^{r} f^{(t)}(\beta_j) = pc^s \phi(e'_1, e'_2, \ldots, e'_r)$$

が成立する。
$\phi(e'_1, e'_2, \ldots, e'_r)$ は $\dfrac{c_1}{c}$, $\dfrac{c_2}{c}$, $\ldots$, $\dfrac{c_r}{c}$ の整数を係数とする s 次以下の多項式である。よって

$$\sum_{j=1}^{r} f^{(t)}(\beta_j) \in p\mathbb{Z}$$

である。$t = p, p+1, \ldots, s+p$ に対して、$\displaystyle\sum_{j=1}^{r} f^{(t)}(\beta_j) = pk_t$ を満たす整数 k_t が存在する。ここで (4.9) より

$$F(\beta_j) = \sum_{t=0}^{s+p} f^{(t)}(\beta_j) = \sum_{t=p}^{s+p} f^{(t)}(\beta_j)$$

となり、

$$\sum_{j=1}^{r} F(\beta_j) = \sum_{j=1}^{r}\sum_{t=p}^{s+p} f^{(t)}(\beta_j) = \sum_{t=p}^{s+p}\sum_{j=1}^{r} f^{(t)}(\beta_j)$$

となるので

$$\sum_{j=1}^{r} F(\beta_j) = \sum_{t=p}^{s+p} pk_t = Kp \qquad (4.10)$$

である。ただし、$K = \displaystyle\sum_{t=p}^{s+p} k_t \in \mathbb{Z}$ である。ここで、次を示そう。

$$\begin{array}{lll} (1) \quad 0 \le t \le p-2 & \Longrightarrow & f^{(t)}(0) = 0 \\ (2) \quad t = p-1 & \Longrightarrow & f^{(t)}(0) = c^s c_r^p \\ (3) \quad p \le t \le s+p & \Longrightarrow & f^{(t)}(0) = pq_t \end{array}$$

を満たす $q_t \in \mathbb{Z}$ が存在する。
(1) は、$f(x)$ の定義 ((4.5) 参照) より明らか。

(2) (4.8) を $t=p-1$ で考え、$\sum$ の中の式に $x=0$ を代入したい。
$k<p-1$ のときは、その式は 0 になる。よって、$k=p-1$ の部分のみを考えれば良い。よって、$f^{(p-1)}(0)=\dfrac{c^s}{(p-1)!}(p-1)!\theta(0)^p=c^s c_r^p$ となる。ここで、(4.3) により、$\theta(0)=c_r$ であることに注意する。

(3)

$$
\begin{aligned}
f^{(t)}(0) &= \frac{c^s}{(p-1)!}\sum_{k=0}^{t}\binom{t}{k}\left\{(x^{p-1})^{(k)}(\theta(x)^p)^{(t-k)}\right\}\Big|_{x=0} \\
&= \frac{c^s}{(p-1)!}\binom{t}{p-1}(p-1)!\left\{(\theta(x)^p)^{(t-(p-1))}\right\}\Big|_{x=0}
\end{aligned}
$$

$\theta(x)^p$ は少なくとも 1 回は微分されているので、$\left\{(\theta(x)^p)^{(t-(p-1))}\right\}\Big|_{x=0}$ は p で割れる。ゆえに

$$
f^{(t)}(0)=ph_t
$$

を満たす $q_t\in\mathbb{Z}$ が存在する。

上の (1), (2), (3) により、$F(0)=\displaystyle\sum_{t=0}^{s+p}f^{(t)}(0)=c^s c_r^p+pq$ である。ただし、$q=q_{p+1}+q_{p+2}+\cdots+q_{s+p}\in\mathbb{Z}$ である。(4.10) とあわせて、

$$
\begin{aligned}
\text{(4.7) の右辺} &= Kp+(1+\delta)(c^s c_r^p+pq) \\
&= (K+(1+\delta)q)p+(1+\delta)c^s c_r^p \\
&= K'p+(1+\delta)c^s c_r^p
\end{aligned}
$$

である。ただし、$K'=K+(1+\delta)q\in\mathbb{Z}$ である。

このとき $p>\max\{(1+\delta),|c|,|c_r|\}$ ならば、p は素数であるから (4.7) の右辺は p で割り切れない整数である。

(B) $\theta(x)=c\displaystyle\prod_{l=1}^{r}(x-\beta_l)$, $0<\lambda<1$ なので、

$$
\begin{aligned}
f(\lambda\beta_j) &= \frac{c^s}{(p-1)!}(\lambda\beta_j)^{p-1}(\theta(\lambda\beta_j))^p \\
&= \frac{c^s}{(p-1)!}\lambda^{p-1}\beta_j^{p-1}c^p\left(\prod_{l=1}^{r}(\lambda\beta_j-\beta_l)\right)^p \\
&= \frac{c^{s+p}}{(p-1)!}\beta_j^{p-1}\lambda^{p-1}\prod_{l=1}^{r}(\lambda\beta_j-\beta_l)^p \\
|f(\lambda\beta_j)| &= \frac{|c|^{s+p}}{(p-1)!}|\beta_j|^{p-1}\lambda^{p-1}\prod_{l=1}^{r}|\lambda\beta_j-\beta_l|^p
\end{aligned}
$$

となる。また、$|\lambda\beta_j - \beta_l| \leq |\lambda\beta_j| + |\beta_l| = \lambda|\beta_j| + |\beta_l| \leq |\beta_j| + |\beta_l|$ より

$$
\begin{aligned}
|f(\lambda\beta_j)| &\leq \frac{|c|^{s+p}}{(p-1)!}|\beta_j|^{p-1}\lambda^{p-1}\prod_{l=1}^{r}(|\beta_j| + |\beta_l|)^p \\
\left|e^{(1-\lambda)\beta_j}\right| &= \left|e^{(1-\lambda)(x+iy)}\right| \quad (\beta_j = x+iy,\, x, y \in \mathbb{R}\text{ とする。}) \\
&= \left|e^{(1-\lambda)x}\right| \cdot \left|e^{i(1-\lambda)y}\right| \quad \left(\left|e^{i(1-\lambda)y}\right| = 1\right) \\
&= \left|e^{(1-\lambda)x}\right| \\
&\leq e^{|(1-\lambda)x|} \\
&\leq e^{|x|} = e^{|Re\beta_j|}
\end{aligned}
$$

である。よって、

$$
\begin{aligned}
\left|\int_0^1 e^{(1-\lambda)\beta_j} f(\lambda\beta_j) d\lambda\right| &\leq \int_0^1 \left|e^{(1-\lambda)\beta_j}\right| \cdot |f(\lambda\beta_j)| d\lambda \\
&\leq e^{|Re\beta_j|}\frac{|c|^{s+p}}{(p-1)!}|\beta_j|^{p-1}\prod_{l=1}^{r}(|\beta_j| + |\beta_l|)^p \int_0^1 \lambda^{p-1} d\lambda \\
&= e^{|Re\beta_j|}\frac{|c|^{s+p}}{p!}|\beta_j|^{p-1}\prod_{l=1}^{r}(|\beta_j| + |\beta_l|)^p
\end{aligned}
$$

である。よって、補題 4.1 より $e^{|Re\beta_j|}\dfrac{|c|^{s+p}}{p!}|\beta_j|^{p-1}\displaystyle\prod_{l=1}^{r}(|\beta_j| + |\beta_l|)^p$ は p を大きな素数とすると、これはいくらでも小さくできる。 証明終

主張 4.3 から矛盾が生じ、したがって π は超越数である。
よって定理 4.2 は証明された。

5 指数関数の値の超越性

この章では、指数関数の値の超越性について考える。

$f(z)$ を領域 D で正則な関数とする。 $\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_n$ を D 内の重複を許した $n+1$ 個の点とする。

$$
\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - \zeta_0} + \frac{z - \zeta_0}{\zeta - \zeta_0}\frac{1}{\zeta - z}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\zeta - \zeta_0} + \frac{z - \zeta_0}{\zeta - \zeta_0}\left(\frac{1}{\zeta - \zeta_1} + \frac{z - \zeta_1}{\zeta - \zeta_1}\frac{1}{\zeta - z}\right) \\
&= \frac{1}{\zeta - \zeta_0} + \frac{z - \zeta_0}{(\zeta - \zeta_0)(\zeta - \zeta_1)} + \frac{(z - \zeta_0)(z - \zeta_1)}{(\zeta - \zeta_0)(\zeta - \zeta_1)}\frac{1}{\zeta - z}
\end{aligned}
$$

であるから、この変形を繰り返すことで次の恒等式

$$
\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - \zeta_0} + \frac{z - \zeta_0}{(\zeta - \zeta_0)(\zeta - \zeta_1)} + \cdots + \frac{\displaystyle\prod_{\nu=0}^{n-1}(z - \zeta_\nu)}{\displaystyle\prod_{\nu=0}^{n}(\zeta - \zeta_\nu)} + \frac{\displaystyle\prod_{\nu=0}^{n}(z - \zeta_\nu)}{(\zeta - z)\displaystyle\prod_{\nu=0}^{n}(\zeta - \zeta_\nu)} \tag{5.1}
$$

が得られる。

Γ を D 内の単純閉曲線で $z,\ \zeta_0,\ \zeta_1,\ \ldots,\ \zeta_n$ を内部に含むものとする。(5.1) に $f(\zeta)/2\pi i$ を乗じたものを Γ の正の向きに積分する。コーシーの積分公式から

$$
f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = a_0 + a_1(z - \zeta_0) + \cdots + a_n\prod_{\nu=0}^{n-1}(z - \zeta_\nu) + R_n(z) \tag{5.2}
$$

となる。ただし

$$
a_k = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\displaystyle\prod_{\nu=0}^{k}(\zeta - \zeta_\nu)}d\zeta \quad (0 \leq k \leq n) \tag{5.3}
$$

$$
R_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)\displaystyle\prod_{\nu=0}^{n}(\zeta - \zeta_\nu)}d\zeta\prod_{\nu=0}^{n}(z - \zeta_\nu) \tag{5.4}
$$

である。留数定理より $f(z)$ が正則関数のとき a_k $(k = 0, 1, \ldots n)$ と $R_n(z)$ は Γ の取り方によらず一意に定まる。

(5.2) を $\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_n$ を**補間点**とする $f(z)$ の **ニュートン補間公式**と呼ぶ。また ζ_0, $\zeta_1, \ldots, \zeta_n, \ldots$ が無限列のとき、D 内の領域 D_0 の各点において

$$
\lim_{n\to\infty} R_n(z) = 0 \tag{5.5}
$$

が成立するならば、$f(z)$ は D_0 内で

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-\zeta_0)(z-\zeta_1)\cdots(z-\zeta_{n-1}) \tag{5.6}$$

と表される。(5.6) を $\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_n, \ldots$ を補間点列とする $f(z)$ の**ニュートン補間級数**と呼ぶ。

最初に、ニュートン補間級数の応用例として次の定理を示す。

定理 5.1. (**G. Polya 1915**) 整関数 $f(z)$ が次の条件

(1) $f(n) \in \mathbb{Z} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$
(2) $\displaystyle\limsup_{r\to\infty} \frac{\log|f|_r}{r} < \log 2$ (ただし $|f|_r = \max_{|z|\le r}|f(z)|$)

を満たすならば、$f(z)$ は多項式である。

以下、$\sigma(f) = \displaystyle\limsup_{r\to\infty} \frac{\log|f|_r}{r}$ と表す。

注意 5.2. 整関数 $f(z) = 2^z$ は多項式ではないが条件 (1) を満たす。また $|f|_r = 2^r$ であるから $\sigma(f) = \log 2$ である。そのため、条件 (2) の右辺は $\log 2$ よりも大きい定数に取り替えることはできない。

補題 5.3. $f(z)$ が零でない多項式ならば、$\sigma(f) = 0$ である。

証明 $f(x) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0$ $(a_n \ne 0)$ とおく。$|z|$ が十分に大きいとき

$$|f(z)| \le |a_n||z^n| + |a_{n-1}||z^{n-1}| + \cdots + |a_0| \le (n+1)|a_n||z|^n$$

である。閉領域で正則な定数でない関数の絶対値は、その境界で最大値を取るから

$$|f|_r = \max_{|z|\le r}|f(z)| = \max_{|z|=r}|f(z)| \le (n+1)|a_n|r^n$$

である。また $|f|_r \ge |f(z)| \ge |a_n||z^n| - |a_{n-1}||z^{n-1}| - \cdots - |a_0| \ge 1$ であるから

$$\begin{aligned} 0 \le \frac{\log|f|_r}{r} &\le \frac{\log((n+1)|a_n|) + n\log r}{r} \\ &= \frac{\log((n+1)|a_n|)}{r} + n\frac{\log r}{r} \to 0 \quad (r \to \infty) \end{aligned}$$

が成立する。よって $\sigma(f) = 0$ とわかる。 **証明終**

次の補題を示す。

補題 5.4. (スターリングの公式)

$$\log n! = n\log n - n + O(\log n)$$

が成立する。

注意 5.5. $h(z) = O(g(z))$ は $\left|\dfrac{h(z)}{g(z)}\right|$ が有界であることを意味する。

証明 k を自然数とする。

$$\int_k^{k+1} \log x dx \geq \int_k^{k+1} \log k dx = \log k$$

に対して $k = 1, 2, \ldots, n$ で和をとると

$$(n+1)\log(n+1) - n = \int_1^{n+1} \log x dx \geq \log n!$$

となる。また

$$\int_k^{k+1} \log x dx \leq \int_k^{k+1} \log(k+1) dx = \log(k+1)$$

に対して $k = 1, 2, \ldots, n-1$ で和をとると

$$n\log n - n + 1 = \int_1^{n} \log x dx \leq \log n!$$

となるため

$$n\log n - n + 1 \leq \log n! \leq (n+1)\log(n+1) - n$$

が成立する。整理すると

$$0 < \frac{1}{\log n} \leq \frac{\log n! - n\log n + n}{\log n} \leq \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{\log n} + \frac{\log(n+1)}{\log n} \to 1 \quad (n \to \infty)$$

となる。$\left|\dfrac{\log n! - n\log n + n}{\log n}\right|$ が有界であるから、$\log n! = n\log n - n + O(\log n)$ が成立する。 証明終

定理 5.1 の証明 $f(x)$ は整関数で条件 (1) と (2) を満たすとする。最初に $f(z)$ が $\zeta_0 = 1, \zeta_1 = 2, \ldots, \zeta_n = n+1, \ldots$ を補間点列とするニュートン補間級数 (5.6) に展開されることを示す。そのためには、任意に与えられた複素数 z に対して $\lim_{n\to\infty} R_n(z) = 0$ を示せば良い。n は $|z|$ に対して十分に大きいとする。(5.2) において $\Gamma = \{|\zeta| = 2n\}$ とおく。このとき $|\zeta - z| \geq |\zeta| - |z| \geq n$ である。また

$$\prod_{\nu=0}^{n} |\zeta - \zeta_\nu| \geq \prod_{\nu=0}^{n} (|\zeta| - |\zeta_\nu|)$$

$$
\begin{aligned}
&=(2n-1)(2n-2)\cdots(2n-(n+1)) \\
&=\frac{(2n-1)!}{(n-2)!} \qquad (5.7)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\prod_{\nu=0}^{n}|z-\zeta_\nu| \le& \prod_{\nu=0}^{n}(|z|+|\zeta_\nu|) \\
\le& \prod_{\nu=0}^{n}([|z|]+1+(\nu+1)) \\
\le& (n+[|z|]+2)!
\end{aligned}
$$

が成立するから

$$
\begin{aligned}
|R_n(z)| \le& \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta-z|\prod_{\nu=0}^{n}|\zeta-\zeta_\nu|}|d\zeta|\prod_{\nu=0}^{n}|z-\zeta_\nu| \\
\le& \frac{1}{2\pi}|f|_{2n}\frac{1}{n}\frac{(n-2)!}{(2n-1)!}(n+[|z|]+2)!\int_\Gamma|d\zeta| \\
=& 2|f|_{2n}\frac{(n-2)!}{(2n-1)!}(n+[|z|]+2)! \qquad (5.8)
\end{aligned}
$$

となる。

ここで (5.8) は $n\to\infty$ のときに 0 に収束することを示す。条件 (2) より $\varepsilon>0$ を $0<\varepsilon<\log 2-\limsup_{n\to\infty}\dfrac{\log|f|_{2n}}{2n}$ を満たすように選ぶと、十分に大きい n に対して

$$
\log|f|_{2n}<2n(\log 2-\varepsilon) \qquad (5.9)
$$

が成立する。スターリングの公式 (補題 5.4) と (5.8)、(5.9) から

$$
\begin{aligned}
&\log\left(2|f|_{2n}\frac{(n-2)!}{(2n-1)!}(n+[|z|]+2)!\right) \\
=&\log 2+\log|f|_{2n}+\log(n-2)!-\log(2n-1)!+\log(n+[|z|]+2)! \\
<&\log 2+2n(\log 2-\varepsilon)+(n-2)\log(n-2)-(n-2)+O(\log(n-2)) \\
&-(2n-1)\log(2n-1)+(2n-1)-O(\log(2n-1)) \\
&+(n+[|z|]+2)\log(n+[|z|]+2)-(n+[|z|]+2)+O(\log(n+[|z|]+2)) \\
=&-2n\varepsilon+\log\left(\frac{2^{2n}(n-2)^{n-2}(n+[|z|]+2)^{n+1}}{(2n-1)^{2n-1}}\right) \\
&+([|z|]+1)\log(n+[|z|]+2)+O(\log n) \qquad (5.10)
\end{aligned}
$$

となる。ここで、

$$
\begin{aligned}
&\left|\log\left(\frac{2^{2n}(n-2)^{n-2}(n+[|z|]+2)^{n+1}}{(2n-1)^{2n-1}}\right)\right| \\
=&\left|\log\left(\frac{2(1-2/n)^{n-2}\{1+([|z|]+2)/n\}^{n+1}}{(1-1/(2n))^{2n-1}}\right)\right| \\
\leq&|\log 2|+\left|\log\left(1-\frac{2}{n}\right)^{n-2}\right|+\left|\log\left(1+\frac{[|z|]+2}{n}\right)^{n+1}\right|+\left|\log\left(1-\frac{1}{2n}\right)^{2n-1}\right|
\end{aligned}
\tag{5.11}
$$

であり、どの項も $n\to\infty$ で収束するため、(5.11) は有界。一方、ロピタルの定理から

$$
\lim_{n\to\infty}\frac{([|z|]+1)\log(n+[|z|]+2)}{\log n}=([|z|]+1)\lim_{n\to\infty}\frac{1/(n+[|z|]+2)}{1/n}=[|z|]+1
$$

であるから

$$
\log\left(2|f|_{2n}\frac{(n-2)!}{(2n-1)!}(n+[|z|]+2)!\right)<-2n\varepsilon+O(\log n)\to-\infty\quad(n\to\infty)\tag{5.12}
$$

となる。よって $\displaystyle\lim_{n\to\infty}2|f|_{2n}\frac{(n-2)!}{(2n-1)!}(n+[|z|]+2)!=0$ となる。ゆえに $\displaystyle\lim_{n\to\infty}R_n(z)=0$ であるので $f(z)$ は (5.6) の級数に展開される。

定理の証明のためには十分に大きな任意の n に対して $a_n=0$ を示せばよい。

$$
g(\zeta)=\frac{f(\zeta)}{\displaystyle\prod_{\nu=0}^{n}(\zeta-\zeta_\nu)}
$$

とおく。$\displaystyle a_n=\sum_{k=0}^{n}\operatorname*{Res}_{\zeta=\zeta_k}(g(\zeta))$ である。$k=0,1,\ldots,n$ に対して

$$
\begin{aligned}
\operatorname*{Res}_{\zeta=\zeta_k}(g(\zeta))=&\frac{f(\zeta_k)}{\displaystyle\prod_{\substack{\nu=0\\ \nu\neq k}}^{n}(\zeta_k-\zeta_\nu)}=\frac{f(k+1)}{\displaystyle\prod_{\substack{\nu=0\\ \nu\neq k}}^{n}(k-\nu)} \\
=&\frac{f(k+1)}{k(k-1)\cdots(k-k+1)(k-k-1)\cdots(k-n)} \\
=&\frac{f(k+1)}{k(k-1)\cdots2\cdot1(-1)(-2)\cdots(-(n-k))}
\end{aligned}
$$

$$=\frac{f(k+1)}{k!(n-k)!}(-1)^{n-k} \tag{5.13}$$

であるから、条件 (1) と (5.13) より $n!a_n$ は整数となる。 (5.7) を用いると

$$|n!a_n| \leq \frac{n!}{2\pi}\int_\Gamma \frac{|f(\zeta)|}{\prod_{\nu=0}^{n}|\zeta-\zeta_\nu|}|d\zeta| \leq 2n|f|_{2n}\frac{(n-2)!}{(2n-1)!}n! \tag{5.14}$$

となる。 (5.14) の最右辺は (5.8) よりも小さい。 (5.8) は 0 に収束するので $\lim_{n\to\infty} n!a_n = 0$ が成立する。

$n!a_n \in \mathbb{Z}$ より十分に大きな任意の n に対して $a_n = 0$ である。ゆえに $f(z)$ は多項式となる。 **証明終**

第 4 章で π が超越数であることを示した。ここではそれを一般化する。

定理 5.6. (**F. Lindemann**) 複素数 $\alpha \neq 0$ と e^α がともに代数的数となることはない。

証明 $\alpha \neq 0$ と e^α がともに代数的数と仮定して矛盾を導く。$K = \mathbb{Q}(\alpha, e^\alpha)$, $[K:\mathbb{Q}] = d$ とおく。$q\alpha$, qe^α が K の整数となるように正整数 q をとる。

まず $f(z) = e^{\alpha z}$ がニュートン補間級数 (5.6) に展開されることを示す。ただし補間点列 $\zeta_0, \zeta_1, \ldots$ は次のように選ぶ。m を十分に大きな整数として、ζ_ν は ν を m で割った余りであるとする。 (5.4) において $\Gamma_1 = \{|\zeta| = n\}$ とする。ただし n は $|z|, m$ に対して十分に大きいとする。このとき

$$|\zeta - z| \geq |\zeta| - |z| \geq n/2$$

$$|\zeta - \zeta_\nu| \geq |\zeta| - |\zeta_\nu| \geq n - (m-1) \geq n/2$$

$$|z - \zeta_\nu| \leq |z| + |\zeta_\nu| \leq |z| + (m-1) < |z| + m$$

である。$\dfrac{4(|z|+m)}{n} < 1$ としてよいので、 $c = 2(|z|+m)e^{|\alpha|} > 0$ とおくと

$$\begin{aligned}|R_n(z)| \leq& \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_1} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - z|\prod_{\nu=0}^{n}|\zeta-\zeta_\nu|}|d\zeta|\prod_{\nu=0}^{n}|z-\zeta_\nu| \\ \leq& \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_1} \frac{e^{|\alpha||\zeta|}}{(n/2)\prod_{\nu=0}^{n}(n/2)}|d\zeta|\prod_{\nu=0}^{n}(|z|+m)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{e^{|\alpha|n}}{2\pi}\left(\frac{2}{n}\right)^{n+2}(|z|+m)^{n+1}\int_{\Gamma_1}|d\zeta| \\
&= \frac{4(|z|+m)}{n}\{2(|z|+m)e^{|\alpha|}\}^n n^{-n} < c^n n^{-n} \qquad (5.15)
\end{aligned}
$$

となる。c は n に依存しないから任意の z に対して $\lim_{n\to\infty} R_n(z) = 0$ が成立する。よって $f(z) = e^{\alpha z}$ は (5.6) の級数に展開される。

$|a_n|$ の下限を評価する。

$$
g(\zeta) = \frac{f(\zeta)}{\prod_{\nu=0}^{n}(\zeta-\zeta_\nu)}
$$

とおく。

$$
a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} g(\zeta)d\zeta = \sum_{k=0}^{m-1}\operatorname*{Res}_{\zeta=k}(g(\zeta)) \qquad (5.16)
$$

である。ここで、 n を m で割って $n = mt+\lambda$ とする。ただし、$t, \lambda \in \mathbb{Z}$, $0 \le \lambda < m$ である。また $\delta_k = 1$ $(0 \le k \le \lambda)$, $\delta_k = 0$ $(\lambda < k \le m-1)$ とおくと

$$
\begin{aligned}
\prod_{\nu=0}^{n}(\zeta-\zeta_\nu) &= \left(\prod_{\nu=0}^{mt-1}(\zeta-\zeta_\nu)\right)(\zeta-\zeta_{mt})(\zeta-\zeta_{mt+1})\cdots(\zeta-\zeta_{mt+\lambda}) \\
&= \{\zeta(\zeta-1)\cdots(\zeta-m+1)\}^t\zeta(\zeta-1)\cdots(\zeta-\lambda) \\
&= \prod_{k=0}^{m-1}(\zeta-k)^{t+\delta_k}
\end{aligned}
$$

であるから $g(\zeta) = \dfrac{e^{\alpha\zeta}}{\prod_{k=0}^{m-1}(\zeta-k)^{t+\delta_k}}$ となる。留数定理より

$$
a_n = \sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{(t+\delta_k-1)!}\left.\left(\frac{e^{\alpha\zeta}}{\prod_{\substack{\mu=0\\ \mu\ne k}}^{m-1}(\zeta-\mu)^{t+\delta_\mu}}\right)^{(t+\delta_k-1)}\right|_{\zeta=k} \qquad (5.17)
$$

となる。ここで

$$D_k(\zeta) = \left(\frac{e^{\alpha\zeta}}{\displaystyle\prod_{\substack{\mu=0 \\ \mu\neq k}}^{m-1} (\zeta-\mu)^{t+\delta_\mu}} \right)^{(t+\delta_k-1)}$$

とおく。このとき

$$\begin{aligned} D_k(\zeta) &= \sum_{\substack{\nu+\nu_0+\cdots+\nu_{m-1}=t+\delta_k-1 \\ \nu,\nu_0,\ldots,\nu_{m-1}\geq 0}} \frac{(t+\delta_k-1)!}{\nu!\nu_0!\cdots\nu_{m-1}!} (e^{\alpha\zeta})^{(\nu)} \prod_{\substack{\mu=0 \\ \mu\neq k}}^{m-1} \{(\zeta-\mu)^{-t-\delta_\mu}\}^{(\nu_\mu)} \\ &= \sum_{\substack{\nu+\nu_0+\cdots+\nu_{m-1}=t+\delta_k-1 \\ \nu,\nu_0,\ldots,\nu_{m-1}\geq 0}} \frac{(t+\delta_k-1)!}{\nu!\nu_0!\cdots\nu_{m-1}!} \alpha^\nu e^{\alpha\zeta} \prod_{\substack{\mu=0 \\ \mu\neq k}}^{m-1} \{(\zeta-\mu)^{-t-\delta_\mu}\}^{(\nu_\mu)} \end{aligned} \tag{5.18}$$

である。

$$b_k(\nu_\mu) = \begin{cases} 1 & (\nu_\mu = 0) \\ \displaystyle\prod_{j=1}^{\nu_\mu} (-t-\delta_\mu-j+1) & (\nu_\mu > 0) \end{cases}$$

とおくと

$$\prod_{\substack{\mu=0 \\ \mu\neq k}}^{m-1} \{(\zeta-\mu)^{-t-\delta_\mu}\}^{(\nu_\mu)} = \prod_{\substack{\mu=0 \\ \mu\neq k}}^{m-1} \{b_k(\nu_\mu)(\zeta-\mu)^{-t-\delta_\mu-\nu_\mu}\} \tag{5.19}$$

となる。$b_k(\nu_\mu)$ は有理整数で $\delta_\mu = 0, 1$ と $0 \leq \nu_\mu \leq t+\delta_\mu - 1 \leq t$ より $h_k(\zeta) = \prod_{\substack{\mu=0 \\ \mu\neq k}}^{m-1} (\zeta-\mu)^{2t+1}$ を (5.19) に乗したものは有理整数係数の多項式となる。(5.18) より、$D_k(k)$ に $h_k(k)$ を乗じたものは有理整数係数の $e^{\alpha k}, \alpha e^{\alpha k}, \ldots, \alpha^t e^{\alpha k}$ の一次結合となる。また $q\alpha$, qe^α が K の整数であるから $q^t q^{m-1} e^{\alpha k}, q^t q^{m-1}\alpha e^{\alpha k}, \ldots, q^t q^{m-1}\alpha^t e^{\alpha k}$ は K の整数である。さらに $((m-1)!)^{2t+1}$ は $h_k(k)$ $(k = 0, 1, \ldots, m-1)$ の公倍数でもあるから、$c_1 = ((m-1)!)^3 q^m > 0$ とおくと

$$\mathrm{den}(a_n) \leq t!((m-1)!)^{2t+1} q^t q^{m-1} < c_1^t t^t \tag{5.20}$$

と評価できる。

次に $\|a_n\|$ を評価する。 (5.17) より

$$\|a_n\| \leq \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{(t+\delta_k-1)!}\|D_k(k)\| \leq \frac{m}{(t-1)!} \max_{0\leq k<m} \|D_k(k)\| \tag{5.21}$$

である。

$$\sum_{\substack{\nu+\nu_0+\cdots+\nu_{m-1}=t+\delta_k-1\\ \nu,\nu_0,\ldots,\nu_{m-1}\geq 0}} \frac{(t+\delta_k-1)!}{\nu!\nu_0!\cdots\nu_{m-1}!} = (\underbrace{1+1+\cdots+1}_{m})^{t+\delta_k-1} = m^{t+\delta_k-1}$$

であるから (5.18) と (5.19) より $D_k(k)$ は

$$\alpha^\nu e^{\alpha k} \prod_{\substack{\mu=0\\ \mu\neq k}}^{m-1} \{b_k(\nu_\mu)(k-\mu)^{-t-\delta_\mu-\nu_\mu}\}$$

という形の数の $m^{t+\delta_k-1}$ 個の和となる。$\nu_0,\ldots,\nu_{k-1},\nu_{k+1},\ldots,\nu_{m-1} \geq 0$ のうち、ちょうど $0<\ell\leq m-1$ 個が 0 でないとして、これらを $\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_\ell>0$ とおく。$\rho_1+\rho_2+\cdots+\rho_\ell = t+\delta_k-1-\nu \leq t$ であるから、

$$\begin{aligned}
\prod_{\substack{\mu=0\\ \mu\neq k}}^{m-1} |b_k(\nu_\mu)| &= \left| \prod_{\substack{\mu=0,\, \mu\neq k\\ \nu_\mu>0}}^{m-1} \left(\prod_{j=1}^{\nu_\mu} (-t-\delta_\mu-j+1) \right) \right| \\
&\leq \left| \prod_{\substack{\mu=0,\, \mu\neq k\\ \nu_\mu>0}}^{m-1} \left(\prod_{j=1}^{\nu_\mu} (t+j) \right) \right| \\
&= \prod_{\xi=1}^{\ell} \left(\prod_{j=1}^{\rho_\xi} (t+j) \right) \\
&= \underbrace{(t+1)\cdots(t+\rho_1)(t+1)\cdots(t+\rho_2)\cdots(t+1)\cdots(t+\rho_\ell)}_{t+\delta_k-1-\nu} \\
&\leq (2t)^t
\end{aligned}$$

と評価できる。ここで $\nu_\mu=1$ の場合は、 $b_k(\nu_\mu)=1$ であることに注意する。さらに $|k-\mu|\geq 1$ より $|k-\mu|^{-t-\delta_\mu-\nu_\mu} \leq 1$ であるから、

$$\begin{aligned}\left\|\alpha^\nu e^{\alpha k}\prod_{\substack{\mu=0\\ \mu\neq k}}^{m-1}\{b_k(\nu_\mu)(k-\mu)^{-t-\delta_\mu-\nu_\mu}\}\right\| \leq& \|\alpha\|^\nu\|e^\alpha\|^k\prod_{\substack{\mu=0\\ \mu\neq k}}^{m-1}\{|b_k(\nu_\mu)||k-\mu|^{-t-\delta_\mu-\nu_\mu}\}\\ \leq&(\|\alpha\|+1)^\nu(\|e^\alpha\|+1)^k\prod_{\substack{\mu=0\\ \mu\neq k}}^{m-1}|b_k(\nu_\mu)|\\ \leq&(\|\alpha\|+1)^t(\|e^\alpha\|+1)^{m-1}(2t)^t \end{aligned} \tag{5.22}$$

が成立する。よって $c_2=2m^2(\|\alpha\|+1)(\|e^\alpha\|+1)^{m-1}>0$ とおくと

$$\begin{aligned}\|a_n\| \leq& \frac{m}{(t-1)!}m^{t+\delta_k-1}(\|\alpha\|+1)^t(\|e^\alpha\|+1)^{m-1}(2t)^t\\ \leq& m(\|e^\alpha\|+1)^{m-1}(2m(\|\alpha\|+1))^t\frac{t^t}{(t-1)!}<c_2^t t^t \end{aligned} \tag{5.23}$$

となる。

(5.18) と (5.19) より $D_k(k)$ は $e^{\alpha k}$, $\alpha e^{\alpha k}$, $\ldots$, $\alpha^t e^{\alpha k}$ の有理数係数の一次結合となるから

$$a_n=\sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{(t-\delta_k-1)!}D_k(k)\in K$$

である。よって a_n は $\mathbb{Q}$ 上代数的であり、最小多項式の次数 $\deg a_n$ は $\deg a_n\leq[K:\mathbb{Q}]=d$ を満たす。$c_3=\max\{\log c_1,\log c_2\}$ とおく。$\mathrm{den}(a_n)\geq 1$ と (5.20)、(5.23) より

$$\begin{aligned}2d(t\log t+c_3t)\geq& 2\deg a_n\max\{\log(c_1^t t^t),\,\log(c_2^t t^t)\}\\ \geq& 2\deg a_n\max\{\log\mathrm{den}(a_n),\,\log\|a_n\|\}\geq 0\end{aligned}$$

だから、 $a_n\neq 0$ に対して基本不等式 (補題 3.26) から

$$\log|a_n|\geq -2d(t\log t+c_3t) \tag{5.24}$$

が成立する。

次に上限を評価する。$\Gamma_2=\{|\zeta|=t\}$ とおく。このとき

$$|f(\zeta)|\leq e^{|\alpha||\zeta|}=e^{|\alpha|t}$$

$$|\zeta-\zeta_\nu|\geq|\zeta|-|\zeta_\nu|\geq t-(m-1)\geq t/2$$

であるから $c_4 = 2^{2m} e^{|\alpha|} > 0$ とおくと

$$
\begin{aligned}
|a_n| \leq & \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_2} \frac{|f(\zeta)|}{\prod_{\nu=0}^{n} |\zeta - \zeta_\nu|} |d\zeta| \\
\leq & \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_2} \frac{e^{|\alpha|t}}{\prod_{\nu=0}^{mt+\lambda} (t/2)} |d\zeta| \\
\leq & \frac{e^{|\alpha|t}}{2\pi} \left(\frac{2}{t}\right)^{mt+\lambda+1} \int_{\Gamma_2} |d\zeta| \\
\leq & 2^m (2^m e^{|\alpha|})^t t^{-mt} < c_4^t t^{-mt}
\end{aligned} \tag{5.25}
$$

となる。よって $c_5 = \log c_4$ とおくと $a_n \neq 0$ に対して

$$
\log |a_n| < -mt \log t + c_5 t \tag{5.26}
$$

となる。

(5.24)、(5.26) より $a_n \neq 0$ のとき

$$
-2dt \log t - 2c_3 dt \leq \log |a_n| < -mt \log t + c_5 t \tag{5.27}
$$

となる。したがって

$$
(m - 2d) \log t < 2c_3 d + c_5
$$

が成立する。c_3, c_5 は t に依存しないから、この不等式は $m > 2d$ において t が十分に大きいときは成立しない。よって十分に大きな任意の n に対して $a_n = 0$ が成立する。これは $f(z) = e^{\alpha z}$ $(\alpha \neq 0)$ が多項式であることを意味するため矛盾が生じる。　**証明終**

系 5.7. 代数的数 $\alpha \neq 0$ と $\beta \neq 0, 1$ に対して次が成立する。

(1) e^α は超越数である。
(2) $\log \beta$ は超越数である。
(3) $\sin \alpha, \cos \alpha, \tan \alpha$ は超越数である。
(4) $\sinh \alpha, \cosh \alpha, \tanh \alpha$ は超越数である。

証明

(1) は明らか。(2) $\log \beta \neq 0$ かつ $e^{\log \beta} = \beta$ が代数的数であるから、$\log \beta$ は超越数である。

(3) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ であるから $\sin\alpha$ は $\mathbb{Q}(\cos\alpha)$ 上代数的かつ、 $\cos\alpha$ は $\mathbb{Q}(\sin\alpha)$ 上代数的である。よって $\sin\alpha$ が $\mathbb{Q}$ 上代数的であることと $\cos\alpha$ が $\mathbb{Q}$ 上代数的であることは同値である。

$\sin\alpha$, $\cos\alpha$ がともに代数的数であると仮定すると $e^{i\alpha}=\cos\alpha+i\sin\alpha$ も代数的数となるから α は超越数となる。よって $\alpha\neq 0$ が代数的数であるとき $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ はともに超越数となる。このとき $\tan\alpha=\pm\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2\alpha}-1}$ も超越数となる。

(4)

$$\sinh\alpha=\frac{e^\alpha-e^{-\alpha}}{2}=i\sin\frac{\alpha}{i}$$

$$\cosh\alpha=\frac{e^\alpha+e^{-\alpha}}{2}=\cos\frac{\alpha}{i}$$

$$\tanh\alpha=\frac{e^\alpha-e^{-\alpha}}{e^\alpha+e^{-\alpha}}=i\tan\frac{\alpha}{i}$$

であるから、$\alpha\neq 0$ が代数的数のとき $\sinh\alpha$, $\cosh\alpha$, $\tanh\alpha$ は超越数となる。 証明終

例 5.8. $e, e^{\sqrt{2}}, \pi, \log 2, \sin 1, \cos 1, \tan 1, \dfrac{e+e^{-1}}{2}, \dfrac{e-e^{-1}}{2}, \dfrac{e-e^{-1}}{e+e^{-1}}$ は超越数である。

参考文献

[1] 塩川宇賢、無理数と超越数、森北出版、2013 年

[2] イアン・スチュアート、明解ガロア理論、講談社、2013 年

[3] 若林誠一郎、e も π も超越数、http://www.math.tsukuba.ac.jp/~wkbysh/e_transc.pdf