

明治大学大学院理工学研究科  
2016年度  
博士学位請求論文

正標数の超曲面によって定まる関数  
(A function determined  
by a hypersurface  
of positive characteristic)

学位請求者 基礎理工学専攻  
大田康介

## 目次

謝辞	2
1 序論	3
2 記号と主定理	6
3 主定理の証明	12
4 $f$ が単項式の場合	24
参考文献	29
索引	31

## 謝辞

本論文は、筆者が明治大学大学院理工学研究科基礎理工学専攻の博士後期課程において行った研究成果をまとめたものです。本論文を作成するにあたり、終始暖かい激励とご指導、ご鞭撻を頂いた私の指導教員である藏野和彦教授に心より感謝申し上げます。的確な助言と激励をくださった鴨井祐二先生、三内顕義先生、渡辺敬一先生に感謝申し上げます。

# 1 序論

本論文は, [14] の定義や定理の証明を詳しく書き直したものである. 本論文では, 区間  $[0, 1]$  上で定義される超曲面についての関数  $\xi_f(x)$  を導入する. 超曲面のヒルベルト・クンツ関数と F 符号が, 関数  $\xi_f(x)$  の区間  $[0, 1]$  の両端の値として現れる. 関数  $\xi_f(x)$  をヒルベルト・クンツ重複度と F 符号の一般化として見なすことができる. 以下, 環は全て可換環とする.

1969年 Kunz [11] は, 正標数 (標数  $p > 0$ ) のネーター局所環  $(S, \mathfrak{n})$  と自然数  $v \in \mathbb{N}$  に対して,  $S(p^v) = S/\mathfrak{n}^{[p^v]}$  とおくと,  $S$  の正則性を  $\ell_v = \ell_S(S(p^v))$  の値によって特徴付けた. それは次の定理である. 以下, 本論文において  $p$  は素数を表す.

**定理 1.1** (Kunz [11], Theorem 3.3).  $S$  を標数  $p > 0$  のネーター局所環とするとき, 次の条件 (1), (2), (3) は同値である.

- (1)  $S$  が正則局所環である,
- (2)  $\ell_1 = p^{\dim S}$ ,
- (3) ある自然数  $v \in \mathbb{N}$  が存在して  $\ell_v = p^{v \dim S}$  が成り立つ.

また,  $S$  の正則性と  $S^p$  上平坦性との関係性についての次の理も証明している. ここで,  $S^p$  は  $S$  の元の  $p$  乗からなる環  $\{x^p | x \in S\}$  である.

**定理 1.2** (Kunz [11], Theorem 2.1).  $S$  を標数  $p > 0$  のネーター局所環とするとき, 次の条件 (1), (2), (3) は同値である.

- (1)  $S$  が正則局所環である,
- (2)  $S$  が被約で,  $S^p$  加群として平坦である,
- (3)  $S$  が被約でかつ, ある自然数  $v \in \mathbb{N}$  が存在して  $S^{p^v}$  加群として平坦である.

その後, 1976年 Kunz [10] は,  $S/\mathfrak{n}^{[p^v]}$  を  $S$  の  $v$  回フロベニウス・ファイバーと呼び,

$$\lambda_v(S) = \frac{\ell_S(S/\mathfrak{n}^{[p^v]})}{p^{v \dim S}}$$

を  $v$  回フロベニウス・ファイバーの被約な長さと呼んだ. また, Kunz は, 有限生成  $S$  加群  $M$  に対して,

$$\lambda_v(M) = \frac{\ell_S(M/\mathfrak{n}^{[p^v]}M)}{p^{v \dim S}}$$

と定め, 局所化と平坦拡大での  $\lambda_v(M)$  の振る舞いを提示した. 具体例によって, 十分大きな  $v$  に対して,  $\lambda_v(S)$  がある種の良い振る舞いをするを示

した. このとき, ヒルベルト・クンツ重複度の概念が提起されたと言える. 一般に,  $S$  のイデアル  $I$  と有限生成  $S$  加群  $M$  に対して, ヒルベルト・クンツ重複度は,

$$e_{HK}(I, M) = \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{\ell_S(M/I^{[p^v]}M)}{p^{v \dim S}}$$

で定義される. 1983 年 Monsky [13] は初めて, 関数  $v \mapsto \lambda_v(M)$  を提起し, これをヒルベルト・クンツ関数と呼んだ. また, 正標数のネーター局所環に対して, 常にヒルベルト・クンツ重複度が存在することを証明した. その後 Han-Monsky [6] は, 超曲面  $\mathbb{Z}/(p)[[X_1, X_2, \dots, X_{n+1}]]/(X_1^{k_1} + X_2^{k_2} + \dots + X_{n+1}^{k_{n+1}})$  のヒルベルト・クンツ関数の計算についての研究を行っている. ヒルベルト・クンツ重複度という言葉と,  $e_{HK}(I, M)$  という表記を初めて用いたのは, Huneke [7] であると考えられる. 2000 年, 渡辺-吉田 [17] は, Kunz [11] の結果 (定理 1.1) を拡張した次の定理を証明した.

**定理 1.3** (渡辺-吉田 [17], 1.5).  $S$  を標数  $p > 0$  の非混合的ネーター局所環とする. このとき,  $e_{HK}(S) = 1$  であることと,  $S$  が正則局所環であることは同値である.

次に,  $S$  を  $e$  回フロベニウス写像  $F^e : S \rightarrow S$  を通して  $S$  加群と見なしたものを  $S = F_*^e S$  を考える.  $F_*^e S \simeq S^{\oplus a_e} \oplus M_e$  と直和分解する. ただし,  $M_e$  は自由  $S$  加群を直和因子として持たないとする. このような  $a_e$  は一意なので, 言い換えれば,  $a_e$  は  $F_*^e S$  に  $S$  が直和因子として含まれる最大個数である.  $a_e$  を  $S$  の  $e$  回フロベニウス分裂数と呼ぶ. 2002 年 Huneke-Leuschke [8] によって, 体を部分集合として含んだ正標数のコーエン・マコーレー局所環に対して F 符号

$$s(S) = \lim_{e \rightarrow \infty} \frac{a_e}{p^{ed}}$$

が定義された. また,  $S$  の正則性を特徴付けた次の定理を証明した.

**定理 1.4** (Huneke-Leuschke [8], Corollary 16).  $S$  を標数  $p > 0$  の被約 F 有限コーエン・マコーレー局所環とする. また, F 符号  $s(S)$  が存在すると仮定する. このとき,  $s(S) = 1$  であることと,  $S$  が正則局所環であることは同値である.

さらに, 体を部分集合として含んだ完備な被約 F 有限ゴレンシュタイン局所環に対しては, F 符号の極限の存在性が証明されていた. より一般的な場合に対する極限の存在証明は, 10 年後になる. 2012 年 Tucker [16] は, 正標数の被約 F 有限ネーター局所環に対して F 符号の存在性を証明した.

本論文では, 正標数の完全体  $k$  上の形式的冪級数環  $R = k[[X_1, X_2, \dots, X_{n+1}]]$  を, その極大イデアルに含まれる一つの多項式  $f$  で割った剰余環 ( $n$  次元超曲面) を考える.  $n$  次元超曲面  $R/(f)$  に対して, ヒルベルト・クンツ重複度や F 符号, F 純閾値が現れる関数  $\xi_f(x)$  を定義した. この関数は, 区間  $[0, 1]$  上

で定義された実数値の有界で単調減少な確率密度関数となっている。また、 $t \in [0, 1]$  から 1 まで積分すると、2013 年に Blickle-Schwede-Tucker [3] が定義した組  $(R, f^t)$  の F 符号となる。これは  $s(R, f^t)$  で表され、 $t \in [0, 1]$  についての関数である。本論文で定義された関数  $\xi_f(x)$  と組  $(R, f^t)$  の F 符号との大きな違いは、不連続点が存在するかどうかである。組  $(R, f^t)$  の F 符号は連続関数であるのに対し、 $\xi_f(x)$  は多くの場合で（高々可算個の）不連続点が存在する。例えば、 $f = X_1 X_2^2$  とすると  $x = 1/2$  が唯一の不連続点となっている。本論文では、関数  $\xi_f(x)$  についての次の性質を証明する。

**定理 2.10** . 1) 関数  $\xi_f(x)$  は有界かつ単調減少である。 $[0, 1]$  の可算部分集合  $C$  が存在して、 $\xi_f(x)$  が任意の点  $\alpha \in [0, 1] - C$  で連続である。さらに、 $\xi_f(x)$  は 0 と 1 で連続である。

2) もし  $\xi_f(x)$  が点  $\alpha \in [0, 1]$  で連続であったならば、 $\lim_{e \rightarrow \infty} \xi_{f,e}(\alpha) = \xi_f(\alpha)$  が成り立つ。

3)  $\xi_f(0) = e_{HK}(R/(f))$ ,  $\xi_f(1) = s(R/(f))$ .

4)  $\xi_f(1) = 0$  を仮定する。このとき、 $\text{fpt}(f) = \inf\{\alpha \in [0, 1] \mid \xi_f(\alpha) = 0\}$  が成り立つ。ただし、 $\mu_f(p^e) = \min\{t \geq 1 \mid f^t \in \mathfrak{m}^{[p^e]}\}$  とおいたとき、 $\text{fpt}(f) = \lim_{e \rightarrow \infty} \frac{\mu_f(p^e)}{p^e}$  と定める。fpt( $f$ ) を  $f$  の F 純閾値と呼ぶ。F 純閾値は、高木-渡辺 [15] によって導入された。

5) 関数  $\xi_f(x)$  は可積分であり、各整数  $0 \leq a < p^e$  に対して、 $\int_{\frac{a}{p^e}}^{\frac{a+1}{p^e}} \xi_f(x) dx = \frac{\ell_R(M_{e,a})}{p^{e(n+1)}}$  が成り立つ。特に、 $\int_0^1 \xi_f(x) dx = 1$  が成り立つ。

6) もし  $R/(f)$  が正規であったならば、 $\xi'_f(0) = 0$  が成り立つ。ここで、 $\xi'_f(0)$  は  $x = 0$  における  $\xi_f(x)$  の微分係数である。特に、 $s(R/(f)) > 0$  ならば  $\xi'_f(0) = 0$  である。

ただちに、 $e_{HK}(R/(f)) \times \text{fpt}(f) \geq 1$  であることが分かる (系 2.14)。渡辺-吉田 [17] と Huneke-Leuschke [8] によって既知の結果 (定理 1.3, 定理 1.4) ではあるが、定理 2.10 から、超曲面のヒルベルト・クンツ重複度が 1 であることと、F 符号が 1 であることとの同値性が確かめられる。

最後に、 $f$  が単項式である場合の  $\xi_f(x)$  の計算を提示した。

**命題 4.1** .  $f = X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} \cdots X_{n+1}^{\alpha_{n+1}}$  とおく。ただし、 $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \cdots \leq \alpha_{n+1}$  とする。このとき、次が成り立つ。

1)  $\text{fpt}(f) = \frac{1}{\alpha_{n+1}}$  . もしも  $\alpha_{n+1} \geq 2$  ならば、 $s(R/(f)) = 0$  である。

2)  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{\alpha_{n+1}} - 0} \xi_f(x) = \left( \frac{1}{\alpha_{n+1}} \right)^{n-1} \prod_{j=1}^n (\alpha_{n+1} - \alpha_j) \geq 0$ .

- 3) 関数  $\xi_f(x)$  が  $[0, 1]$  上で連続であるための必要十分条件は  $\alpha_{n+1} = \alpha_n$  である.
- 4)  $\alpha_{n+1} = p^s q$  とする. ただし,  $q$  は  $p$  と互いに素で,  $s$  は非負整数とする. このとき, 極限  $\lim_{e \rightarrow \infty} \xi_{f,e} \left( \frac{1}{\alpha_{n+1}} \right)$  が存在するための必要十分条件は,  $\alpha_{n+1} = \alpha_n$  または  $p \equiv 1 \pmod{q}$  が成り立つことである.

## 2 記号と主定理

**定義 2.1.**  $(S, \mathfrak{n}, k)$  を標数  $p > 0$  の  $d$  次元ネーター局所環とする.  $S$  のヒルベルト・クンツ重複度は,

$$e_{HK}(S) = \lim_{e \rightarrow \infty} \frac{\ell_S(S/\mathfrak{n}^{[p^e]})}{p^{ed}}$$

として定義される. ここで,  $\ell_S(S/\mathfrak{n}^{[p^e]})$  は  $S/\mathfrak{n}^{[p^e]}$  の  $S$  加群としての長さ,  $\mathfrak{n}^{[p^e]} = (x^{p^e} | x \in \mathfrak{n})$  は  $\mathfrak{n}$  の  $e$  回フロベニウス冪である. ヒルベルト・クンツ重複度は, Kunz [10] によって初めてこの概念が提示され, Monsky [13] によって極限の存在性が証明された.

$(S, \mathfrak{n}, k)$  を標数  $p > 0$  の  $d$  次元ネーター局所環とする.  $F : S \rightarrow S$  をフロベニウス写像, すなわち  $x \in S$  に対して  $F(x) = x^p$  とする. 任意の正整数  $e > 0$  に対して,  $S$  を  $e$  回フロベニウス写像を通して  $S$  加群と見なしたものを  $F_*^e S$  で表す.  $F_*^e S$  の元  $s$  を,  $S$  の元と区別するために,  $F_*^e(s)$  で表す.  $a, s \in S$  に対して,  $a \cdot F_*^e(s) = F_*^e(a^{p^e} s)$  である. まずは,  $F$  有限環の定義をする. その後,  $F$  符号の定義をする.

**定義 2.2.**  $S$  を標数  $p > 0$  のネーター環とする. このとき,  $S$  が  $F$  有限環であるとは, フロベニウス写像  $F : S \rightarrow S$  が有限な環準同型であるときに言う. 別の言い方をすれば,  $S$  が部分環  $S^p = \{x^p | x \in S\}$  上有限生成であるときに言う.

**定義 2.3.**  $S$  をネーター環とする. このとき,  $S$  が被約であるとは, 冪零イデアル  $\sqrt{(0)}$  が零イデアル  $(0)$  に一致するときに言う.

ネーター環  $S$  が整域であると仮定する. このとき,  $S$  の商体の代数閉包  $K$  を考えれば, 任意の  $r \in S$  に対して唯一つの  $p^e$  乗根が存在する. そこで,  $S^{\frac{1}{p^e}} = \{x \in K | x^{p^e} \in S\}$  と定める. 代数閉包は体であって被約であるから, 環準同型

$$S^{\frac{1}{p^e}} = \{x | x^{p^e} \in S\} \rightarrow S, \quad x \mapsto x^{p^e}$$

は環の同型である。したがって、可換図式 (1) のように、包含写像  $S \rightarrow S^{\frac{1}{p^e}}$  は、フロベニウス写像  $F: S \rightarrow S$  と同一視できる。

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\text{包含写像}} & S^{\frac{1}{p^e}} \\ \parallel & & \downarrow \simeq \\ S & \xrightarrow{F} & S \end{array} \quad (1)$$

よって、ネーター整域  $S$  が  $F$  有限環であることと、 $S^{\frac{1}{p^e}}$  が部分環  $S$  上有限生成であることは同値である。

1976 年 Kunz は、次の定理 2.4 を証明した。

**定理 2.4** (Kunz [10], 2.5). 標数  $p > 0$  のネーター環  $S$  が  $[S : S^p] < \infty$  を満たすならば、 $S$  は優秀環である。ここで、 $[S : S^p]$  は  $S^p$  加群としての  $S$  の生成系の個数の最小値である。

したがって、 $F$  有限環は優秀環である。

**定義 2.5.**  $(S, \mathfrak{n}, k)$  を標数  $p > 0$  の  $d$  次元被約  $F$  有限ネーター局所環とする。任意の正整数  $e > 0$  に対して、整数  $a_e$  と自由  $S$  加群を直和因子として持たない  $S$  加群  $M_e$  によって、 $S$  加群として  $F_*^e S \simeq S^{\oplus a_e} \oplus M_e$  と直和分解する。整数  $a_e$  は、このような分解の仕方によらず一意的で、 $S$  の  $e$  回フロベニウス分裂数と呼ぶ。Huneke-Leuschke [8] が  $S$  の  $F$  符号を

$$s(S) = \lim_{e \rightarrow \infty} \frac{a_e}{p^{ed}}$$

で定義した。定義された当初は、一般に右辺の極限が存在するかどうかは知られていなかった。Tucker [16] は、標数  $p > 0$  の  $d$  次元被約  $F$  有限ネーター局所環に対して、極限が存在することを証明した。

以下、本論文では、 $n \geq 1$ ,  $R = k[[X_1, \dots, X_{n+1}]]$  を標数  $p > 0$  の完全体  $k$  上の形式的冪級数環とする。 $\mathfrak{m} = (X_1, \dots, X_{n+1})$  は  $R$  の極大イデアルとし、 $0 \neq f \in \mathfrak{m}$  とする。剰余環  $R/(f)$  を  $n$  次元超曲面と呼ぶ。

**定義 2.6.** 2つの整数  $e \geq 0$ ,  $t \geq 0$  に対して、

$$M_{e,t} = \frac{(f^t) + \mathfrak{m}^{[p^e]}}{(f^{t+1}) + \mathfrak{m}^{[p^e]}} \simeq \frac{R}{((f^{t+1}) + \mathfrak{m}^{[p^e]}) : f^t} = \frac{R}{(f) + (\mathfrak{m}^{[p^e]} : f^t)}$$

と定める。

$(f) + (\mathfrak{m}^{[p^e]} : f^t) \subset (f) + (\mathfrak{m}^{[p^e]} : f^{t+1})$  であることから、自然な全射

$$M_{e,t} \rightarrow M_{e,t+1}$$

が存在する。

$\bar{R} = R/\mathfrak{m}^{[p^e]}$  とおけば、 $M_{e,t} = f^t \bar{R} / f^{t+1} \bar{R}$  と書くことができる。

定義 2.7.  $\ell_R(M_{e,t})$  を  $R$  加群  $M_{e,t}$  の長さとし,

$$C_{e,t} = \frac{\ell_R(M_{e,t})}{p^{en}}$$

と定める.

ここで,

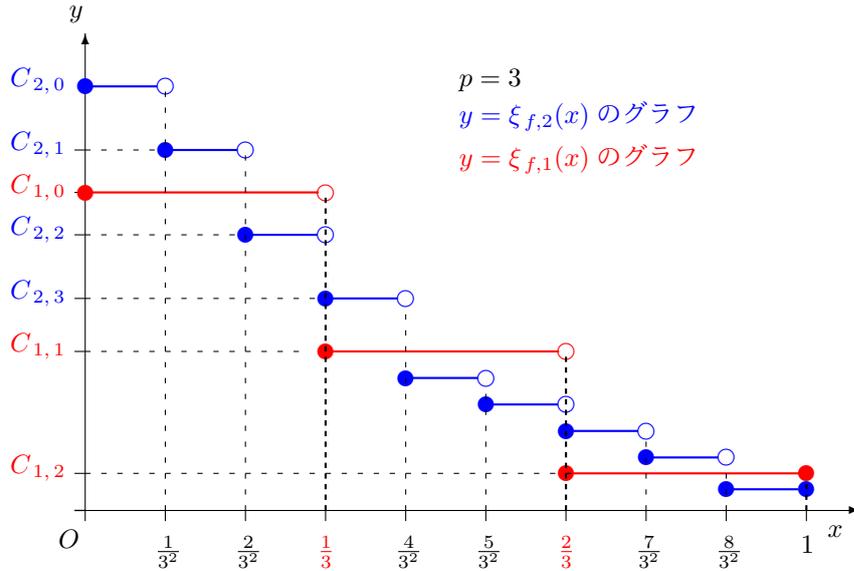
$$p^e \geq C_{e,0} \geq C_{e,1} \geq \cdots \geq C_{e,p^e-1} \geq C_{e,p^e} = C_{e,p^e+1} = \cdots = 0 \quad (2)$$

が成り立つことに注意する.

定義 2.8. 関数列  $\{\xi_{f,e} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}\}_{e \geq 0}$  を

$$\xi_{f,e}(x) = \begin{cases} C_{e, \lfloor xp^e \rfloor} & (0 \leq x < 1) \\ C_{e, p^e-1} & (x = 1) \end{cases}$$

で定義する. ただし,  $\lfloor w \rfloor = \max \{a \in \mathbb{Z} \mid w \geq a\}$  は  $w \in \mathbb{R}$  についての床関数である.



定義から,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \xi_{f,e}(x) dx &= \frac{1}{p^e} (C_{e,0} + C_{e,1} + C_{e,2} + \cdots + C_{e,p^e-1}) \\ &= \frac{1}{p^e} \times \frac{1}{p^{en}} (\ell_R(M_{e,0}) + \ell_R(M_{e,1}) + \cdots + \ell_R(M_{e,p^e-1})) \\ &= \frac{1}{p^{e(n+1)}} \ell_R(R/\mathfrak{m}^{[p^e]}) \\ &= \frac{1}{p^{e(n+1)}} \times p^{e(n+1)} \\ &= 1 \end{aligned}$$

が得られる.

**定義 2.9.** 任意の  $x \in [0, 1]$  に対して, 関数  $\xi_f(x)$  を

$$\xi_f(x) = \limsup_{e \rightarrow \infty} \xi_{f,e}(x)$$

と定める.

不等式 (2) によって,  $\xi_f(x)$  は  $[0, 1]$  上の単調減少関数である. もしも極限  $\lim_{e \rightarrow \infty} \xi_{f,e}(\alpha)$  が存在したら,  $\xi_f(\alpha) = \lim_{e \rightarrow \infty} \xi_{f,e}(\alpha)$  が成り立つ. 第 3 節の補題 3.1 により, 数列  $\{C_{e,0}\}_e$  は単調増加である. 極限

$$\lim_{e \rightarrow \infty} C_{e,0} = \lim_{e \rightarrow \infty} \frac{\ell_R(M_{e,0})}{p^{en}} = \lim_{e \rightarrow \infty} \frac{\ell_R(R/(f) + \mathfrak{m}^{[p^e]})}{p^{en}}$$

は  $R/(f)$  のヒルベルト・クンツ重複度である. つまり,

$$e_{HK}(R/(f)) = \lim_{e \rightarrow \infty} C_{e,0}$$

である. したがって, 不等式 (2) により, 任意の  $\alpha \in [0, 1]$  に対して,  $\limsup_{e \rightarrow \infty} \xi_{f,e}(\alpha)$  は  $+\infty$  ではない. 第 4 節では,  $\lim_{e \rightarrow \infty} \xi_{f,e}(\alpha)$  が存在しないような  $f \in R$  と  $\alpha \in [0, 1]$  の例を与える. ここで,

$$\xi_f(0) = e_{HK}(R/(f)) \quad (3)$$

に注意すると,  $\xi_f(x)$  は  $[0, 1]$  上の有界な単調減少関数である. 特に,  $\xi_f(x)$  は可積分であり,  $[0, 1]$  上の不連続点は高々可算個である.

本論文の主結果は次である.

**定理 2.10.** 1) 関数  $\xi_f(x)$  は有界かつ単調減少である.  $[0, 1]$  の可算部分集合  $C$  が存在して,  $\xi_f(x)$  が任意の点  $\alpha \in [0, 1] - C$  で連続である. さらに,  $\xi_f(x)$  は 0 と 1 で連続である.

2) もし  $\xi_f(x)$  が点  $\alpha \in [0, 1]$  で連続であったならば,  $\lim_{e \rightarrow \infty} \xi_{f,e}(\alpha) = \xi_f(\alpha)$  が成り立つ.

3)  $\xi_f(0) = e_{HK}(R/(f))$ ,  $\xi_f(1) = s(R/(f))$ .

4)  $\xi_f(1) = 0$  を仮定する. このとき,  $\text{fpt}(f) = \inf\{\alpha \in [0, 1] \mid \xi_f(\alpha) = 0\}$  が成り立つ. ただし,  $\mu_f(p^e) = \min\{t \geq 1 \mid f^t \in \mathfrak{m}^{[p^e]}\}$  とおいたとき,  $\text{fpt}(f) = \lim_{e \rightarrow \infty} \frac{\mu_f(p^e)}{p^e}$  と定める.  $\text{fpt}(f)$  を  $f$  の F 純閾値と呼ぶ. F 純閾値は, 2004 年に高木-渡辺 [15] によって導入された.

5) 関数  $\xi_f(x)$  は可積分であり, 各整数  $0 \leq a < p^e$  に対して,  $\int_{\frac{a}{p^e}}^{\frac{a+1}{p^e}} \xi_f(x) dx = \frac{\ell_R(M_{e,a})}{p^{e(n+1)}}$  が成り立つ. 特に,  $\int_0^1 \xi_f(x) dx = 1$  が成り立つ.

6) もし  $R/(f)$  が正規であったならば,  $\xi'_f(0) = 0$  が成り立つ. ここで,  $\xi'_f(0)$  は  $x = 0$  における  $\xi_f(x)$  の微分係数である. 特に,  $s(R/(f)) > 0$  ならば  $\xi'_f(0) = 0$  である.

**注意 2.11.**  $F$  有限環  $S$  の  $F$  符号が正の値を取るための必要十分条件は,  $S$  が強  $F$  正則であることである. 強  $F$  正則な環は, コーエン・マコーレーかつ正規である.

**注意 2.12.** Blickle-Mustața-Smith [2] の Theorem 1.1 と Proposition 3.2 (i) により,  $\text{fpt}(f)$  が正の有理数であることが分かる.  $F$  純閾値は, Blickle-Mustața-Smith [2] で定義されている  $F$  跳躍指数の最小値であることに注意する.

**注意 2.13.** 区間  $[0, 1]$  上の関数  $\varphi_f(x)$  を

$$\varphi_f(x) = \int_0^x \xi_f(t) dt.$$

で定義する. このとき,

$$\varphi_f(x) = \lim_{e \rightarrow \infty} \frac{1}{p^e} (C_{e,0} + C_{e,1} + \cdots + C_{e, \lfloor xp^e \rfloor - 1}).$$

である.  $\xi_f(x)$  は  $[0, 1]$  上で有界かつ可積分なので,  $\varphi_f(x)$  は  $[0, 1]$  上リプシッツ連続である. 特に,  $\varphi_f(x)$  は  $[0, 1]$  上連続である. 本論文の定理 2.10 の 3), 4) は次のように書き換えられる.

3') 関数  $\varphi_f(x)$  は  $x = 0, 1$  で微分可能であり,  $\varphi'_f(0) = e_{HK}(R/(f))$  と  $\varphi'_f(1) = s(R/(f))$  が成り立つ.

4')  $s(R/(f)) = 0$  と仮定する. このとき,

$$\text{fpt}(f) = \inf\{\alpha \in [0, 1] \mid \varphi_f(\alpha) = 1\}$$

が成り立つ.

$(A, \mathfrak{n})$  を標数  $p$  の  $n + 1$  次元  $F$  有限正則局所環として,  $0 \neq g \in A$  を取る. Blickle-Schwede-Tucker [3] は, 任意の実数  $t \in [0, 1]$  に対して, 組  $(A, f^t)$  の  $F$  符号を

$$s(A, g^t) = \lim_{e \rightarrow \infty} \frac{1}{p^{e(n+1)}} \ell_A \left( \frac{A}{\mathfrak{n}^{\lfloor pe \rfloor} : g^{\lceil t(p^e - 1) \rceil}} \right)$$

で定義した. 定理 2.10 の 5) を使えば,

$$1 - \varphi_f(x) = \int_t^1 \xi_f(x) dx = s(R, f^t)$$

が分かる. さらに, もしも  $\xi_f(x)$  が  $x = 0, 1$  で連続であったならば (実際は, 定理 2.10 の 1) により連続である), Blickle-Schwede-Tucker [3] の Theorem 4.4 から, 直ちに定理 2.10 の 3) が得られる.

第3節では、定理2.10を証明する。次の系2.14は、定理2.10の3)と5)から直ちに得られる。

**系 2.14.**  $e_{HK}(R/(f)) \times \text{fpt}(f) \geq 1$ .

**例 2.15.**  $\alpha > 0$  とする。このとき、 $e_{HK}(R/(X_1^\alpha)) = \alpha$  と  $\text{fpt}(X_1^\alpha) = \frac{1}{\alpha}$  が成り立つ。したがって、ある線形変換  $\tau$  があって  $\tau(f) = X_1^\alpha$  となるならば (例えば、 $f = X_1 + X_2$ )、 $e_{HK}(R/(f)) \times \text{fpt}(f) = 1$  と  $s(R/(f)) = 1$  が成り立つ (第4節で確認する)。それ以外の  $f$  で  $e_{HK}(R/(f)) \times \text{fpt}(f) = 1$  を満たす例は確認できていない。

**注意 2.16.** 定理2.10の1), 3), 5)により、 $e_{HK}(R/(f)) = 1$  と  $s(R/(f)) = 1$  とが同値であることが直ちに分かる。これらの条件は、次の結果から、 $R/(f)$  が正則であることと同値である。

- 1)  $S$  を正標数の非混合的ネーター局所環とする。このとき、 $e_{HK}(S) = 1$  と  $S$  が正則であることは同値である (渡辺-吉田 [17], Theorem 1.5)。
- 2)  $S$  を正標数の被約F有限コーエン・マコーレー局所環とする。このとき、 $s(S) = 1$  と  $S$  が正則であることは同値である。(Huneke-Leuschke [8], Corollary 16)。

**注意 2.17.**  $m < n = \dim R/(f)$  とする。 $a_e = \ell_R(M_{e, p^e-1})$  とおく。このとき、 $a_e = \alpha p^{em} + o(p^{em})$  と仮定する。つまり  $\lim_{e \rightarrow \infty} \frac{a_e}{p^{em}} = \alpha$  とする。ここで、 $g_e = a_e - \alpha p^{em}$  とおく。このとき、

$$\begin{aligned} \varphi_f(1) - \varphi_f\left(\frac{p^e - 1}{p^e}\right) &= \sum_{i=0}^{p^e-1} \frac{\ell_R(M_{e, i})}{p^{e(n+1)}} - \sum_{i=0}^{p^e-2} \frac{\ell_R(M_{e, i})}{p^{e(n+1)}} \\ &= \frac{\ell_R(M_{e, p^e-1})}{p^{e(n+1)}} \\ &= \frac{\alpha}{p^{e(n-m+1)}} + \frac{g_e}{p^{e(n+1)}} \end{aligned}$$

が成り立つ。今、 $x = \frac{p^e - 1}{p^e}$  とすれば、 $x - 1 = -\frac{1}{p^e}$  なので、

$$\varphi_f(x) = \varphi_f(1) + (-1)^{n-m} \alpha (x-1)^{n-m+1} + o((x-1)^{n-m+1}) \quad (4)$$

が成り立つことが分かる。注意2.12により  $\varphi_f(x)$  は  $[0, 1]$  上連続なので、 $\varphi_f(x)$  は点  $x = 1$  の周りで式(4)の形をなす。したがって、 $\varphi_f(x)$  が点  $x = 1$  の周りでテーラー級数と一致すれば、

$$\begin{aligned} \varphi_f^{(i)}(1) &= \begin{cases} 0 & (i = 1, 2, \dots, n-m) \\ (-1)^{n-m} (n-m+1)! \alpha & (i = n-m+1) \end{cases}, \\ \xi_f^{(i)}(x) &= \begin{cases} 0 & (i = 1, 2, \dots, n-m-1) \\ (-1)^{n-m} (n-m+1)! \alpha & (i = n-m) \end{cases} \end{aligned}$$

が得られる。

### 3 主定理の証明

$F : R \rightarrow R$  をフロベニウス写像  $a \mapsto a^p$  とする. 体  $k$  が完全体なので,  $F_*R \simeq R^{\oplus p^{n+1}}$  を得る. ここで,  $F_*R$  は  $F_*^1R$  を表す. したがって, 任意の  $e, t \geq 0$  に対して,

$$(M_{e,t})^{\oplus p^{n+1}} \simeq M_{e,t} \otimes_R F_*R = \frac{((f^t) + \mathfrak{m}^{[p^e]})F_*R}{((f^{t+1}) + \mathfrak{m}^{[p^e]})F_*R} = F_* \left( \frac{(f^{pt}) + \mathfrak{m}^{[p^{e+1}]}}{(f^{pt+p}) + \mathfrak{m}^{[p^{e+1}]}} \right)$$

が成り立つ. よって,

$$p \times C_{e,t} = C_{e+1,pt} + C_{e+1,pt+1} + \cdots + C_{e+1,pt+p-1} \quad (5)$$

である. 式 (5) の右辺は  $p$  項の和なので,  $C_{e,t}$  は  $C_{e+1,pt}, C_{e+1,pt+1}, \dots, C_{e+1,pt+p-1}$  の平均値である. したがって, 式 (2) と式 (5) から, 次の不等式を得る.

**補題 3.1.**  $C_{e+1,pt} \geq C_{e,t} \geq C_{e+1,pt+p-1}$ .

ここで,  $\lfloor w \rfloor = \min\{a \in \mathbb{Z} | a \geq w\}$  を床関数,  $\lceil w \rceil = \max\{a \in \mathbb{Z} | w \geq a\}$  を天井関数とする.  $\lfloor xp^e \rfloor p \leq \lfloor xp^{e+1} \rfloor$  と  $\lceil xp^e \rceil p \geq \lceil xp^{e+1} \rceil$  が成り立つので, 式 (2) と補題 3.1 によって, 次の図式

$$\begin{array}{ccc} C_{e, \lfloor xp^e \rfloor - 1} & \underset{\text{補題 3.1}}{\geq} & C_{e+1, (\lfloor xp^e \rfloor - 1)p + (p-1)} \geq C_{e+1, \lceil xp^{e+1} \rceil - 1} \\ \vee & & \vee \\ C_{e, \lfloor xp^e \rfloor} & & C_{e+1, \lceil xp^{e+1} \rceil} \\ \vee & & \vee \\ C_{e, \lceil xp^e \rceil} & \underset{\text{補題 3.1}}{\leq} & C_{e+1, \lceil xp^e \rceil p} \leq C_{e+1, \lceil xp^{e+1} \rceil} \end{array}$$

が得られる. したがって, 数列  $\{C_{e, \lfloor xp^e \rfloor - 1}\}_e$  は減少列で, 数列  $\{C_{e, \lceil xp^e \rceil}\}_e$  は増加列である. また, 式 (2) によって, 任意の  $e \geq 0$  に対して,  $C_{e, \lfloor xp^e \rfloor - 1} \geq C_{e, \lceil xp^e \rceil}$  が成り立つ. これらのことから, 極限  $\lim_{e \rightarrow \infty} C_{e, \lfloor xp^e \rfloor - 1}$  と極限  $\lim_{e \rightarrow \infty} C_{e, \lceil xp^e \rceil}$  は実数値を取る. 特に, 任意の  $\alpha \in (0, 1]$  と  $\lfloor \alpha p^e \rfloor - 1 \geq 0$  を満たす  $e$  に対して,

$$C_{e, \lfloor \alpha p^e \rfloor - 1} \geq \lim_{e \rightarrow \infty} C_{e, \lfloor \alpha p^e \rfloor - 1} \geq \xi_f(\alpha) \geq \lim_{e \rightarrow \infty} C_{e, \lceil \alpha p^e \rceil} \geq C_{e, \lceil \alpha p^e \rceil} \geq 0 \quad (6)$$

が成り立つ. 以下, 極限が実数値を取ることを「極限が存在する」と呼ぶことにする.

**補題 3.2.**  $\alpha \in [0, 1]$  に対して  $\overline{C}(\alpha) = \lim_{e \rightarrow \infty} C_{e, \lceil \alpha p^e \rceil}$  とおき,  $\beta \in (0, 1]$  に対して  $\underline{C}(\beta) = \lim_{e \rightarrow \infty} C_{e, \lfloor \beta p^e \rfloor - 1}$  と定める.

- 1)  $\alpha \in [0, 1]$  を取る.  $i, k \geq 0$  を2つの非負整数とする. このとき, 数列  $\{C_{e+1, \lceil \alpha p^e \rceil p+i}\}_e$  は増加列である. また, 極限  $\lim_{e \rightarrow \infty} C_{e+1, \lceil \alpha p^e \rceil p+i}$  と極限  $\lim_{e \rightarrow \infty} C_{e, \lceil \alpha p^e \rceil +k}$  が存在する. さらに,

$$\overline{C}(\alpha) = \lim_{e \rightarrow \infty} C_{e+1, \lceil \alpha p^e \rceil p+i} = \lim_{e \rightarrow \infty} C_{e, \lceil \alpha p^e \rceil +k} \quad (7)$$

が成り立つ.

- 2)  $\beta \in (0, 1]$  を取る.  $i, k > 0$  を正数とする. このとき, 数列  $\{C_{e+1, \lfloor \beta p^e \rfloor p-i}\}_e$  減少列である. また, 極限  $\lim_{e \rightarrow \infty} C_{e+1, \lfloor \beta p^e \rfloor p-i}$  と極限  $\lim_{e \rightarrow \infty} C_{e, \lfloor \beta p^e \rfloor -k}$  が存在する. さらに,

$$\underline{C}(\beta) = \lim_{e \rightarrow \infty} C_{e+1, \lfloor \beta p^e \rfloor p-i} = \lim_{e \rightarrow \infty} C_{e, \lfloor \beta p^e \rfloor -k} \quad (8)$$

が成り立つ. 特に, 極限  $\lim_{e \rightarrow \infty} C_{e, p^e-1}$  が存在するので,

$$\xi_f(1) = \lim_{e \rightarrow \infty} C_{e, p^e-1} \quad (9)$$

である.

**証明.**  $\alpha \in [0, 1], \beta \in (0, 1]$  とする. また  $k \geq 0, \ell > 0$  は整数とする. このとき,

$$\begin{cases} (\lceil \alpha p^e \rceil p + k)p = \lceil \alpha p^e \rceil p^2 + kp \geq \lceil \alpha p^{e+1} \rceil p + kp \geq \lceil \alpha p^{e+1} \rceil p + k \\ (\lfloor \beta p^e \rfloor p - \ell)p + (p-1) \leq \lfloor \beta p^e \rfloor p^2 - \ell p + (p-1)\ell \leq \lfloor \beta p^{e+1} \rfloor p - \ell \end{cases}$$

が成り立つ. したがって, 式 (2) と補題 3.1 から,

$$\begin{cases} C_{e+1, \lceil \alpha p^e \rceil p+k} \leq C_{e+2, (\lceil \alpha p^e \rceil p+k)p} \leq C_{e+2, \lceil \alpha p^{e+1} \rceil p+k} \leq \lim_{e \rightarrow \infty} C_{e, 0} \\ C_{e+1, \lfloor \beta p^e \rfloor p-\ell} \geq C_{e+2, (\lfloor \beta p^e \rfloor p-\ell)p+(p-1)} \geq C_{e+2, \lfloor \beta p^{e+1} \rfloor p-\ell} \geq 0 \end{cases}$$

が成り立つ. よって, 数列  $\{C_{e+1, \lceil \alpha p^e \rceil p+k}\}_e$  は上に有界な増加列である. 数列  $\{C_{e+1, \lfloor \beta p^e \rfloor p-\ell}\}_e$  は下に有界な減少列である. これらのことから, 極限  $\lim_{e \rightarrow \infty} C_{e+1, \lceil \alpha p^e \rceil p+k}$  と極限  $\lim_{e \rightarrow \infty} C_{e+1, \lfloor \beta p^e \rfloor p-\ell}$  が存在する.

次に, 整数  $0 \leq i \leq p-1, 1 \leq j \leq p$  に対して,

$$\overline{C}(\alpha) = \lim_{e \rightarrow \infty} C_{e+1, \lceil \alpha p^e \rceil p+i} \quad (10)$$

$$\underline{C}(\beta) = \lim_{e \rightarrow \infty} C_{e+1, \lfloor \beta p^e \rfloor p-j} \quad (11)$$

が成り立つことを示す. 式 (5) により,

$$\begin{cases} p \times C_{e, \lceil \alpha p^e \rceil} = C_{e+1, \lceil \alpha p^e \rceil p} + C_{e+1, \lceil \alpha p^e \rceil p+1} + \cdots + C_{e+1, \lceil \alpha p^e \rceil p+p-1} \\ p \times C_{e, \lfloor \beta p^e \rfloor -1} = C_{e+1, \lfloor \beta p^e \rfloor p-p} + C_{e+1, \lfloor \beta p^e \rfloor p-(p-1)} + \cdots + C_{e+1, \lfloor \beta p^e \rfloor p-1} \end{cases}$$

が成り立つので,

$$\begin{cases} p \times \lim_{e \rightarrow \infty} C_{e, [\alpha p^e]} = \lim_{e \rightarrow \infty} C_{e+1, [\alpha p^e]p} + \cdots + \lim_{e \rightarrow \infty} C_{e+1, [\alpha p^e]p+p-1} \\ p \times \lim_{e \rightarrow \infty} C_{e, \lfloor \beta p^e \rfloor - 1} = \lim_{e \rightarrow \infty} C_{e+1, \lfloor \beta p^e \rfloor p - p} + \cdots + \lim_{e \rightarrow \infty} C_{e+1, \lfloor \beta p^e \rfloor p - 1} \end{cases}$$

が成り立つ。一方で, 不等式  $C_{e, [\alpha p^e]} \leq C_{e+1, [\alpha p^e]p} \leq C_{e+1, [\alpha p^{e+1}]}$  と  $C_{e, \lfloor \beta p^e \rfloor - 1} \geq C_{e+1, \lfloor \beta p^e \rfloor p - 1} \geq C_{e+1, \lfloor \beta p^{e+1} \rfloor - 1}$  によって,

$$\begin{cases} \lim_{e \rightarrow \infty} C_{e, [\alpha p^e]} = \lim_{e \rightarrow \infty} C_{e+1, [\alpha p^e]p} \geq \lim_{e \rightarrow \infty} C_{e+1, [\alpha p^e]p+1} \geq \cdots \geq \lim_{e \rightarrow \infty} C_{e+1, [\alpha p^e]p+p-1} \\ \lim_{e \rightarrow \infty} C_{e, \lfloor \beta p^e \rfloor - 1} = \lim_{e \rightarrow \infty} C_{e+1, \lfloor \beta p^e \rfloor p - 1} \leq \lim_{e \rightarrow \infty} C_{e+1, \lfloor \beta p^e \rfloor p - 2} \leq \cdots \leq \lim_{e \rightarrow \infty} C_{e+1, \lfloor \beta p^e \rfloor p - p} \end{cases}$$

が分かる。したがって, 式 (10) と式 (11) が得られる。

1) の証明を完成させるために, 任意の  $k \geq 1$  に対して,

$$\begin{aligned} C_{e, [\alpha p^e] + k} &\leq C_{e+1, ([\alpha p^e] + k)p} \\ &= C_{e+1, [\alpha p^e]p + kp} \\ &\leq C_{e+1, [\alpha p^e]p + k} \\ &\leq C_{e+1, [\alpha p^{e+1}] + k} \end{aligned}$$

であることを見れば,

$$\lim_{e \rightarrow \infty} C_{e, [\alpha p^e] + k} = \lim_{e \rightarrow \infty} C_{e+1, [\alpha p^e]p + k}$$

が得られる。したがって, 式 (7) が成り立つ。

2) の証明を完成させるために, 任意の  $k \geq 2$  に対して,

$$\begin{aligned} C_{e, \lfloor \beta p^e \rfloor - k} &\geq C_{e+1, (\lfloor \beta p^e \rfloor - k)p + p - 1} \\ &= C_{e+1, \lfloor \beta p^e \rfloor p - (k-1)p - 1} \\ &\geq C_{e+1, \lfloor \beta p^e \rfloor p - k} \\ &\geq C_{e+1, \lfloor \beta p^{e+1} \rfloor - k} \end{aligned}$$

であることを見れば,

$$\lim_{e \rightarrow \infty} C_{e, \lfloor \beta p^e \rfloor - k} = \lim_{e \rightarrow \infty} C_{e+1, \lfloor \beta p^e \rfloor p - k}$$

が得られる。したがって, 式 (8) が成り立つ。  $\square$

次に,  $\xi_f(x)$  の右極限と左極限を考える。

**命題 3.3.** 1)  $\alpha \in [0, 1)$  に対して,  $\lim_{x \rightarrow \alpha+0} \xi_f(x) = \lim_{e \rightarrow \infty} C_{e, [\alpha p^e]}$  が成り立つ。

2)  $\beta \in (0, 1]$  に対して,  $\lim_{x \rightarrow \beta-0} \xi_f(x) = \lim_{e \rightarrow \infty} C_{e, \lfloor \beta p^e \rfloor - 1}$  が成り立つ.

特に,

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +0} \xi_f(x) = \lim_{e \rightarrow \infty} C_{e, 0} \\ \lim_{x \rightarrow 1-0} \xi_f(x) = \lim_{e \rightarrow \infty} C_{e, p^e - 1} \end{cases}$$

が成り立つ. 式 (3) と式 (9) が成り立つので, 関数  $\xi_f(x)$  は点  $x = 0, 1$  で連続である.

証明. 1) まずは,  $\lim_{x \rightarrow \alpha+0} \xi_f(x) \leq \lim_{e \rightarrow \infty} C_{e, \lceil \alpha p^e \rceil}$  を示す.  $x_0 > \alpha$  を取る. 十分大きな  $e'$  を取って,  $\alpha p^{e'} \leq x_0 p^{e'} - 2$  が成り立つようにできる. このとき,  $\lceil \alpha p^{e'} \rceil \leq \lfloor x_0 p^{e'} \rfloor - 1$  である. したがって, 式 (2) と式 (6) によって,

$$\xi_f(x_0) \leq C_{e', \lfloor x_0 p^{e'} \rfloor - 1} \leq C_{e', \lceil \alpha p^{e'} \rceil} \leq \lim_{e \rightarrow \infty} C_{e, \lceil \alpha p^e \rceil}$$

が得られる.

次に, 逆向きの不等式を示す. 補題 3.2 の 1) によって,

$$\lim_{x \rightarrow \alpha+0} \xi_f(x) \geq \lim_{e \rightarrow \infty} C_{e, \lceil \alpha p^e \rceil + 1}$$

を示せば十分である. 任意の  $e \geq 0$  に対して,  $\alpha < \frac{\lceil \alpha p^e \rceil + 1}{p^e}$  である. 実数  $x_1 \in \mathbb{R}$  が存在して,  $\alpha < x_1 < \frac{\lceil \alpha p^e \rceil + 1}{p^e}$  が成り立つ. このとき,  $\lfloor x_1 p^e \rfloor \leq \lceil \alpha p^e \rceil + 1$  である. 式 (2), 式 (6), また  $\xi_f(x)$  が単調減少関数であることから, 任意の  $e \geq 0$  に対して,

$$\lim_{x \rightarrow \alpha+0} \xi_f(x) \geq \xi_f(x_1) \underset{\text{式 (6)}}{\geq} C_{e, \lfloor x_1 p^e \rfloor} \underset{\text{式 (2)}}{\geq} C_{e, \lceil \alpha p^e \rceil + 1}$$

が成り立つ. したがって,

$$\lim_{x \rightarrow \alpha+0} \xi_f(x) \geq \lim_{e \rightarrow \infty} C_{e, \lceil \alpha p^e \rceil + 1}$$

が得られる.

2) 証明は 1) と同様. □

注意 3.4. 式 (2) により, 任意の  $\alpha \in [0, 1]$  に対して,

$$C_{e, \lfloor \alpha p^e \rfloor - 1} \geq \xi_{f,e}(\alpha) = C_{e, \lfloor \alpha p^e \rfloor} \underset{\text{式 (2)}}{\geq} C_{e, \lceil \alpha p^e \rceil}$$

である. したがって, もし

$$\lim_{e \rightarrow \infty} C_{e, \lfloor \alpha p^e \rfloor - 1} = \lim_{e \rightarrow \infty} C_{e, \lceil \alpha p^e \rceil}$$

が成り立てば, 極限  $\lim_{e \rightarrow \infty} \xi_{f,e}(\alpha)$  が存在し, これは  $\xi_f(\alpha)$  に一致する.

系 3.5. もし  $\xi_f(x)$  が点  $\alpha \in [0, 1]$  で連続であったならば, 極限  $\lim_{e \rightarrow \infty} \xi_{f,e}(\alpha)$  は存在し, これは  $\xi_f(\alpha)$  に一致する.

系 3.6. 実数  $x \in [0, 1]$  に対して, 関数  $\varphi_f(x)$  を

$$\varphi_f(x) = \int_0^x \xi_f(t) dt$$

によって定義する. このとき, 以下のことが成り立つ.

- 1)  $\varphi_f(x)$  は  $x = 0$  で微分可能で,  $\varphi'_f(0) = \xi_f(0) = \lim_{e \rightarrow \infty} C_{e,0} = e_{HK}(R/(f))$  である.
- 2)  $\varphi_f(x)$  は  $x = 1$  で微分可能で,  $\varphi'_f(1) = \xi_f(1) = \lim_{e \rightarrow \infty} C_{e,p^e-1}$  である.

命題 3.3 により, 定理 2.10 の 1) が証明された. また, 系 3.5 は, 定理 2.10 の 2) そのものである. 定理 2.10 の 3) の前半は,  $C_{e,0}$  の定義そのものである. 残りは, 3) の後半, 4), 5), 6) であるが, まずは, F 純閾値に関する 4) の主張を証明する. 次に  $\xi_f(x)$  の可積分性と積分の値を提示する 5) を証明し, その後  $\xi_f(x)$  の  $x = 0$  での微分係数についての 6) を証明する. 最後に,  $\xi_f(1)$  が  $R/(f)$  の F 符号であることを主張する 3) の後半を証明する.

定理 2.10 の 4) を証明する前に, F 純閾値の基本的なことについて述べておく.

任意の  $e \geq 0$  に対して,  $\mu_f(p^e) = \min\{t \geq 0 \mid f^t \in \mathfrak{m}^{[p^e]}\}$  とおく. このとき,  $f^{\mu_f(p^e)} \in \mathfrak{m}^{[p^e]}$  なので,  $f^{\mu_f(p^e)p} \in \mathfrak{m}^{[p^{e+1}]}$  である. したがって,  $\mu_f(p^e)p \geq \mu_f(p^{e+1})$  であり,

$$1 \geq \frac{\mu_f(p^e)}{p^e} \geq \frac{\mu_f(p^{e+1})}{p^{e+1}} \geq 0$$

が成り立つ. よって, 数列  $\left\{ \frac{\mu_f(p^e)}{p^e} \right\}_{e \geq 0}$  は減少列で下に有界であるから, 極限

$\lim_{e \rightarrow \infty} \frac{\mu_f(p^e)}{p^e}$  が存在する. この極限を  $f$  の F 純閾値と呼び,  $\text{fpt}(f)$  で表す. F 純閾値の概念は, 高木-渡辺 [15] によって提起された. 明らかに,  $\text{fpt}(f) \in (0, 1]$  である. また, 簡単に確かめられるが,  $\text{fpt}(f) = 1$  が成り立つための必要十分条件は, 任意の  $e \geq 1$  に対して  $\mu_f(p^e) = p^e$  が成り立つことである.

補題 3.7.  $C_{e,t} = 0$  が成り立つための必要十分条件は  $t \geq \mu_f(p^e)$  である.

証明. もし  $M_{e,t} = 0$  ならば,  $M_{e,t} = M_{e,t+1} = M_{e,t+2} = \dots = M_{e,p^e} = 0$  である. よって,  $f^t \in \mathfrak{m}^{[p^e]}$  であるので,  $t \geq \mu_f(p^e)$  である. 逆に, もし  $t \geq \mu_f(p^e)$  ならば,  $f^t \in \mathfrak{m}^{[p^e]}$  が成り立つ.  $\square$

定理 2.10 の 4) の証明. まずは,

$$\inf\{\alpha \in [0, 1] \mid \xi_f(\alpha) = 0\} \leq \text{fpt}(f)$$

であることを見る.  $\text{fpt}(f) = 1$  であるときは, 明らかである. 以下,  $\text{fpt}(f) < 1$  と仮定する. このとき,  $1 > \alpha > \text{fpt}(f)$  を満たす実数  $\alpha$  を取る. F 純閾値の性質から  $\text{fpt}(f) = \inf_{e \geq 0} \left\{ \frac{\mu_f(p^e)}{p^e} \right\}$  が成り立つので, 十分大きな  $e_1 \gg 0$  に対して

$$\text{fpt}(f) \leq \frac{\mu_f(p^{e_1})}{p^{e_1}} < \alpha$$

が成り立つ. 一方, 補題 3.7 により任意の整数  $s \geq 0$  に対して

$$C_{e_1+s, \mu_f(p^{e_1})p^s} \leq C_{e_1+s, \mu_f(p^{e_1+s})} = 0$$

が成り立つので,

$$\begin{aligned} \xi_f(\alpha) &\leq \xi_f\left(\frac{\mu_f(p^{e_1})}{p^{e_1}}\right) \\ &= \limsup_{e \rightarrow \infty} C_{e, \left[\frac{\mu_f(p^{e_1})}{p^{e_1}} p^e\right]} \\ &= 0 \end{aligned}$$

である. したがって,  $\alpha > \text{fpt}(f)$  を満たす任意の  $\alpha$  に対して,  $\xi_f(\alpha) = 0$  が成り立つ.

次に,

$$\inf\{\alpha \in [0, 1] \mid \xi_f(\alpha) = 0\} \geq \text{fpt}(f)$$

であることを確かめて証明を完成させよう.  $0 \leq \alpha < \text{fpt}(f)$  を満たす  $\alpha$  を取る. このとき, 十分大きな  $e' \gg 0$  に対して,  $(\text{fpt}(f) - \alpha)p^{e'} \geq 1$  が成り立つ (アルキメデスの性質, あるいは公理, 原理). よって,  $\alpha p^{e'} \leq \text{fpt}(f)p^{e'} - 1$  である. 両辺を  $p^{e'}$  で割れば,

$$\alpha \leq \frac{\text{fpt}(f)p^{e'} - 1}{p^{e'}} < \frac{\text{fpt}(f)p^{e'}}{p^{e'}} = \text{fpt}(f) \leq \frac{\mu_f(p^{e'})}{p^{e'}}$$

を得るので,

$$\alpha \leq \frac{\mu_f(p^{e'}) - 1}{p^{e'}}$$

が分かる. したがって,

$$\xi_f(\alpha) \geq \xi_f\left(\frac{\mu_f(p^{e'}) - 1}{p^{e'}}\right) \stackrel{\text{式 (6)}}{\geq} \lim_{e \rightarrow \infty} C_{e, \left[\frac{\mu_f(p^{e'}) - 1}{p^{e'}} p^e\right]}$$

が成り立つ。数列  $\left\{ C_{e, \lceil \frac{\mu_f(p^{e'})-1}{p^{e'}} p^e \rceil} \right\}_{e \geq 0}$  は増加列なので、ここで補題 3.7 から  $C_{e', \mu_f(p^{e'})-1} \neq 0$  が成り立つことに注意すれば、 $\lim_{e \rightarrow \infty} C_{e, \lceil \frac{\mu_f(p^{e'})-1}{p^{e'}} p^e \rceil} > 0$  が分かる。したがって、 $\alpha < \text{fpt}(f)$  を満たすすべての  $\alpha$  に対して、 $\xi_f(\alpha) > 0$  が成り立つ。  $\square$

次に、定理 2.10 の 5) を証明する。証明には、ルベークの収束定理を用いる。証明の前に、復習の意味も込めて準備をする。

**定義 3.8.** 部分集合  $X \subset \mathbb{R}$  が測度 0 であるとは、任意の  $\varepsilon > 0$  に対して、 $X \subset \bigcup_{n \geq 1} I_n$  かつ  $\sum_{n \geq 1} |I_n| < \varepsilon$  を満たす可算個の区間  $I_1, I_2, \dots$  が存在するときと言う。ここで、 $|I_n| = \sup I_n - \inf I_n$  である。各  $I_n$  は开区間として取っても良い。

例えば、可算集合  $X = \{x_1, x_2, \dots\}$  は測度 0 である。任意の  $\varepsilon > 0$  に対して、 $I_n = \left(x_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}, x_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}\right)$  とおけば、 $X \subset \bigcup_{n \geq 1} I_n$  かつ  $\sum_{n \geq 1} |I_n| = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$  を満たす。

**定義 3.9.**  $f(x)$  を区間  $I$  上の実数値関数とし、 $\{f_n(x)\}_{n \geq 1}$  を区間  $I$  上の関数列とする。ほとんどいたるところで  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$  であるとは、任意の  $\alpha \in I - X$  に対して、 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\alpha) = f(\alpha)$  が成り立つような測度 0 の部分集合  $X \subset \mathbb{R}$  が存在することである。さらにこのとき、もし  $\{f_n(x)\}_{n \geq 1}$  が階段関数列であれば、 $f(x)$  は  $I$  上で可測であると言う。

**定義 3.10.**  $s(x)$  を区間  $I = (a, b)$  上の階段関数とする。つまり、 $x'_i \in (x_{i-1}, x_i)$  ならば、 $s(x'_i) = C_i$  は定数であるような区間  $I$  の分割

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

が存在する。このとき、階段関数  $s(x)$  の  $I$  上のルベーク積分を

$$\int_a^b s(x) dx = \sum_{i=1}^n \{C_i \times (x_i - x_{i-1})\}$$

として定義する。

**定義 3.11.**  $f(x)$  を区間  $I = (a, b)$  上で可測な関数とする。  $\sup_{n \geq 1} \int_a^b f_n(x) dx < C$  かつ、ほとんどいたるところで  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$  が成り立つような区間

$I$  上の階段関数列  $f_1(x) < f_2(x) < \dots$  と定数  $C < \infty$  が存在するとき、可測関数  $f(x)$  の  $I$  上のルベグ積分を

$$\int_a^b f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$$

として定義する。右辺の値は、階段関数列  $f_1(x) < f_2(x) < \dots$  の取り方に依らない。このような、可測関数  $f(x)$  の全体を  $L^0(I)$  で表す。

**注意 3.12.**  $\sup_{n \geq 1} \int_a^b f_n(x) dx < C$  を満たすような区間  $I$  上の階段関数列  $f_1(x) < f_2(x) < \dots$  と定数  $C < \infty$  が存在するとき、ほとんどいたるところで  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$  が成り立つような  $I$  上の可測関数  $f(x)$  が存在する。

**定義 3.13.**  $I = (a, b)$  とする。このとき、

$$L^1(I) = \{f(x) \mid f_1, f_2 \in L^0(I) \text{ が存在して, } f = f_1 - f_2\}$$

と定める。 $f(x) \in L^1(I)$  のとき、

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f_1(x) dx - \int_a^b f_2(x) dx$$

を  $f(x)$  の区間  $I$  上のルベグ積分と呼ぶ。また、このとき  $f(x)$  はルベグ積分可能であると言う。 $L^0(I) \subset L^1(I)$  であるが、一般に逆の包含関係は成り立たない。

**定理 3.14** (ルベグの収束定理).  $I = (a, b)$  とする。すべての  $n$  について  $f_n(x) \in L^1(I)$  とし、ほとんどいたるところで  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$  が成り立つとする。つまり、任意の  $\alpha \in I - X$  に対して、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\alpha) = f(\alpha)$$

が成り立つような部分集合  $X \subset I$  が存在する。また、任意の  $\alpha \in I - X$  に対して、

$$|f_n(\alpha)| < g(\alpha)$$

が成り立つような  $I$  上の可測関数  $g(x)$  が存在すると仮定する。このとき、 $f(x) \in L^1(I)$  であり、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

が成り立つ。

**定理 2.10** の 5) の証明.  $F = \left\{ \alpha \in \left( \frac{a}{p^e}, \frac{a+1}{p^e} \right) \mid \alpha \text{ は } \xi_f(x) \text{ の不連続点} \right\}$  と定め、また、

$$\Omega = \left( \frac{a}{p^e}, \frac{a+1}{p^e} \right) - F$$

とおく. 定理 2.10 の 2) または系 3.5 により, 任意の  $x \in \Omega$  に対して,

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \xi_{f,s}(x) = \xi_f(x)$$

である. したがって, ルベークの収束定理によって, ルベーク積分の意味で,

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \int_{\frac{a}{p^e}}^{\frac{a+1}{p^e}} \xi_{f,s}(x) dx = \int_{\frac{a}{p^e}}^{\frac{a+1}{p^e}} \xi_f(x) dx$$

が成り立つ. 階段関数のルベーク積分の定義から,

$$\int_{\frac{a}{p^e}}^{\frac{a+1}{p^e}} \xi_{f,s}(x) dx = \frac{1}{p^e} C_{e,a}$$

である. 右辺は  $s$  に依らないことに注意する. したがって, ルベーク積分の意味で,

$$\int_{\frac{a}{p^e}}^{\frac{a+1}{p^e}} \xi_f(x) dx = \frac{1}{p^e} C_{e,a}$$

を得る.  $\xi_f(x)$  は,  $[0, 1]$  上有界でリーマン積分可能な関数であるから,  $f(x)$  のリーマン積分とルベーク積分は一致する.  $\square$

定理 2.10 の 6) を証明する.

定理 2.10 の 6) の証明. 2つの関数  $g, h: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  を取る. 十分大きな  $n \gg 0$  に対して  $|h(n)| \leq Cg(n)$  が成り立つような定数  $C > 0$  が存在するとき,

$$h(n) = O(g(n))$$

と書く. Huneke-McDermott-Monksy [9] によれば,  $R/(f)$  が正規ならば,

$$e_{HK}(R/(f))p^{ne} + \beta(R/(f))p^{(n-1)e} = \ell_R(M_{e,0}) + O(p^{(n-2)e})$$

を満たすような  $\beta(R/(f)) \in \mathbb{R}$  が存在する. 超曲面はゴレンシュタインなので, 藏野 [12] の Corollary 1.4 から,  $\beta(R/(f)) = 0$  である. したがって,

$$e_{HK}(R/(f))p^{ne} = \ell_R(M_{e,0}) + O(p^{(n-2)e}) \quad (12)$$

を得る. まずは,

$$\left| \frac{\xi_f\left(\frac{1}{p^s}\right) - \xi_f(0)}{\frac{1}{p^s}} \right| \rightarrow 0 \quad (s \rightarrow \infty)$$

が成り立つことを証明する. 数列  $\{C_{s+i, p^i}\}_{i \geq 0}$  は増加列なので,

$$\xi_f\left(\frac{1}{p^s}\right) = \limsup_{e \rightarrow \infty} C_{e, \lfloor p^{e-s} \rfloor} \geq C_{s, 1}.$$

である。したがって、

$$\left| \frac{\xi_f\left(\frac{1}{p^s}\right) - \xi_f(0)}{\frac{1}{p^s}} \right| = \frac{\xi_f(0) - \xi_f\left(\frac{1}{p^s}\right)}{\frac{1}{p^s}} \leq \frac{\xi_f(0) - C_{s,1}}{\frac{1}{p^s}}$$

が成り立つ。ここで、任意の  $e \geq 0$  と  $0 \leq i \leq p-1$  に対して、

$$\lambda_i(e) = e_{HK}(R/(f))p^{en} - \ell_R(M_{e,i})$$

と定める。このとき、

$$0 \leq \lambda_0(e) \leq \lambda_1(e) \leq \cdots \leq \lambda_{p-1}(e)$$

である。式 (5) により任意の  $s \geq 1$  に対して

$$p \times \frac{\ell_R(M_{s-1,0})}{p^{(s-1)n}} = \frac{\ell_R(M_{s,0})}{p^{sn}} + \frac{\ell_R(M_{s,1})}{p^{sn}} + \cdots + \frac{\ell_R(M_{s,p-1})}{p^{sn}}$$

が成り立つので、

$$p \times \frac{\lambda_0(s-1)}{p^{(s-1)n}} = \frac{\lambda_0(s)}{p^{sn}} + \frac{\lambda_1(s)}{p^{sn}} + \cdots + \frac{\lambda_{p-1}(s)}{p^{sn}} \geq \frac{\lambda_1(s)}{p^{sn}}$$

が得られる。両端を  $p$  倍すれば

$$p^2 \times \frac{\lambda_0(s-1)}{p^{(s-1)(n-1)}} \geq \frac{\lambda_1(s)}{p^{s(n-1)}} \geq 0$$

なので、式 (12) により、

$$\begin{aligned} \frac{\xi_f(0) - C_{s,1}}{\frac{1}{p^s}} &= \frac{p^s}{p^{sn}} (e_{HK}(R/(f))p^{sn} - C_{s,1} \times p^{sn}) \\ &= \frac{\lambda_1(s)}{p^{s(n-1)}} \\ &\leq p^2 \times \frac{\lambda_0(s-1)}{p^{(s-1)(n-1)}} \\ &= \frac{p^2}{p^{s-1}} \times \frac{\lambda_0(s-1)}{p^{(s-1)(n-2)}} \\ &\rightarrow 0 \quad (s \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

が成り立つ。したがって、任意の正の実数  $\varepsilon > 0$  に対して、 $s \geq s_0$  ならば

$$\left| \frac{\xi_f\left(\frac{1}{p^s}\right) - \xi_f(0)}{\frac{1}{p^s}} \right| < \frac{\varepsilon}{p}$$

を満たすような自然数  $s_0 \in \mathbb{N}$  が存在する。ここで、 $\delta = \frac{1}{p^{s_0}}$  とおく。もし  $0 < x < \delta$  ならば、

$$\frac{1}{p^{s+1}} < x < \frac{1}{p^s} \leq \delta$$

を満たす  $s \in \mathbb{N}$  が存在する。したがって,

$$\begin{aligned} \left| \frac{\xi_f(x) - \xi_f(0)}{x} \right| &= \frac{\xi_f(0) - \xi_f(x)}{x} \\ &\leq \frac{\xi_f(0) - \xi_f\left(\frac{1}{p^s}\right)}{\frac{1}{p^{s+1}}} \\ &\leq p \times \frac{\varepsilon}{p} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

である。 □

最後に, 定理 2.10 の 3) の後半  $\xi_f(1) = s(R/(f))$  を証明しよう。

**定義 3.15.**  $(S, \mathfrak{n})$  を  $(d+1)$  次元正則局所環とする。また,  $0 \neq \alpha \in \mathfrak{n}$  とする。このとき, 組  $(\rho, \sigma)$  が元  $\alpha$  の行列分解であるとは, 以下の条件 (i), (ii), (iii) をすべて満たすときに呼ばれる。

(i)  $\rho: G \rightarrow F$  と  $\sigma: F \rightarrow G$  が  $S$  準同型である。ただし,  $F$  と  $G$  は有限生成  $S$  自由加群で,  $\text{rank}_S F = \text{rank}_S G$  を満たす。

(ii)  $\rho \circ \sigma = \alpha \cdot \text{id}_F$ .

(iii)  $\sigma \circ \rho = \alpha \cdot \text{id}_G$ .

実は, (ii) か (iii) のいずれかが成り立てば, 片方も成り立つ。

**定義 3.16.**  $(S, \mathfrak{n})$  を  $d+1$  次元正則局所環とし,  $0 \neq \alpha \in \mathfrak{n}$  とする。  $(\rho, \sigma)$  と  $(\rho', \sigma')$  をそれぞれ  $\alpha$  の行列分解とする。ここで,  $\rho$  と  $\sigma$  を  $S$  上の  $r \times r$  行列と見なし,  $\rho'$  と  $\sigma'$  を  $S$  上の  $r' \times r'$  行列と見なす。このとき,

$$(\rho, \sigma) \oplus (\rho', \sigma') = \left( \left( \begin{array}{cc} \rho & 0 \\ 0 & \rho' \end{array} \right), \left( \begin{array}{cc} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma' \end{array} \right) \right)$$

と書く。  $(\rho, \sigma) \oplus (\rho', \sigma')$  は  $\alpha$  の行列分解である。

**定義 3.17.**  $(S, \mathfrak{n})$  を  $d+1$  次元正則局所環とし,  $0 \neq \alpha \in \mathfrak{n}$  とする。行列と見なした  $\rho$  と  $\sigma$  の成分が全て  $\mathfrak{n}$  の元であるとき,  $\alpha$  の行列分解  $(\rho, \sigma)$  は, 被約であると言う。

**注意 3.18.**  $(S, \mathfrak{n})$  を  $d+1$  次元正則局所環とし,  $0 \neq \alpha \in \mathfrak{n}$  とする。写像  $\alpha: S \rightarrow S$  を  $S$  上の  $\alpha$  倍写像とする。もし  $(\rho, \sigma)$  が  $\alpha$  の行列分解ならば,

$$(\rho, \sigma) \simeq (\alpha, \text{id}_S)^{\oplus v} \oplus (\text{id}_S, \alpha)^{\oplus u} \oplus (\gamma_1, \gamma_2),$$

と書くことができる。ただし、 $v$  と  $u$  は一意的な非負整数で、 $(\gamma_1, \gamma_2)$  は被約行列分解である。したがって、

$$\begin{aligned} \text{cok}(\rho) &\simeq \text{cok}(\alpha)^{\oplus v} \oplus \text{cok}(id_S)^{\oplus u} \oplus \text{cok}(\gamma_1) \\ &\simeq (S/(\alpha))^{\oplus v} \oplus \text{cok}(\gamma_1) \end{aligned}$$

である。ただし、 $\text{cok}(\ast)$  は、 $\ast$  の余核である。Eisenbud [5] の Corollary 6.3 により、 $(\gamma_1, \gamma_2)$  が被約ならば、 $\text{cok}(\gamma_1)$  は自由  $S/(\alpha)$  加群を直和因子として持たないことが知られている。したがって、 $v$  は、 $\text{cok}(\rho)$  の直和因子として現れる自由  $S/(\alpha)$  加群の最大の階数である。

写像  $F^e : R \rightarrow F_*^e R$  を  $e$  回フロベニウス写像  $r \mapsto F_*^e(r^{p^e})$  とし、写像  $f : F_*^e R \rightarrow F_*^e R$  を  $F_*^e R$  上の  $f$  倍写像とする。今、

$$f = fF_*^e(1) = F_*^e(f^{p^e}) = F_*^e(f) \cdot F_*^e(f^{p^e-1}) = F_*^e(f^{p^e-1}) \cdot F_*^e(f)$$

が成り立つので、 $(F_*^e(f), F_*^e(f^{p^e-1}))$  は、 $f$  の行列分解である。このとき、注意 3.18 により、

$$(F_*^e(f), F_*^e(f^{p^e-1})) = (f, id_R)^{\oplus v_e} \oplus (id_R, f)^{\oplus u_e} \oplus (\text{被約行列分解}) \quad (13)$$

と一意的に表すことができる。再び注意 3.18 により、 $v_e$  は  $\frac{F_*^e R}{F_*^e(f)(F_*^e R)} = F_*^e(R/(f))$  に直和因子として現れる  $R/(f)$  の個数である。つまり、 $\lim_{e \rightarrow \infty} \frac{v_e}{p^{en}}$  は  $R/(f)$  の F 符号  $s(R/(f))$  である。

**命題 3.19.**  $v_e = \ell_R(M_{e, p^e-1})$  が成り立つ。

**証明.** 写像  $F_*^e(f^{p^e-1}) : F_*^e R \rightarrow F_*^e R$  を  $R$  上の  $p^{(n+1)e} \times p^{(n+1)e}$  行列  $A$  と見なす。式 (13) により、 $v_e$  次の単位行列  $I_{v_e}$  と  $\mathfrak{m}$  を成分に持つ  $p^{e(n+1)} - (v_e + u_e)$  次の正方行列  $B$  を用いて、

$$A = \left( \begin{array}{c|c|c} I_{v_e} & & \\ \hline & f & \\ & & \ddots \\ & & & f \\ \hline & & & & B \end{array} \right)$$

と書ける。したがって、

$$\begin{aligned} v_e &= \dim_{R/\mathfrak{m}} \left( \text{Im}(R/\mathfrak{m} \otimes F_*^e(f^{p^e-1})) \right) \\ &= \dim_{R/\mathfrak{m}} \left( \frac{(f^{p^e-1}) + \mathfrak{m}^{[p^e]}}{\mathfrak{m}^{[p^e]}} \right) \\ &= \ell_R(M_{e, p^e-1}) \end{aligned}$$

が得られる。 □

以上で、定理 2.10 の証明を終えた。最後に証明した 3) の  $\xi_f(1) = s(R/(f))$  は、次の注意 3.20 のようにして確かめることもできる。

**注意 3.20.**  $(S, \mathfrak{n}, k)$  を標数  $p > 0$  の完備正則 局所環とする。  $k$  は完全体とする。  $I$  を  $S$  のイデアルとし、  $a_e$  は  $S/I$  の  $e$  回フロベニウス分裂数 とする。このとき、Fedder の補題 ([1] 参照) を用いることで、

$$a_e = \dim_k \left( \frac{(I^{[p^e]} : I) + \mathfrak{m}^{[p^e]}}{\mathfrak{m}^{[p^e]}} \right)$$

が成り立つことが知られている。ここで、  $I = (f)$  ならば、

$$a_e = \dim_k \left( \frac{(f^{p^e-1}) + \mathfrak{m}^{[p^e]}}{\mathfrak{m}^{[p^e]}} \right)$$

が成り立つ。

## 4 $f$ が単項式の場合

$f = X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} \cdots X_{n+1}^{\alpha_{n+1}}$  とする。ただし、  $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \cdots \leq \alpha_{n+1}$  とする。任意の  $e \geq 0$  に対して、  $(\underline{X}^{p^e}) = (X_1^{p^e}, X_2^{p^e}, \dots, X_{n+1}^{p^e})$  と書く。Conca [4] の Theorem 2.1 により、任意の  $p^e \geq \alpha_{n+1}$  に対して、

$$\ell_R \left( \frac{R}{(f^t) + (\underline{X}^{p^e})} \right) = P(p^e)$$

が成り立つような多項式  $P(y) \in \mathbb{Z}[y]$  が存在する。実際、任意の  $t \geq 0$  に対して、完全列

$$0 \longrightarrow \frac{(f^t) + (\underline{X}^{p^e})}{(\underline{X}^{p^e})} \longrightarrow \frac{R}{(\underline{X}^{p^e})} \longrightarrow \frac{R}{(f^t) + (\underline{X}^{p^e})} \longrightarrow 0$$

があるので、

$$\ell_R \left( \frac{R}{(f^t) + (\underline{X}^{p^e})} \right) = \begin{cases} p^{e(n+1)} - \prod_{j=1}^{n+1} (p^e - t\alpha_j) & (t\alpha_{n+1} < p^e) \\ p^{e(n+1)} & (t\alpha_{n+1} \geq p^e) \end{cases}$$

が成り立つ。一方で、完全列

$$0 \longrightarrow M_{e,t} \longrightarrow \frac{R}{(f^{t+1}) + (\underline{X}^{p^e})} \longrightarrow \frac{R}{(f^t) + (\underline{X}^{p^e})} \longrightarrow 0$$

がある。したがって,

$$\ell_R(M_{e,t}) = \begin{cases} 0 & \left( \frac{p^e}{\alpha_{n+1}} \leq t \right) \\ \prod_{j=1}^{n+1} (p^e - t\alpha_j) & \left( \frac{p^e}{\alpha_{n+1}} - 1 \leq t < \frac{p^e}{\alpha_{n+1}} \right) \\ \prod_{j=1}^{n+1} (p^e - t\alpha_j) - \prod_{j=1}^{n+1} (p^e - (t+1)\alpha_j) & \left( t < \frac{p^e}{\alpha_{n+1}} - 1 \right) \end{cases} \quad (14)$$

が成り立つ。もし,  $t < \frac{p^e}{\alpha_{n+1}} - 1$  ならば,

$$\begin{aligned} \ell_R(M_{e,t}) &= \prod_{j=1}^{n+1} (p^e - t\alpha_j) - \prod_{j=1}^{n+1} (p^e - (t+1)\alpha_j) \\ &= \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^j t^j \beta_j p^{e(n+1-j)} - \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^j (t+1)^j \beta_j p^{e(n+1-j)} \\ &= \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{j+1} \left( \sum_{i=0}^{j-1} \binom{j}{i} t^i \right) \beta_j p^{e(n+1-j)} \end{aligned}$$

である。ただし,  $\beta_j$  は  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+1}$  の  $j$  次基本対称式である。よって,

$$C_{e,t} = \frac{\ell_R(M_{e,t})}{p^{en}} = \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{j+1} \left( \sum_{i=0}^{j-1} \binom{j}{i} \frac{t^i}{p^{e(j-1)}} \right) \beta_j$$

が成り立つ。

以上で,  $\xi_f(x)$  の計算をする準備ができた。もし,  $0 \leq x < \frac{1}{\alpha_{n+1}}$  ならば, 十分大きな  $e \gg 0$  に対して,  $\lfloor xp^e \rfloor < \frac{p^e}{\alpha_{n+1}} - 1$  が成り立つ。このとき,

$$C_{e, \lfloor xp^e \rfloor} = \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{j+1} \left( \sum_{i=0}^{j-1} \binom{j}{i} \frac{\lfloor xp^e \rfloor^i}{p^{e(j-1)}} \right) \beta_j \geq 0$$

である。ここで,  $xp^e - 1 \leq \lfloor xp^e \rfloor \leq xp^e$  を見れば,

$$\lim_{e \rightarrow \infty} \frac{\lfloor xp^e \rfloor^a}{p^{eb}} = \begin{cases} x^a & (\text{if } a = b) \\ 0 & (\text{if } a < b) \end{cases}$$

である。したがって,  $0 \leq x < \frac{1}{\alpha_{n+1}}$  に対して,  $\xi_f(x)$  は,

$$\xi_f(x) = \beta_1 - 2\beta_2 x + 3\beta_3 x^2 - \dots + (-1)^n (n+1)\beta_{n+1} x^n \geq 0 \quad (15)$$

という多項式関数となる。特に,

$$e_{HK}(R/(f)) = \xi_f(0) = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n+1}$$

が得られる。もし、 $x > \frac{1}{\alpha_{n+1}}$  であれば、式 (14) により、

$$\xi_f(x) = 0 \quad (16)$$

が成り立つ。

残りの  $\xi_f\left(\frac{1}{\alpha_{n+1}}\right)$  を計算しよう。まず、 $\varepsilon_e \equiv p^e \pmod{\alpha_{n+1}}$  を  $0 \leq \varepsilon_e < \alpha_{n+1}$  を満たすものとする。また、

$$\begin{aligned} \delta_{\underline{i}} &= \prod_{j \neq i_1, i_2, \dots, i_k} (\alpha_{n+1} - \alpha_j), \\ \delta_k &= \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \delta_{\underline{i}} \alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \cdots \alpha_{i_k} \end{aligned}$$

と定める。これらを用いて、 $\ell_R(M_e, \lfloor \frac{1}{\alpha_{n+1}} p^e \rfloor)$  の計算をする。任意の  $e \geq 0$

に対して、 $\frac{p^e}{\alpha_{n+1}} - 1 \leq \lfloor \frac{p^e}{\alpha_{n+1}} \rfloor \leq \frac{p^e}{\alpha_{n+1}}$  であるから、

$$\begin{aligned} \ell_R(M_e, \lfloor \frac{1}{\alpha_{n+1}} p^e \rfloor) &= \prod_{j=1}^{n+1} \left\{ p^e - \lfloor \frac{p^e}{\alpha_{n+1}} \rfloor \alpha_j \right\} \\ &= \varepsilon_e \prod_{j=1}^n \left\{ p^e - (p^e - \varepsilon_e) \frac{\alpha_j}{\alpha_{n+1}} \right\} \\ &= \varepsilon_e \prod_{j=1}^n \left\{ \left( 1 - \frac{\alpha_j}{\alpha_{n+1}} \right) p^e + \frac{\varepsilon_e}{\alpha_{n+1}} \alpha_j \right\} \\ &= \varepsilon_e \left( \frac{1}{\alpha_{n+1}} \right)^n \prod_{j=1}^n \{ (\alpha_{n+1} - \alpha_j) p^e + \varepsilon_e \alpha_j \} \\ &= \varepsilon_e \left( \frac{1}{\alpha_{n+1}} \right)^n \left\{ p^{en} \prod_{j=1}^n (\alpha_{n+1} - \alpha_j) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^n \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \delta_{\underline{i}} p^{e(n-k)} \varepsilon_e^k \alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \cdots \alpha_{i_k} \right\} \\ &= \varepsilon_e \left( \frac{1}{\alpha_{n+1}} \right)^n p^{en} \left\{ \prod_{j=1}^n (\alpha_{n+1} - \alpha_j) + \sum_{k=1}^n \delta_k \left( \frac{\varepsilon_e}{p^e} \right)^k \right\} \end{aligned}$$

が成り立つ。よって、

$$C_{e, \lfloor \frac{1}{\alpha_{n+1}} p^e \rfloor} = \varepsilon_e \left( \frac{1}{\alpha_{n+1}} \right)^n \left\{ \prod_{j=1}^n (\alpha_{n+1} - \alpha_j) + \sum_{k=1}^n \delta_k \left( \frac{\varepsilon_e}{p^e} \right)^k \right\}$$

であり、

$$\limsup_{e \rightarrow \infty} C_{e, \lfloor \frac{1}{\alpha_{n+1}} p^e \rfloor} = \left( \limsup_{e \rightarrow \infty} \varepsilon_e \right) \left( \frac{1}{\alpha_{n+1}} \right)^n \prod_{j=1}^n (\alpha_{n+1} - \alpha_j) \quad (17)$$

が成り立つ。ここで、数列  $\{\varepsilon_e\}_e$  について考える。  $\alpha_{n+1} = p^s q$  と書くことにする。ただし、  $q$  は  $p$  と互いに素で、  $s$  は非負整数である。もし  $p \equiv 1 \pmod{q}$  ならば、中国剰余定理により任意の  $e \geq s$  に対して  $\varepsilon_e$  は定数である。もし  $p \not\equiv 1 \pmod{q}$  ならば、十分大きな  $e$  に対して  $\varepsilon_e$  は高々周期 1 である。

次の命題 4.1 が、関数  $\xi_f(x)$  の形を表している。

**命題 4.1.**  $f = X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} \cdots X_{n+1}^{\alpha_{n+1}}$  とおく。ただし、  $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \cdots \leq \alpha_{n+1}$  とする。このとき、次が成り立つ。

- 1)  $\text{fpt}(f) = \frac{1}{\alpha_{n+1}}$ . もしも  $\alpha_{n+1} \geq 2$  ならば、  $s(R/(f)) = 0$  である。
- 2)  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{\alpha_{n+1}} - 0} \xi_f(x) = \left( \frac{1}{\alpha_{n+1}} \right)^{n-1} \prod_{j=1}^n (\alpha_{n+1} - \alpha_j) \geq 0$ .
- 3) 関数  $\xi_f(x)$  が  $[0, 1]$  上で連続であるための必要十分条件は  $\alpha_{n+1} = \alpha_n$  である。
- 4)  $\alpha_{n+1} = p^s q$  とする。ただし、  $q$  は  $p$  と互いに素で、  $s$  は非負整数とする。このとき、極限  $\lim_{e \rightarrow \infty} \xi_{f,e} \left( \frac{1}{\alpha_{n+1}} \right)$  が存在するための必要十分条件は、  $\alpha_{n+1} = \alpha_n$  または  $p \equiv 1 \pmod{q}$  が成り立つことである。

**証明.** 式 (15) と式 (16) により、1) を得る。4) は、式 (17) とその直後の文章から分かる。3) は、式 (15) と主張 2) から分かる。以下、2) を示す。関数

$$g(x) = \beta_1 - 2\beta_2 x + 3\beta_3 x^2 - \cdots + (-1)^n (n+1)\beta_{n+1} x^n$$

と関数

$$h(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_{n+1})$$

を取る。ここで、  $g(x)$  が式 (15) と同じ形をしていることに注意する。このとき、

$$h(x) = x^{n+1} - \beta_1 x^n + \beta_2 x^{n-1} - \cdots + (-1)^{n+1} \beta_{n+1}$$

なので、

$$x^{n+1} h \left( \frac{1}{x} \right) = 1 - \beta_1 x + \beta_2 x^2 - \cdots + (-1)^{n+1} \beta_{n+1} x^{n+1}$$

であり、

$$g(x) = - \left\{ x^{n+1} h \left( \frac{1}{x} \right) \right\}' = -(n+1)x^n h \left( \frac{1}{x} \right) + x^{n-1} h' \left( \frac{1}{x} \right)$$

が成り立つ。今  $h(\alpha_{n+1}) = 0$  なので、

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{1}{\alpha_{n+1}} - 0} \xi_f(x) &= g\left(\frac{1}{\alpha_{n+1}}\right) \\ &= \left(\frac{1}{\alpha_{n+1}}\right)^{n-1} h'(\alpha_{n+1}) \\ &= \left(\frac{1}{\alpha_{n+1}}\right)^{n-1} \prod_{j=1}^n (\alpha_{n+1} - \alpha_j) \geq 0 \end{aligned}$$

が成り立つ。 □

**例 4.2.** もし  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{n-2} = 0$  かつ  $\alpha_{n-1} \neq 0$  ならば、関数  $\xi_f(x)$  は半开区間  $\left[0, \frac{1}{\alpha_{n+1}}\right)$  において、下に凸の二次関数  $g(x)$  に一致している。微分をすると、

$$g'(x) = -2(\alpha_{n+1}\alpha_n + \alpha_{n+1}\alpha_{n-1} + \alpha_n\alpha_{n-1}) + 6\alpha_{n+1}\alpha_n\alpha_{n-1}x$$

となる。ここで、 $\alpha$  を  $g'(x) = 0$  の根とする。つまり、

$$\alpha = \frac{1}{3} \times \frac{\alpha_{n+1}\alpha_n + \alpha_{n+1}\alpha_{n-1} + \alpha_n\alpha_{n-1}}{\alpha_{n+1}\alpha_n\alpha_{n-1}}$$

が成り立つ。このとき、

$$\alpha - \frac{1}{\alpha_{n+1}} = \frac{1}{\alpha_{n+1}} \left\{ \frac{1}{3} \left( \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_{n-1}} + \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} + 1 \right) - 1 \right\} \geq 0$$

なので、任意の  $x < \frac{1}{\alpha_{n+1}}$  に対して  $g'(x) < 0$  である。したがって、 $y = g(x)$  の頂点の  $x$  座標は  $\frac{1}{\alpha_{n+1}}$  以上である。さらに、もし  $\alpha_{n+1} \neq \alpha_n$  ならば、 $g'\left(\frac{1}{\alpha_{n+1}}\right) < 0$  である。

## 参考文献

- [1] I. M. ABERBACH AND F. ENESCU, The structure of F-pure rings, *Math. Z.* **250** (2005), no. 4, 791–806.
- [2] M. BLICKLE, M. MUSTĂŢĂ, AND K. E. SMITH, F-thresholds of hypersurfaces, *Trans. Amer. Math. Soc.* **361** (2009), 6549–6565.
- [3] M. BLICKLE, K. SCHWEDE, AND K. TUCKER, F-signature of pairs: continuity, p-fractals and minimal log discrepancies, *J. London Math. Soc. (2)* **87** (2013), 802–818.
- [4] A. CONCA, Hilbert-Kunz function of monomial ideals and binomial hypersurfaces, *manuscripta math.* **90** (1996), 287–300.
- [5] D. EISENBUD, Homological algebra on a complete intersection, with an application to group representations, *Trans. Amer. Math. Soc.* **260** (1980), no. 1, 35–64.
- [6] C. HAN AND P. MONSKY, Some surprising Hilbert-Kunz functions, *Math. Z.* **214** (1993), 119–135.
- [7] C. HUNEKE, Tight Closure and Its Applications, C.B.M.S. Regional Conf. Ser. in Math. No. **88** (1996), American Mathematical Society
- [8] C. HUNEKE AND G. LEUSCHKE, Two theorems about maximal Cohen-Macaulay modules, *Math. Ann.* **324** (2002), no. 2, 391–404.
- [9] C. HUNEKE M. A. MCDERMOTT AND P. MONSKY, Hilbert-Kunz functions for normal graded rings, *Math. Res. Letters* **11** (2004), 539–546.
- [10] K. KUNZ, On Noetherian Rings of Characteristic  $p$ , *Amer. J. Math.* **98** (1976), 999–1013.
- [11] K. KUNZ, Characterizations of regular local rings of characteristic  $p$ , *Amer. J. Math.* **91** (1969), 772–784.
- [12] K. KURANO, The singular Riemann-Roch theorem and Hilbert-Kunz functions, *J. Algebra.* **304** (2006), 487–499.
- [13] P. MONSKY, The Hilbert-Kunz function, *Math. Ann.* **263** (1983), 43–49.
- [14] K. OHTA, A Function Determined by a Hypersurface of Positive Characteristic, to appear in *Tokyo J. Math.*

- [15] S. TAKAGI AND K.-I. WATANABE, On F-pure thresholds, J. Algebra **282** (2004), 278–297.
- [16] K. TUCKER, F-signature exists, Invent. Math. **190** (2012), no. 3, 743–765.
- [17] K.-I. WATANABE AND K. YOSHIDA, Hilbert-Kunz multiplicity and an inequality between multiplicity and colength, J. Algebra. **230** (2000), 295–317.

## 索引

F 純閾値 (F-pure threshold).....	3, 4, 8, 9, 15, 16
F 跳躍指数 (F-jumping exponent) .....	9
F 符号 (F-signature) .....	2-5, 9, 22
組の — (— of pair).....	4
(—— の定義) .....	6
F 有限 (F-finite).....	3, 5, 6, 9, 10
(—— の定義) .....	5
アルキメデスの性質 (Archimedean property) .....	16
階段関数 (step function) .....	17-19
確率密度関数 (probability density function) .....	3
可測関数 (measurable function) .....	18
強 F 正則 (strongly F-regular).....	9
行列分解 (matrix factorization) .....	21, 22
コーエン・マコーレー (Cohen-Macaulay).....	3, 10
ゴレンシュタイン (Gorenstein).....	3, 19
正則 (regular).....	2, 3, 9, 10, 21, 23
測度 0 (measure zero) .....	17
中国剰余定理 (chinese remainder theorem).....	26
超曲面 (hypersurface) .....	2-4, 19
(—— の定義) .....	6
天井関数 (ceiling function).....	11
被約 (reduced)	
— 環 .....	2, 3, 6, 10
(—— の定義) .....	5
— 行列分解 .....	22
(—— の定義) .....	21
ヒルベルト・クンツ関数 (Hilbert-Kunz function) .....	3
ヒルベルト・クンツ重複度 (Hilbert-Kunz multiplicity) .....	2-4, 8
(—— の定義) .....	5
フロベニウス・ファイバー (Frobenius fiber) .....	2

—— の被約な長さ (reduced length of —)	2
フロベニウス写像 (Frobenius mapping)	3, 5, 11, 22
フロベニウス分裂数 (Frobenius splitting number)	3, 23
(—— の定義)	6
フロベニウス冪 (Frobenius power)	5
有限な環準同型 (finite (ring) homomorphism)	5
優秀環 (excellent ring)	6
床関数 (floor function)	7, 11
リーマン積分 (Riemann integral)	19
リップシッツ連続 (Lipschitz continuity)	9
ルベーグ積分 (Lebesgue integral)	19
ルベーグ積分可能 (Lebesgue integrable)	18
ルベーグの収束定理 (dominated convergence theorem)	17–19