次数8のモノミアル曲線の シンボリック・リース環について

内澤 京也

2017年2月

1 序

k を体とする。R を k 上の有限個の変数からなる多項式環とする。体 L は、$k \subset L \subset Q(R)$ を満たすとした時、Hilbert は 1900 年に、環 $L \cap R$ が k-代数として有限生成であるかどうかという問題を提起した。これは、Hilbert の第 14 問題と呼ばれている。

この問題は、1958 年に永田 [7] が反例を提示することによって解決された。また、より簡単な反例が 1990 年に Roberts [9] によって提示される等、様々な数学者によって反例が提示されている。

Hilbert の第 14 問題は、Cowsik による次の問題に深く関係している。R を正則局所環 (または、体上の多項式環) とする。P を R の素イデアルとする。この時、P のシンボリック・リース環 $R_s(P) = \bigoplus_{r \geq 0} P^{(r)}t^r$ がネーター環となるかどうかという問題が Cowsik [1] によって提示された。彼の目標は、アフィン代数曲線が集合論的完全交叉かどうかを尋ねている Kronecker の問題に対する新しい手法を与えることだった。Kronecker の問題はまだ解決していないが、Roberts [8] が Cowsik のこの問いに対しての反例を 1985 年に提示した。この反例では彼は、Hilbert の第 14 問題に対する永田の反例の正則局所環と素イデアルを用いている。この例では、正則局所環は標数 0 の体を含んでいて、素イデアルは完備化の後に分解する。後に Roberts [9] は、Hilbert の第 14 問題と Cowsik の問いの両方に対する反例を提示した。彼の新しい反例は、素イデアルは完備化の後に分解しない。しかし、環は標数 0 の体を含んでいる。同じように構成した環について、標数が正ならば環は有限生成であることが証明されている。

一方、$\mathfrak{p}_k(a,b,c)$ を、k^3 のスペースモノミアル曲線 (t^a,t^b,t^c) の定義イデアルとする。この時、$\mathfrak{p}_k(a,b,c)$ は高々3 つの $k[x,y,z]$ の (2 項) 多項式で生成される。この場合のシンボリック・リース環については、様々な数学者によって研究がなされている。Huneke [6] と Cutkosky [2] は、シンボリック・リース環がネーター環となるかどうかの判定方法を与えた。1994 年に、後藤-西田-渡辺によって、体 k の標数が 0 であり、自然数 n が 4 以上かつ 3 の倍数ではない場合について、$R_s(\mathfrak{p}_k(7n-3,(5n-2)n,8n-3))$ がネーター環とならないことが示された。また、k の標数が正であるならば、$R_s(\mathfrak{p}_k(7n-3,(5n-2)n,8n-3))$ はネーター環となることも、証明内で示されている。後藤, 渡辺は、$R_s(\mathfrak{p}_k(a,b,c))$ は、体 k の標数が正であるならば、常にネーター環となるのではないかと予想した。

一方 Cutkosky [2] は、シンボリック・リース環 $R_s(\mathfrak{p}_k(a,b,c))$ に、幾何学的な意味付けを行った。X を、重み付き射影空間 Proj(k[x,y,z]) の滑らかな点 $V_+(\mathfrak{p}_k(a,b,c))$ でのブローアップとする。E を、このブローアップの例外曲線とする。$R_s(\mathfrak{p}_k(a,b,c))$ が有限生成であることと、X の Cox 環 $\mathrm{Cox(X)} = \bigoplus_{\mathrm{D}\in\mathrm{Cl(X)}} \mathrm{H}^0(\mathrm{X},\mathcal{O}_\mathrm{X}(\mathrm{D}))$ が有限生成であることが同値である。$-K_X$ が ample であると仮定すると、$\mathrm{Cox}(X)$ が有限生成であることを示すことが出来る。Cutkosky [2] は、$-K_x$ が big ならば、$R_s(\mathfrak{p})$ が有限生成であることを示した。$(-K_X)^2>0$ は、$(a+b+c)^2>abc$ と同値であるが、この時、$-K_x$ は big である。$\mathrm{Cox}(X)$ が有限生成であることは、negative curve の存在と深く関わる。ここで C が negative curve であるとは、X 上の曲線 C が、$C^2<0$ かつ $C\neq E$ を満たすことで定義される。実は、$\sqrt{abc}\notin\mathbb{Z}$ である場合、$\mathrm{Cox}(X)$ が有限生成であるならば negative curve が存在するということが成立する。体 k の標数が正であることを仮定すると、negative curve が存在するならば $\mathrm{Cox}(X)$ が有限生成であるという結果が、Cutkosky [2] によって示されている。

a, b, c を、2 つずつが互いに素である自然数とする。また、$\min\{a,b,c\} = a$ とする。この時 $R_s(\mathfrak{p}_k(a,b,c))$ はネーター環となるかどうかという問題について、$a = 1, 2, 3, 4, 6$ の場合は、Cutkosky [2] によって常にネーター環となることが証明された。一方、$a = 7, 9, 10, 11, \cdots$ の場合は、$\mathfrak{p}_t(a,b,c)$ の生成元の中に negative curve の方程式があり、かつ $R_s(\mathfrak{p}_k(a,b,c))$ がネーター環とならない例が存在することが示されている。(Goto-Nishida-Watanabe [4], Gonzales-Karu [3])

つまり、$a = 5, 8$ の場合がこの問題の境界領域として残っている。本論文では、$a = 8$ である場合についての、次の定理の証明を与える。また、

$a = 5$ である場合は、同時に発表される海老名君の修士論文で扱われている。

定理 1.1 a, b, c は2つずつが互いに素な自然数であり、$\min\{a,b,c\} = a = 8$ とする。$\mathfrak{p}$ は、スペース・モノミアル曲線 (t^a,t^b,t^c) の定義イデアルとする。今、$\mathfrak{p}$ の生成元の中に、negative curve の方程式があると仮定する。この時、シンボリック・リース環 $R_s(\mathfrak{p})$ はネーター環である。

つまり、$a = 5, 8$ である場合は、$a = 7, 9, 10, 11, \cdots$ である場合とは違う振る舞いをしている。$a = 5, 8$ の場合については、シンボリック・リース環 $R_s(\mathfrak{p})$ がネーター環とならない例は発見されていない。

2 準備

a, b, c を2つずつが互いに素な自然数、k を体とする。ϕ を以下のように定義する。

$$
\begin{array}{ccc}
\phi : k[x,y,z] & \longrightarrow & k[t] \\
\cup & & \cup \\
x & \longmapsto & t^a \\
y & \longmapsto & t^b \\
z & \longmapsto & t^c
\end{array}
$$

$k[x,y,z]$ と $k[t]$ を、$\deg x = a$, $\deg y = b$, $\deg z = c$, $\deg t = 1$ で次数付き環であると考える。この時 ϕ は、次数付きの準同型写像である。$S := k[x,y,z]$、また、$\mathfrak{p} := \ker\phi$ と定義する。すると自然数 n について、n 次のシンボリックパワーが、$\mathfrak{p}^{(n)} = \mathfrak{p}^n S_{\mathfrak{p}} \cap S$ と定義される。シンボリックパワーについて、$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^{(1)}, \mathfrak{p}^n \subset \mathfrak{p}^{(n)}, \mathfrak{p}^{(n)}\mathfrak{p}^{(m)} \subset \mathfrak{p}^{(n+m)}$ が成立する。

この時、シンボリック・リース環 $R_s(\mathfrak{p}) := S[\mathfrak{p}t, \mathfrak{p}^{(2)}t^2, \mathfrak{p}^{(3)}t^3, \cdots] \subset S[t]$ はネーター環となるかどうかという問題を考えたい。($R_s(\mathfrak{p})$ は、$S[t]$ の部分環であることに注意する。)

以下の事実が知られている。

$\mathfrak{p}$ の生成元の個数の最小値を $\mu(\mathfrak{p})$ とする。

- $\mathbb{N}a \cap (\mathbb{N}_0 b + \mathbb{N}_0 c)$ の最小元を $sa = t_1 b + u_1 c$,
- $\mathbb{N}b \cap (\mathbb{N}_0 a + \mathbb{N}_0 c)$ の最小元を $tb = s_2 a + u_2 c$,

- $\mathbb{N}c \cap (\mathbb{N}_0 a + \mathbb{N}_0 b)$ の最小元を $uc = s_3 a + t_3 b$

とおく。この時、次の定理が成立する。

定理 2.1 (Herzog [5]) $\mu(\mathfrak{p}) = 2$ または 3 である。更に、$\mu(\mathfrak{p}) = 3$ であることと、$s, t, u \geq 2$ かつ、$t_1, u_1, s_2, u_2, s_3, t_3 \geq 1$ であることが同値である。また、$\mu(\mathfrak{p}) = 3$ である場合には、$s = s_2 + s_3, t = t_1 + t_3, u = u_1 + u_2$ が成立し、$\mathfrak{p} = \left(x^s - y^{t_1} z^{u_1}, y^t - x^{s_2} z^{u_2}, z^u - x^{s_3} y^{t_3}\right)$ となる。

また、次のことが成立する。

注意 2.2 $\mu(\mathfrak{p}) = 2$ とする。この時、$\mathfrak{p}$ は完全交叉であり、任意の n に対して $\mathfrak{p}^{(n)} = \mathfrak{p}^n$ が成立する。よって、$R_s(\mathfrak{p}) = S[\mathfrak{p}t] \subset S[t]$ が成立する。ゆえに、$R_s(\mathfrak{p})$ はネーター環である。

このため、一般にネーター性の判定を行う際には、$\mu(\mathfrak{p}) = 3$ である場合に注目すれば良い。以下、

$$f := x^s - y^{t_1} z^{u_1}, \quad g := y^t - x^{s_2} z^{u_2}, \quad h := z^u - x^{s_3} y^{t_3}$$

とおく。この時、簡単な議論により次が成立することが分かる。

命題 2.3 f, g, h は既約である。

定義 2.4 $a + b + c > \dfrac{d}{r}$ が成り立つような、ある 0 でない次数 d の $\mathfrak{p}^{(r)}$ の斉次元が存在する時、$-K$ は big であるという。

定理 2.5 (Cutkosky [2]) $-K$ が big であるならば、$R_s(\mathfrak{p})$ はネーター環である。

定義 2.6 $\dfrac{d}{r} < \sqrt{abc}$ を満たす自然数 r, d と、$\mathfrak{p}^{(r)}$ の中に 0 でない d 次の既約斉次式 q が存在するとき、q は negative curve であるという。

注意 2.7 negative curve が存在するならば、自然数 r, d は一意的に定まり、q についても $k^\times$ 倍を除いて一意的に定まる。また、$q \in [\mathfrak{p}^{(r)}]_d$ を negative curve とする。この時、$-K$ が big であることと、$\dfrac{d}{r} < a + b + c$ が同値である。

次の定理 (Cutkosky [2]) が成立する。

定理 2.8 $\sqrt{abc} \notin \mathbb{Z}$ と仮定する。$R_s(\mathfrak{p})$ がネーター環である時、negative curve が存在する。

命題 2.3 と注意 2.7 により、次が成立する。

系 2.9 $\mu(\mathfrak{p}) = 3$ である場合、$\deg f$, $\deg g$, $\deg h$ の中に、$\sqrt{abc}$ 未満であるものは、存在したとしても高々1 つである。

また、次が成立する。

注意 2.10 $\mu(\mathfrak{p}) = 3$ かつ、f, g, h のどれかが negative curve であると仮定する。この時、注意 2.7 より、$-K$ が big でないことと、$a + b + c \leq \min\{sa, tb, uc\}$ が同値となる。

この時、Gonzales-Karu [3] の手法を用いることによって、次が成立することが分かる。

定理 2.11 体 k の標数は 0 とする。$\mu(\mathfrak{p}) = 3$ とし、更に h を negative curve であると仮定する。自然数 r に対して Δ_r を、直線 $y = -\dfrac{s_2}{s_3}x$, $y = \dfrac{u_2}{u_1 + u_2}x$, $y = \dfrac{t_1 + t_3}{t_3}x + \left(\dfrac{u_2}{u_1 + u_2} - \dfrac{t_1 + t_3}{t_3}\right) r$ で囲まれる境界を含む領域とする。この時、以下の 3 つの条件が同値である。

(1) $R_s(\mathfrak{p})$ はネーター環である。

(2) 以下の条件を満たす自然数 r が存在する。

1. r は u の倍数である。
2. x または y の冪の係数が 0 ではないような元が $\left[\mathfrak{p}^{(r)}\right]_{\frac{abr}{u}}$ に存在する。(実はこの元の x の冪の係数も y の冪の係数も 0 ではないことが示される。)

(3) 以下の条件を満たす自然数 r と $\delta = \displaystyle\sum_{(\alpha,\beta)\in\Delta_r\cap\mathbb{Z}^2} C_{(\alpha,\beta)}\xi^\alpha\eta^\beta$ が存在する。

1. r は u の倍数である。
2. $\left(\partial_\xi^i \partial_\eta^j \delta\right)(1,1) = 0$ が、$i + j < r$ である任意の i, j について成立する。

3. $C_{(0,0)} \neq 0$ または $C_{(r,\frac{ru_2}{u_1+u_2})} \neq 0$ である。(実は、この条件を満たす δ は $C_{(0,0)} \neq 0$ かつ $C_{(r,\frac{ru_2}{u_1+u_2})} \neq 0$ を満たす。)

よって、条件 (3) の判定を行うことにより、$R_s(\mathfrak{p})$ がネーター環であるかどうかを調べることができる。

一般に、$R_s(\mathfrak{p})$ がネーター環でないことの証明は容易ではないが、判定方法として、次の定理が知られている。

定理 2.12 (Gonzales-Karu [3]) $\mu(\mathfrak{p}) = 3$ とし、$n := \lfloor \dfrac{s_2}{s_3} \rfloor + 1$ とおく。h が negative curve である場合、次の 2 つの条件を満たせば $R_s(\mathfrak{p})$ はネーター環でない。

(1) $(n-1)\left[\dfrac{u_2}{u}, \dfrac{t}{t_3}\right]$ に含まれる整数は n 個以下である。

(2) $\dfrac{nu_2}{u} \notin \mathbb{Z}$

$\min\{a,b,c\}$ の値が $a = 7, 9, 10, 11, \cdots, 100$ の場合には、コンピュータを用いた計算により、この定理を満たすような a, b, c の組の存在が確認出来るため、$R_s(\mathfrak{p})$ がネーター環ではないような例を与えることが出来る。$a = \min\{a,b,c\}$ の値が 100 より大きい場合についても、この定理を満たすような a, b, c の組が存在すると予想されるが、証明には至っていない。

簡単な議論により $\min\{a,b,c\}$ の値が 1, 2, 3, 4, 6 であるならば、$-K$ が big であることが分かり、従って定理 2.5 を用いて $R_s(\mathfrak{p})$ がネーター環となることが示される。

以上より、$\min\{a,b,c\}$ の値が 5, 8 である場合が残る。本論文では、$\min\{a,b,c\}$ の値が 8 である場合について、f, g, h のいずれかが negative curve であるならば、$R_s(\mathfrak{p})$ がネーター環となることを証明する。それにあたって、いくつかの補題を示す。

補題 2.13 k は標数 0 の体とする。n は自然数であり、$S \subset \mathbb{Z}^2$ は以下の条件を満たすとする。

- $^{\#}S = \dfrac{1}{2}n(n+1)$
- $w \in \mathbb{Z}$ について、$S \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x = w\} = S_w$ とおく。この時、$^{\#}S_{w_i} = i$ となるような、$\{w_1, w_2, ..., w_n\} \subset \mathbb{Z}$ が存在する。

ここで、

$$\delta = \sum_{(\alpha,\beta)\in\Delta_r\cap\mathbb{Z}^2} C_{(\alpha,\beta)}\xi^\alpha\eta^\beta \quad (C_{(\alpha,\beta)} \in k)$$

とおく。この時、

$$\frac{\partial^{i+j}\delta}{\partial\xi^i\partial\eta^j}(1,1) = 0 \quad (0 \le i+j < n, \quad i,j \in \mathbb{N}_0) \quad \cdots (*)$$

ならば、$\delta(\xi,\eta) = 0$ である。

証明 $S = S_{w_1} \coprod S_{w_2} \coprod \cdots \coprod S_{w_n}$ であることに注意する。n についての数学的帰納法を用いて証明する。

- $n = 1$ である場合は明らかである。

- $n = k$ で命題が成立していることを仮定して、$n = k + 1$ の場合を考える。$\xi^{-w_{k+1}}\delta(\xi,\eta) = 0$ であることと、$\delta(\xi,\eta) = 0$ であることは同値である。ここで、δ が $(*)$ を満たしているという仮定から、$\xi^{-w_{k+1}}\delta(\xi,\eta) = 0$ は $(*)$ を満たしていることが示される。よって、$w_{k+1} = 0$ である場合に証明することが出来れば十分である。

  以下、$w_{k+1} = 0$ とする。この時、δ を ξ について 1 回偏微分した式を δ' とおくと、δ' は $n = k$ で $(*)$ を満たしているため、帰納法の仮定から $\delta' = 0$ である。よって $(\alpha,\beta) \in S$ について、$\alpha \neq 0$ ならば、$C_{(\alpha,\beta)} = 0$ である。

  $$S_0 = \{(\alpha,\beta) \in S | \alpha = 0\} = \{(0,\beta_1),(0,\beta_2),...,(0,\beta_{k+1})\}$$

  とおく。この時、

  $$\delta(\xi,\eta) = \sum_{(0,\beta)\in S_0} C_{(0,\beta)}\eta^\beta$$

  について、

  $$\frac{\partial^j\delta}{\partial\eta^j}(1,1) = 0 \quad (0 \le j < k+1, \quad j \in \mathbb{N}_0)$$

  が成立している。各 j についてこの式は、

  $$\left(\eta\frac{\partial}{\partial\eta}\right)^j \delta(1,1) = 0$$

と同値である。この時、

$$B = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \beta_1 & \cdots & \beta_{k+1} \\ \beta_1^2 & \cdots & \beta_{k+1}^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_1^k & \cdots & \beta_{k+1}^k \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} C_{(0,\beta_1)} \\ C_{(0,\beta_2)} \\ \vdots \\ C_{(0,\beta_{k+1})} \end{pmatrix}$$

とおくと、$BC = 0$ という C についての連立方程式が得られる。ここで B はファンデルモンド型の行列であるため、行列式は 0 ではない。よってこの連立方程式から、$C_{(0,\beta_1)} = C_{(0,\beta_2)} = \cdots = C_{(0,\beta_{k+1})} = 0$ が得られる。よって、$n = k+1$ の場合についても命題が成立することが示された。

以上より、任意の n についてこの命題は成立する。 証明終

補題 2.14 S を補題 2.13 で定義した集合とする。S に含まれない $\mathbb{Z}^2$ の元 (α', β') をとり、$U \subset \mathbb{Z}^2$ を、$U \supset S \cup \{(\alpha', \beta')\}$ とおく。

この時、$\delta = \sum_{(\alpha,\beta)\in U} C_{(\alpha,\beta)}\xi^\alpha\eta^\beta$ で、$\dfrac{\partial^{i+j}\delta}{\partial\xi^i\partial\eta^j}(1,1) = 0$ $(0 \leq i+j < n$, $i, j \in \mathbb{N}_0)$ かつ $C_{(\alpha',\beta')}$ は 0 ではないものが存在する。

証明 必要ならば U を小さく取り直して、$U = S \cup \{(\alpha', \beta')\}$ としてよい。この時、${}^\# U = \dfrac{1}{2}n(n+1) + 1$ であり、$\dfrac{\partial^{i+j}\delta}{\partial\xi^i\partial\eta^j}(1,1) = 0$ $(0 \leq i+j < n$, $i, j \in \mathbb{N}_0)$ は、$C_{(\alpha,\beta)}$ に対して $\dfrac{1}{2}n(n+1)$ 個の線形の方程式を与える。変数の個数が方程式の個数より大きいため、$\dfrac{\partial^{i+j}\delta}{\partial\xi^i\partial\eta^j}(1,1) = 0$ $(0 \leq i+j < n$, $i, j \in \mathbb{N}_0)$ を満たす $\delta(\xi,\eta) \neq 0$ が存在する。

この $\delta(\xi,\eta)$ について、$C_{(\alpha',\beta')} = 0$ を満たしていると仮定すると、補題 2.13 より $\delta(\xi,\eta) = 0$ が得られる。これは矛盾である。よって、補題の条件を満たす $\delta(\xi,\eta)$ が存在する。 証明終

このことから、次が成立する。

注意 2.15 h は negative curve であると仮定する。定理 2.11 の Δ_u をとり、$\Delta_u \setminus \{(0,0)\}$ が $n = u$ として補題 2.13 の条件を満たす S を含むならば、$R_s(\mathfrak{p})$ はネーター環となる。

3　主定理の証明

この章で、定理 1.1 を証明する。$\min\{a, b, c\} = a = 8$ として、a, b, c は 2 つずつが互いに素であると仮定する。

3.1　$c \equiv b \mod 8$ の場合

$b < c$ とすると、$c = b + 8n$ となるような自然数 n が存在する。よってこの場合は、$\mu(\mathfrak{p}) = 2$ となる。$b > c$ の場合も同様である。そのためこの場合には、任意の b, c について $R_s(\mathfrak{p})$ がネーター環であることが証明された。

3.2　$c \equiv 3b \mod 8$ の場合

a, b, c は、以下の条件を満たしていることに注意する。

- $\min\{a, b, c\} = a = 8$ である。
- a, b, c は 2 つずつが互いに素である。
- $c \equiv 3b \mod 8$ である。従って、$3c \equiv b \mod 8$ である。

補題 3.1 次の 2 つの条件は同値である。

(1) $\frac{1}{3}b < c < 3b$

(2) $\mu(\mathfrak{p}) = 3$

証明　対偶である、$c \leq \frac{1}{3}b$ または $c \geq 3b$ と $\mu(\mathfrak{p}) = 2$ の同値性を示す。

$c \geq 3b$ を仮定すると、ある非負整数 n が存在して、$c = 3b + 8n$ と書くことが出来る。よってこの時、$\mu(\mathfrak{p}) = 2$ である。同様に、$3c \leq b$ を仮定すると、$\mu(\mathfrak{p}) = 2$ である。

逆に、$\mu(\mathfrak{p}) = 2$ ならば $c \leq \frac{1}{3}b$ または $c \geq 3b$ となることを示す。

- $s = 1$ である場合、$\min\{a, b, c\} = a = 8$ であるので、これは起こりえない。
- $t = 1$ である場合、$b = s_2 a + 3c$ となる非負整数 s_2 が存在する。よって、$b \geq 3c$ が得られる。

- $u = 1$ である場合、$c = s_3a + 3b$ となる非負整数 s_3 が存在する。よって、$c \geq 3b$ が得られる。

- $t_1 = 0$ である場合、$\deg f$ の最小性から、$sa = 8c \leq b + 5c$ である。よって、$3c \leq b$ が得られる。

- $u_1 = 0$ である場合、$\deg f$ の最小性から、$sa = 8b \leq 5b + c$ である。よって、$c \geq 3b$ が得られる。

- $s_2 = 0$ を仮定すると、$tb = u_2c$ である。b, c は互いに素なので、$(b, c) = (u_2, t)$ となる。しかし、c は a より大きいことと、t は 8 より大きい値を取らないことは矛盾している。よって、$s_2 = 0$ は起こりえない。

- $u_2 = 0$ である場合、$tb = s_2a$ である。a, b は互いに素なので、$(a, b) = (t, s_2)$ となる。この時、$3b > c$ ならば、$8b = \deg g \leq 3b$ なので、矛盾が生じる。よって、$c \geq 3b$ が得られる。

- $s_3 = 0$ を仮定すると、$uc = t_3b$ である。b, c は互いに素なので、$(b, c) = (u, t_3)$ となる。しかし、b は a より大きいことと、u は 8 より大きい値を取らないことは矛盾している。よって、$s_3 = 0$ は起こりえない。

- $t_3 = 0$ である場合、$uc = s_3a$ である。a, c は互いに素なので、$(a, c) = (u, s_3)$ となる。この時、$3c > b$ ならば、$8c = \deg h \leq 3c$ なので、矛盾が生じる。よって、$c \leq \dfrac{1}{3}b$ が得られる。

以上より、$\dfrac{1}{3}b < c < 3b$ と $\mu(\mathfrak{p}) = 3$ は同値であることが示された。

証明終

以下、$\mu(\mathfrak{p}) = 3$ である場合について考えてゆく。

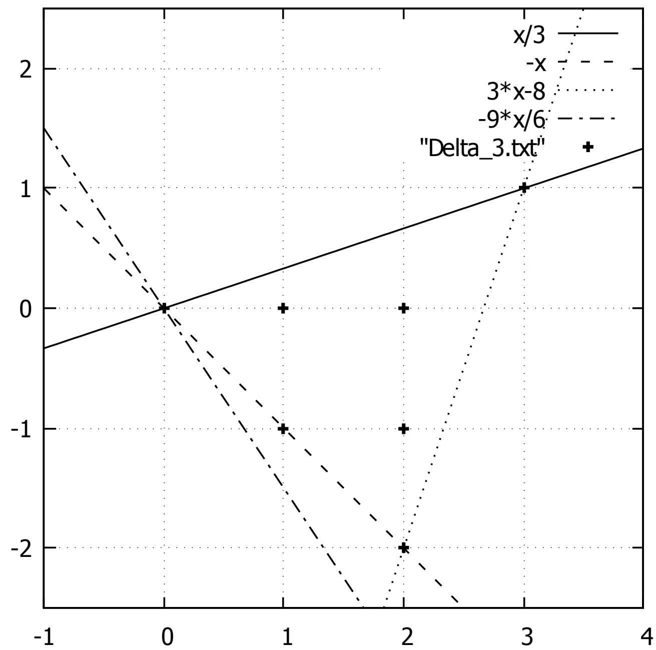
今、$3b = na + c$ となるような自然数 n が存在するため、$\deg g$ の最小性から、$\deg g \leq 3b$ である。同様に、$3c = ma + b$ となるような自然数 m が存在するため、$\deg h$ の最小性から、$\deg h \leq 3c$ である。

ここで、$\deg g = 2b$ を仮定して $\deg g$ に注目すると、$2b = s_2a + 6c$ が得られる。しかし、この条件から、$\deg h > 6c$ が得られてしまい、$\deg h \leq 3c$ に矛盾する。同様に $\deg h = 2c$ から $\deg g > 6b$ が得られてしまい、矛盾が生じる。$t = 1$, $u = 1$ とはならないことから、以上より、$\deg g = 3b$, $\deg h = 3c$ が得られる。

今、$\deg g = 3b = s_2 a + c$, $\deg h = 3c = s_3 a + b$ である。これらから、$\deg f = sa = 2b + 2c$ が得られる。

ここで、f が negative curve だと仮定すると、$\sqrt{abc} > 2b + 2c$ が成り立っている。しかしこれは $a = 8$ なので、$0 > 4(b^2 + c^2)$ が得られてしまい、矛盾が生じる。よって、f は negative curve ではない。次に、g が negative curve であると仮定すると、$\sqrt{abc} > 3b$ より $c > \frac{9}{8}b$ が成り立つ。また、h が negative curve であると仮定した場合には、$\sqrt{abc} > 3c$ より $c < \frac{8}{9}b$ が成り立つ。$\frac{8}{9}b \leq c \leq \frac{9}{8}b$ の範囲では、f, g, h は negative curve とはならない。g が negative curve である場合は、b と c の入れ替えにより、h が negative curve の場合に帰着することが出来ることに注意する。よって、h が negative curve である場合のみを考えれば良い。つまり、$c < \frac{8}{9}b$ を仮定する。この時、$c < b$ であるので、$3b - c > 3c - b$ より、$s_2 a > s_3 a$、よって $s_2 > s_3$ が得られる。

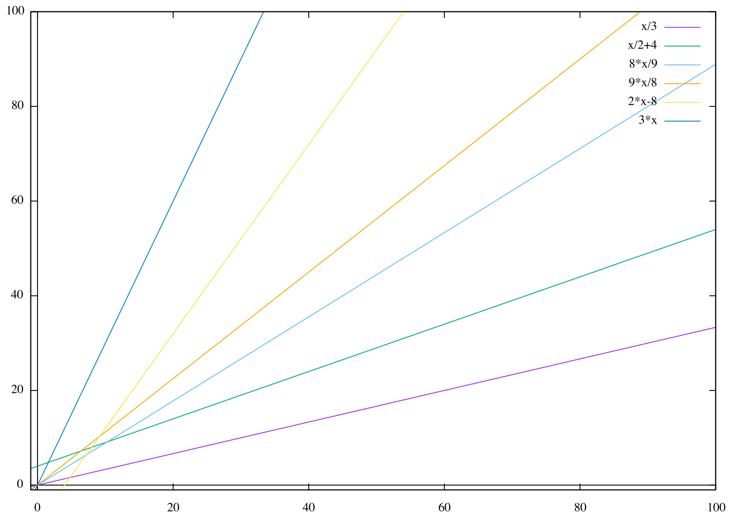
以上よりこの場合、$\frac{u_2}{u_1 + u_2} = \frac{1}{3}, \frac{t_1 + t_3}{t_3} = 3, -\frac{s_2}{s_3} < -1$ である。定理 2.11 を、$r = u = 3$ で用いる。下図の印された格子点の集合は、$\Delta_3 \cap \mathbb{Z}^2$ に含まれることに注意する。



よってこの場合、注意2.15 より、$R_s(\mathfrak{p})$ はネーター環だと分かる。以上より $c \equiv 3b \mod 8$ である場合には、f, g, h の中に negative curve があるとすると、$R_s(\mathfrak{p})$ がネーター環であることが証明された。

- h が negative curve である場合、b, c は $\frac{1}{3}b < c < \frac{8}{9}b$ という関係がある。$-K$ が big であることと $3c < a + b + c$ は同値であるので、$\frac{1}{3}b < c < \frac{1}{2}b + 4$ の範囲では $-K$ が big であり、$\frac{1}{2}b + 4 \leq c < \frac{8}{9}b$ の範囲では $-K$ が big でないと分かる。

- g が negative curve である場合、b, c は $\frac{9}{8}b < c < 3b$ という関係がある。$-K$ が big であることと $3b < a + b + c$ は同値であるので、$2b - 8 < c < 3b$ の範囲では $-K$ が big であり、$\frac{9}{8}b < c \leq 2b - 8$ の範囲では $-K$ が big でないと分かる。



3.3 $c \equiv 5b \mod 8$ の場合

a, b, c は、以下の条件を満たしているとする。

- $\min\{a, b, c\} = a = 8$ である。

- a, b, c は 2 つずつが互いに素である。

- $c \equiv 5b \mod 8$ である。従って、$5c \equiv b \mod 8$ である。

補題 3.2 次の 2 つの条件は同値である。

(1) $\frac{1}{5}b < c < 5b$

(2) $\mu(\mathfrak{p}) = 3$

証明 対偶である、$c \leq \frac{1}{5}b$ または $c \geq 5b$ と $\mu(\mathfrak{p}) = 2$ の同値性を示す。

$5b \leq c$ を仮定すると、ある非負整数 n が存在して、$c = 5b + 8n$ と書くことが出来る。この時、$\mu(\mathfrak{p}) = 2$ である。同様に、$5c \leq b$ を仮定すると、$\mu(\mathfrak{p}) = 2$ である。

次に、$\mu(\mathfrak{p}) = 2$ ならば $c \leq \frac{1}{5}b$ または $c \geq 5b$ となることを示す。

- $s = 1$ である場合、$\min\{a, b, c\} = a = 8$ であるので、これは起こりえない。

- $t = 1$ である場合、$b = s_2 a + 5c$ となる非負整数 s_2 が存在する。よって、$b \geq 5c$ が得られる。

- $u = 1$ である場合、$c = s_3 a + 5b$ となる非負整数 s_3 が存在する。よって、$c \geq 5b$ が得られる。

- $t_1 = 0$ である場合、$\deg f$ の最小性から、$sa = 8c \leq b + 3c$ である。よって、$5c \leq b$ が得られる。

- $u_1 = 0$ である場合、$\deg f$ の最小性から、$sa = 8b \leq 3b + c$ である。よって、$c \geq 5b$ が得られる。

- $s_2 = 0$ を仮定すると、$tb = u_2 c$ である。b, c は互いに素なので、$(b, c) = (u_2, t)$ となる。しかし、c は a より大きいことと、t は 8 より大きい値を取らないことは矛盾している。よって、$s_2 = 0$ は起こりえない。

- $u_2 = 0$ である場合、$tb = s_2 a$ である。a, b は互いに素なので、$(a, b) = (t, s_2)$ となる。この時、$5b > c$ ならば、$8b = \deg g \leq 5b$ なので、矛盾が生じる。よって、$c \geq 5b$ が得られる。

- $s_3 = 0$ を仮定すると、$uc = t_3 b$ である。b, c は互いに素なので、$(b, c) = (u, t_3)$ となる。しかし、b は a より大きいことと、u は 8 より大きい値を取らないことは矛盾している。よって、$s_3 = 0$ は起こりえない。

- $t_3 = 0$ である場合、$uc = s_3 a$ である。a, c は互いに素なので、$(a, c) = (u, s_3)$ となる。この時、$5c > b$ ならば、$8c = \deg h \leq 5c$ なので、矛盾が生じる。よって、$c \leq \frac{1}{5}b$ が得られる。

以上より、$\frac{1}{5}b < c < 5b$ と $\mu(\mathfrak{p}) = 3$ は同値であることが示された。

証明終

以下、$\mu(\mathfrak{p}) = 3$ である場合について考えてゆく。

補題 3.3 $(\deg g, \deg h) = (2b, 5c), (5b, 2c)$ である。

証明 今、$5b = na + c$ となる自然数 n が存在するので、$\deg g$ の最小性から、$\deg g \leq 5b$ である。同様に、$5c = ma + b$ となる自然数 m が存在するので、$\deg h$ の最小性から、$\deg h \leq 5c$ である。

ここで、$\deg g = 3b$ と仮定して $\deg g$ に注目すると、$3b = s_2 a + 7c$ が得られる。しかし、この条件から、$\deg h > 7c$ が得られてしまい、$\deg h \leq 5c$ に矛盾する。また、$\deg g = 4b$ と仮定して $\deg g$ に注目すると、$4b = s_2 a + 4c$ が得られる。しかしこの式から得られる $4(b - c) = s_2 a$ について、左辺は 16 の倍数であることから、右辺も 16 の倍数であることが分かる。よって、s_2 は 2 の倍数であるので、$2b = \frac{s_2}{2}a + 2c$ という自然数係数の式が得られてしまう。これは、$\deg g$ の最小性に矛盾である。よって、$\deg g = 4b$ ではないことが証明された。同様に $\deg h = 3c, 4c$ と仮定しても、矛盾が生じてしまう。また、$(\deg g, \deg h) = (2b, 2c)$ と仮定すると、$2b = s_2 a + 2c$ かつ $2c = s_3 a + 2b$ となってしまい、矛盾が生じる。$(\deg g, \deg h) = (5b, 5c)$ と仮定すると、$sa = 4b + 4c$ が得られるが、$3b + c$ という、より小さな s を与える t_1, u_1 の組が存在するため、矛盾である。

以上より、$(\deg g, \deg h) = (2b, 5c), (5b, 2c)$ が得られる。 証明終

よって、$(\deg f, \deg g, \deg h) = (b + 3c, 2b, 5c), (3b + c, 5b, 2c)$ であることが分かる。ここで、f が negative curve だと仮定すると、$\sqrt{abc} > b + 3c$ または、$\sqrt{abc} > 3b + c$ が成り立っている。しかしこれは $a = 8$ なので、$0 > (b - c)^2 + 8c^2$ または、$0 > (b - c)^2 + 8b^2$ が得られてしまい、矛盾が

生じる。よって、f は negative curve ではない。また、g が negative curve であると仮定すると、b と c の入れ替えにより、h が negative curve の場合に帰着することが出来ることに注意する。よって、h が negative curve である場合のみを考えれば良い。

- $(\deg f, \deg g, \deg h) = (b+3c, 2b, 5c)$ の場合、関係式は、

$$\begin{cases} sa = b + 3c \\ 2b = s_2 a + 2c \\ 5c = s_3 a + b \end{cases}$$

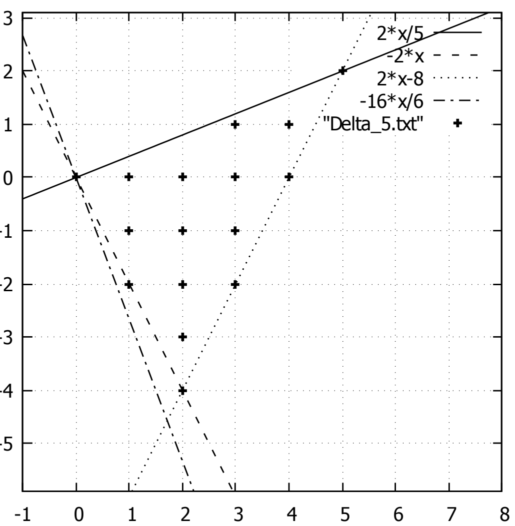
となっている。

今、h を negative curve と仮定しているため、$\sqrt{abc} > 5c$ より、

$$8b > 25c \cdots (*)$$

が成り立っている。この時、$b > 3c$ であるので、$2b - 2c > 2(5c - b)$ より $s_2 a > 2s_3 a$、よって $s_2 > 2s_3$ が得られる。

今、$\dfrac{u_2}{u_1 + u_2} = \dfrac{2}{5}, \dfrac{t_1 + t_3}{t_3} = 2, -\dfrac{s_2}{s_3} < -2$ である。定理 2.11 を、$r = 5$ で用いる。下図の印された格子点の集合は、$\Delta_5 \cap \mathbb{Z}^2$ に含まれることに注意する。



よってこの場合、注意 2.15 より、$R_s(\mathfrak{p})$ はネーター環だと分かる。

- $(\deg f, \deg g, \deg h) = (3b+c, 5b, 2c)$ の場合、関係式は、

$$\begin{cases} sa = 3b + c \\ 5b = s_2 a + c \\ 2c = s_3 a + 2b \end{cases}$$

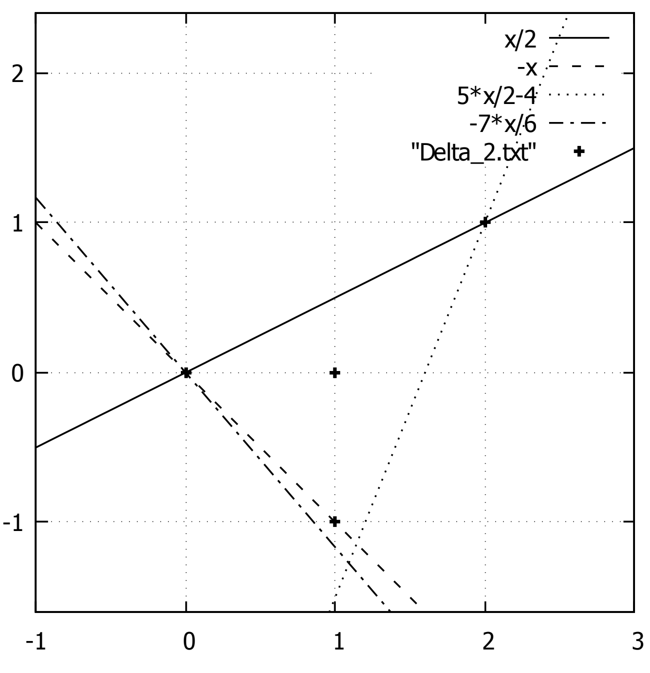
となっている。

今、h を negative curve と仮定しているため、$\sqrt{abc} > 2c$ より、

$$2b > c \cdots (**)$$

が成り立っている。この時、$7b > 3c$ であるので、$5b - c > 2c - 2b$ より $s_2 a > s_3 a$、よって $s_2 > s_3$ が得られる。

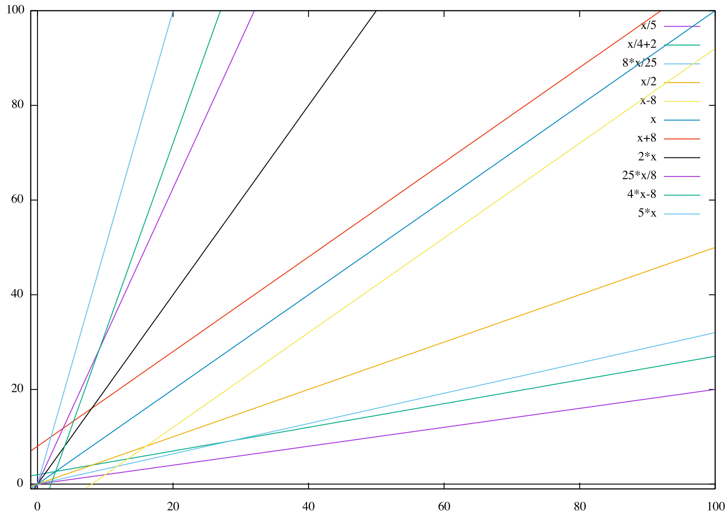
今、$\dfrac{u_2}{u_1+u_2} = \dfrac{1}{2}, \dfrac{t_1+t_3}{t_3} = \dfrac{5}{2}, -\dfrac{s_2}{s_3} < -1$ である。定理 2.11 を、$r = 2$ で用いる。下図の印された格子点の集合は、$\Delta_2 \cap \mathbb{Z}^2$ に含まれることに注意する。



よってこの場合も注意 2.15 より、$R_s(\mathfrak{p})$ はネーター環だと分かる。

以上より $c \equiv 5b \mod 8$ である場合には、f, g, h の中に negative curve があるとすると、$R_s(\mathfrak{p})$ がネーター環であることが証明された。

- $(\deg g, \deg h) = (2b, 5c)$ である場合、b, c は $\frac{1}{5}b < c < b$ という関係がある。
  - h が negative curve である場合、$(*)$ より、b, c は $\frac{1}{5}b < c < \frac{8}{25}b$ という関係がある。$-K$ が big であることと $5c < a + b + c$ は同値であるので、$\frac{1}{5}b < c < \frac{1}{4}b + 2$ の範囲では $-K$ が big であり、$\frac{1}{4}b + 2 \leq c < \frac{8}{25}b$ の範囲では $-K$ が big でないと分かる。
  - g が negative curve である場合、$2b < \sqrt{abc}$ より、b, c は $\frac{1}{2}b < c < b$ という関係がある。$-K$ が big であることと $2b < a+b+c$ は同値であるので、$b-8 < c < b$ の範囲では $-K$ が big であり、$\frac{1}{2}b < c \leq b - 8$ の範囲では $-K$ が big でないと分かる。
- $(\deg g, \deg h) = (5b, 2c)$ である場合、b, c は $b < c < 5b$ という関係がある。
  - h が negative curve である場合、$(**)$ より、b, c は $b < c < 2b$ という関係がある。$-K$ が big であることと $2c < a + b + c$ は同値であるので、$b < c < b + 8$ の範囲では $-K$ が big であり、$b + 8 \leq c < 2b$ の範囲では $-K$ が big でないと分かる。
  - g が negative curve である場合、$5b < \sqrt{abc}$ より、b, c は $\frac{25}{8}b < c < 5b$ という関係がある。$-K$ が big であることと $5b < a+b+c$ は同値であるので、$4b - 8 < c < 5b$ の範囲では $-K$ が big であり、$\frac{25}{8}b < c \leq 4b - 8$ の範囲では $-K$ が big でないと分かる。



3.4 $c \equiv 7b \mod 8$ の場合

a, b, c は、以下の条件を満たしているとする。

- $\min\{a, b, c\} = a = 8$ である。
- a, b, c は 2 つずつが互いに素である。
- $c \equiv 7b \mod 8$ である。従って、$7c \equiv b \mod 8$ である。

このケースでは、$\deg f \leq b+c$ が成立している。よって、$\deg f < a+b+c$ が成立するので、$-K$ は big になる。従ってこのケースでは、命題 2.10 より、negative curve の存在に関わらずに $R_s(\mathfrak{p})$ はネーター環となる。

以下、$\mu(\mathfrak{p}) = 3$ となる範囲や、f, g, h が negative curve となる条件を調べる。

補題 3.4 次の 2 つの条件は同値である。

(1) $\frac{1}{7}b < c < 7b$

(2) $\mu(\mathfrak{p}) = 3$

証明 対偶である、$c \leq \frac{1}{7}b$ または $c \geq 7b$ と $\mu(\mathfrak{p}) = 2$ の同値性を示す。

$7b \leq c$ を仮定すると、ある非負整数 n が存在して、$c = 7b + 8n$ と書くことが出来る。この時、$\mu(\mathfrak{p}) = 2$ である。同様に、$7c \leq b$ を仮定すると、$\mu(\mathfrak{p}) = 2$ である。

次に、$\mu(\mathfrak{p}) = 2$ ならば $c \leq \frac{1}{7}b$ または $c \geq 7b$ となることを示す。

- $s = 1$ である場合、$\min\{a, b, c\} = a = 8$ であるので、これは起こりえない。
- $t = 1$ である場合、$b = s_2 a + 7c$ となる非負整数 s_2 が存在する。よって、$b \geq 7c$ が得られる。
- $u = 1$ である場合、$c = s_3 a + 7b$ となる非負整数 s_3 が存在する。よって、$c \geq 7b$ が得られる。
- $t_1 = 0$ である場合、$\deg f$ の最小性から、$sa = 8c \leq b + c$ である。よって、$7c \leq b$ が得られる。
- $u_1 = 0$ である場合、$\deg f$ の最小性から、$sa = 8b \leq b + c$ である。よって、$c \geq 7b$ が得られる。
- $s_2 = 0$ を仮定すると、$tb = u_2 c$ である。b, c は互いに素なので、$(b, c) = (u_2, t)$ となる。しかし、c は a より大きいことと、t は 8 より大きい値を取らないことは矛盾している。よって、$s_2 = 0$ は起こりえない。
- $u_2 = 0$ である場合、$tb = s_2 a$ である。a, b は互いに素なので、$(a, b) = (t, s_2)$ となる。この時、$7b > c$ ならば、$8b = \deg g \leq 7b$ なので、矛盾が生じる。よって、$c \geq 7b$ が得られる。
- $s_3 = 0$ を仮定すると、$uc = t_3 b$ である。b, c は互いに素なので、$(b, c) = (u, t_3)$ となる。しかし、b は a より大きいことと、u は 8 より大きい値を取らないことは矛盾している。よって、$s_3 = 0$ は起こりえない。
- $t_3 = 0$ である場合、$uc = s_3 a$ である。a, c は互いに素なので、$(a, c) = (u, s_3)$ となる。この時、$7c > b$ ならば、$8c = \deg h \leq 7c$ なので、矛盾が生じる。よって、$c \leq \frac{1}{7}b$ が得られる。

以上より、$\frac{1}{7}b < c < 7b$ と $\mu(\mathfrak{p}) = 3$ は同値であることが示された。

証明終

以下、$\mu(\mathfrak{p}) = 3$ である場合について考えてゆく。

補題 3.5 $\mu(\mathfrak{p}) = 3$ とする。この時、$(\deg g, \deg h) = (2b, 7c), (3b, 6c), (4b, 5c), (5b, 4c), (6b, 3c), (7b, 2c)$ である。

証明 今、$7b = na + c$ となる自然数 n が存在するので、$\deg g$ の最小性から、$\deg g \leq 7b$ である。同様に、$7c = ma + b$ となる自然数 m が存在するので、$\deg h$ の最小性から、$\deg h \leq 7c$ である。$b + c$ は 8 の倍数なので、$\deg f = b + c$ であることに注意する。ここで、定理 2.1 から、$t = t_1 + t_2$, $u = u_1 + u_2$ であることを用いると、

$$\begin{aligned}
&\deg g = 2b = s_2 a + 6c \text{ の時、} \deg h = 7c = s_3 a + b \\
&\deg g = 3b = s_2 a + 5c \text{ の時、} \deg h = 6c = s_3 a + 2b \\
&\deg g = 4b = s_2 a + 4c \text{ の時、} \deg h = 5c = s_3 a + 3b \\
&\deg g = 5b = s_2 a + 3c \text{ の時、} \deg h = 4c = s_3 a + 4b \\
&\deg g = 6b = s_2 a + 2c \text{ の時、} \deg h = 3c = s_3 a + 5b \\
&\deg g = 7b = s_2 a + c \text{ の時、} \deg h = 2c = s_3 a + 6b
\end{aligned}$$

が得られる。

証明終

f が negative curve であると仮定すると、b, c は正であることに注意して、

$$\begin{aligned}
b + c &< \sqrt{abc} \\
b^2 - 6bc + c^2 &< 0 \\
(c - (3 + 2\sqrt{2})b)(c - (3 - 2\sqrt{2})b) &< 0
\end{aligned}$$

よって、$(3 - 2\sqrt{2})b < c < (3 + 2\sqrt{2})b$ の範囲で f が negative curve となる。

- $(\deg g, \deg h) = (2b, 7c)$ の場合、関係式は、

$$\begin{cases} sa = b + c \\ 2b = s_2 a + 6c \\ 7c = s_3 a + b \end{cases}$$

  となっている。

  このケースは、$\frac{1}{7}b < c < \frac{1}{3}b$ の時に起こる。

- $(3-2\sqrt{2})b < c < \frac{1}{3}b$ のとき、f が negative curve である。
- g が negative curve と仮定すると、$2b < \sqrt{abc}$ より $c > \frac{1}{2}b$ が得られるが、これは $\frac{1}{7}b < c < \frac{1}{3}b$ を満たさないため、g は negative curve とはならない。
- h が negative curve と仮定すると、$7c < \sqrt{abc}$ より $c < \frac{8}{49}b$ が得られる。よって、$\frac{1}{7}b < c < \frac{8}{49}b$ の範囲で h は negative curve である。

- $(\deg g, \deg h) = (3b, 6c)$ の場合、関係式は、

$$\begin{cases} sa = b + c \\ 3b = s_2 a + 5c \\ 6c = s_3 a + 2b \end{cases}$$

となっている。
このケースは、$\frac{1}{3}b < c < \frac{3}{5}b$ の時に起こる。この範囲は $(3-2\sqrt{2})b < c < (3+2\sqrt{2})b$ に含まれているため、f が negative curve となる。

- $(\deg g, \deg h) = (4b, 5c)$ の場合、関係式は、

$$\begin{cases} sa = b + c \\ 4b = s_2 a + 4c \\ 5c = s_3 a + 3b \end{cases}$$

となっている。
このケースは、$\frac{3}{5}b < c < b$ の時に起こる。この範囲は $(3-2\sqrt{2})b < c < (3+2\sqrt{2})b$ に含まれているため、f が negative curve となる。

- $(\deg g, \deg h) = (5b, 4c)$ の場合、関係式は、

$$\begin{cases} sa = b + c \\ 5b = s_2 a + 3c \\ 4c = s_3 a + 4b \end{cases}$$

となっている。

このケースは、$b < c < \frac{5}{3}b$ の時に起こる。この範囲は $(3-2\sqrt{2})b < c < (3+2\sqrt{2})b$ に含まれているため、f が negative curve となる。

- $(\deg g, \deg h) = (6b, 3c)$ の場合、関係式は、

$$\begin{cases} sa = b + c \\ 6b = s_2 a + 2c \\ 3c = s_3 a + 5b \end{cases}$$

  となっている。

  このケースは、$\frac{5}{3}b < c < 3b$ の時に起こる。この範囲は $(3-2\sqrt{2})b < c < (3+2\sqrt{2})b$ に含まれているため、f が negative curve となる。

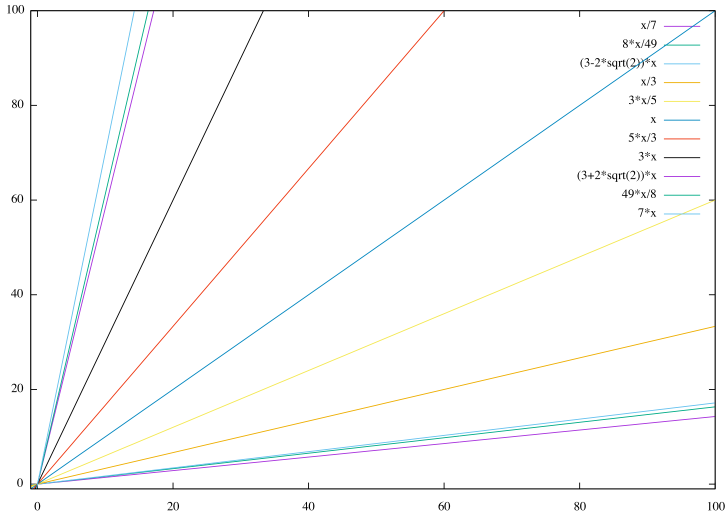
- $(\deg g, \deg h) = (7b, 2c)$ の場合、関係式は、

$$\begin{cases} sa = b + c \\ 7b = s_2 a + c \\ 2c = s_3 a + 6b \end{cases}$$

  となっている。

  このケースは、$3b < c < 7b$ の時に起こる。

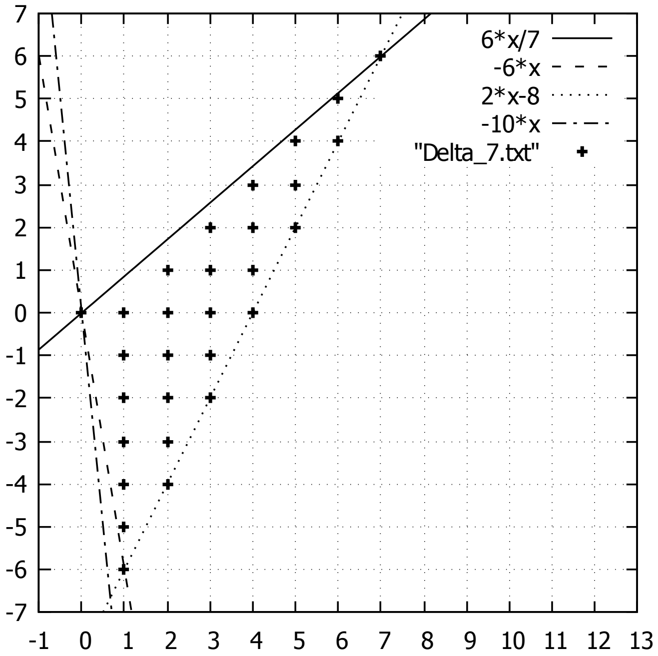
  - $3b < c < (3+2\sqrt{2})b$ のとき、f が negative curve である。
  - g が negative curve と仮定すると、$7b < \sqrt{abc}$ より $c > \frac{49}{8}b$ が得られる。よって、$\frac{49}{8}b < c < 7b$ の範囲で g は negative curve である。
  - h が negative curve と仮定すると、$2c < \sqrt{abc}$ より $c < 2b$ が得られるが、これは $3b < c < 7b$ を満たさないため、h は negative curve とはならない。



f が negative curve となる場合は、s はいくらでも大きい値をとることが出来るため、注意 2.15 を用いて $R_s(\mathfrak{p})$ がネーター環であることを示すことは難しい。g, h が negative curve である場合は、注意 2.15 を用いて $R_s(\mathfrak{p})$ がネーター環であることが確かめられる。g が negative curve であると仮定すると、b と c の入れ替えにより、h が negative curve である場合に帰着することが出来る。よって、h が negative curve となる場合のみを考える。

h が negative curve となるのは、$\frac{1}{7}b < c < \frac{8}{49}b$ の場合である。この時、$b > 6c$ であるので、$2b - 6c > 6(7c - b)$ より、$s_2 a > 6 s_3 a$、よって $s_2 > 6 s_3$ が得られる。

今、$\frac{u_2}{u_1 + u_2} = \frac{6}{7}$, $\frac{t_1 + t_3}{t_3} = 2$, $-\frac{s_2}{s_3} < -6$ である。定理 2.11 を、$r = 7$ で用いる。下図の印された格子点の集合は、$\Delta_7 \cap \mathbb{Z}^2$ に含まれることに注意する。



よってこの場合、注意 2.15 より、$R_s(\mathfrak{p})$ はネーター環だと分かる。

参考文献

[1] R. Cowsik, *Symbolic powers and the number of defining equations,* Algebra and its Applications, Lect. Notes in Pure and Appl. Math. **91** (1985), 13-14.

[2] S. D. Cutkosky, *Symbolic algebras of monomial primes,* J. reine angew. Math. **416** (1991), 71-89.

[3] J. L. Gonzales and K. Karu, *Some non-finitely generated cox rings,* Compos. Math. **152** (2016), 984-996

[4] S. Goto, K. Nishida and K.-i. Watanabe, *Non-Cohen-Macaulay symbolic blow-ups for space monomial curves and counterexamples to Cowsik's question,* Proc. Amer. Math. Soc. **120** (1994), 383-392.

[5] J. HERZOG, *Generators and relations of Abelian semigroups and semigroup rings,* Manuscripta Math. **3** (1970), 175-193.

[6] C. HUNEKE, *Hilbert functions and symbolic powers,* Michigan Math. J. **34** (1987), 293-318.

[7] M. NAGATA, *On the fourteenth problem of Hilbert,* Proc. Internat. Congress Math. (1958), Cambridge Univ. Press, 1960.

[8] P. ROBERTS, *A prime ideal in a polynomial ring whose symbolic blow-up is not Noetherian,* Proc. Amer. Math. Soc. **94** (1985), 589-592.

[9] P. ROBERTS, *An infinitely generated symbolic blow-ups in a power series ring and a new counterexample to Hilbert's fourteenth problem,* J. Algebra **132** (1990), 461-473