2016年度藏野研究室卒業論文
「可換環の単項イデアルの生成元は同伴か」

明治大学理工学部数学科
秋山 昌晴
市倉 智実
折尾 柾希
松浦 瑞樹
三田村 彩子

2017年2月22日

目 次

1　序

可換環とは、和と積という二項演算が定義され、加法と減法と乗法を自由に行うことのできる集合である。有理整数環 $\mathbb{Z}$ や多項式環は通常の和と積によって環をなし、それらは最も基本的なものである。これらのような環について考察する手法の一つは、そのイデアルの振る舞いを見ること[1]である。イデアル[2]とは、$\mathbb{Z}$ における倍数の性質を一般化した概念である。例えば、2 が生成する $\mathbb{Z}$ のイデアル (すなわち、2 を含む最小の $\mathbb{Z}$ のイデアル) を (2) と書くと、これは 2 の倍数全体に一致する。同様にして、$\mathbb{Z}$ 以外の環についても、元 a に対して単項イデアル (a) が自然に対応する。一方、$(2) = (-2)$ となるので、この対応は一対一ではないことがわかる。

この論文では、次の問題に答えることを目標とする。

問題 1.1 A を環とする。$a, b \in A$ に対して $(a) = (b) \neq (0)$ であるとき、

$$b = au$$

となる A の単元 u は存在するか？

注意 1.2 A が整域であるとする。このとき、問題 1.1 は正しい。実際、$b = au,\ a = bv$ を満たす A の元 u, v をとれば、$a = auv$ が成立する。A が整域であれば、$uv = 1$ となり、u は A の単元になる。

上の問題が成立する場合、同伴[3]による A の商集合と A の単項イデアル全体の集合の間に、自然な一対一の対応が誘導される。すなわち、同伴から定まる同値関係を $\sim$、A の単項イデアル全体を $\mathfrak{P}(A)$ と書くと、写像

$$\begin{array}{ccc} A/\sim & \longrightarrow & \mathfrak{P}(A) \\ \overline{a} & \longmapsto & (a) \end{array}$$

が全単射となることを意味する。

例 1.3 $\mathbb{Z}$ の単元は ± 1 なので、非負整数全体が $\mathbb{Z}/\sim$ の完全代表系となる。$\mathbb{Z}$ は整域なので $\mathbb{Z}$ に対して問題 1.1 は成立し、非負整数は $\mathbb{Z}$ の単項イデアルと一対一に対応する。

---

[1]実際、$\mathbb{Z}$ の素数の代わりに素イデアルを用いることによって自然に一般化される。

[2]ドイツの数学者である Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831-1916) によって導入された。

[3]$a, b \in A$ に対して、$b = au$ となる A の単元 u が存在するとき a と b は**同伴**であるという。これは A 上の同値関係となる。

例 1.4 K を体とし、$K[X]$ は K 上一変数の多項式環であるとする。$K[X]$ の単元の集合は $K^\times = K \setminus \{0\}$ なので、モニック多項式と零多項式からなる集合は、$K[X]/\sim$ の完全代表系となる。$K[X]$ は整域なので $K[X]$ に対して問題 1.1 は成立し、モニック多項式と零多項式は $K[X]$ の単項イデアルと一対一に対応する。

次章より、環 A に適切な条件を仮定することで、問題 1.1 が成立することがあることを示す。また、成立しない場合についても考察する。

この論文を通して、環は可換環であり、単位元 1 を持つものとする。また、環 A の単元の集合を $\mathrm{U}(A)$ と表すことにする。

2 局所環の場合

この章では、局所環の場合に問題 1.1 を議論する。

2.1 Jacobson 根基、中山の補題

定義 2.1 A を環とする。A の極大イデアル全体の共通部分を A の Jacobson 根基といい、$\mathfrak{J}$ または $\mathfrak{J}(A)$ と表す。

命題 2.2 A は環、$\mathfrak{J}$ は A の Jacobson 根基とする。このとき、次は同値である。

(1) x は $\mathfrak{J}$ の元である。

(2) A の任意の元 y に対して、$1 - xy$ は A 上の単元である。

証明 $x \in \mathfrak{J}$ とする。ある A の元 y に対して $1 - xy$ が非単元であれば、これを元として含む A の極大イデアル $\mathfrak{m}$ が存在する。しかし、$x \in \mathfrak{J} \subset \mathfrak{m}$ であるから、$xy \in \mathfrak{m}$, $1 \in \mathfrak{m}$ となり、$\mathfrak{m} = A$ となる。これは極大イデアルの定義に矛盾する。

逆に $x \notin \mathfrak{J}$ であれば、x を含まない A の極大イデアル $\mathfrak{m}$ が存在する。$A/\mathfrak{m}$ は体である。$\overline{x} \in A/\mathfrak{m}$ は、$x \notin \mathfrak{m}$ により $\overline{x} \neq \overline{0}$ である。故に、$\overline{x}\,\overline{y} = \overline{1}$ となる $\overline{y} \in A/\mathfrak{m}$ が存在する。よって、$1 - xy \in \mathfrak{m}$ となる。極大イデアルは単元を含まないので、$1 - xy$ は A 上の非単元である。 証明終

定義 2.3 A を環、M を加法群とする。このとき M が A **加群**であるとは、$a \in A$ と $x \in M$ に対して $ax \in M$ が定まり、次の 4 条件を満たすものである。

(1) $a \in A$、$x, y \in M$ のとき、$a(x+y) = ax + ay$

(2) $a, b \in A$、$x \in M$ のとき、$(a+b)x = ax + bx$

(3) $a, b \in A$、$x \in M$ のとき、$(ab)x = a(bx)$

(4) $x \in M$ に対して、$1_A x = x$

例 2.4 A のイデアルは A 加群である。特に、A 自身も A 加群となる。

定理 2.5 (中山の補題) M を有限生成の A 加群とする。$\mathfrak{a}$ は A のイデアルで、A の Jacobson 根基 $\mathfrak{J}$ に含まれるとする。このとき、$\mathfrak{a}M = M$ が成立すれば、$M = 0$ となる。

証明 $M \neq 0$ と仮定する。M は有限個の元で生成される。その生成元の個数を最小に取り、生成元を $u_1, \ldots, u_n \in M$ とおく。$u_n \in M = \mathfrak{a}M$ であるから、$u_n = a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_nu_n$ となるような $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathfrak{a}$ を取ることができる。よって、

$$(1 - a_n)u_n = a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_{n-1}u_{n-1}$$

となる。$a_n \in \mathfrak{a} \subset \mathfrak{J}$ であるので、命題 2.2 により、$1 - a_n$ は単元である。ゆえに、u_n は $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ によって表すことができるが、これは生成元の個数の最小性に矛盾する。 証明終

2.2 局所環の場合について

定義 2.6 極大イデアルを唯一つしか持たない環を**局所環**という。

局所環に対して、そのただ一つの極大イデアルと Jacobson 根基は一致することに注意する。

注意 2.7 環 A において、A の極大イデアル全体の和集合は A の非単元の全体集合と一致する。すなわち、

$$\bigcup_{M \in \mathrm{MaxA}} M = A \backslash \mathrm{U}(A)$$

が成立する。また、A が局所環で $\mathfrak{J}$ が A の Jacobson 根基であれば、

$$\mathfrak{J} = A \backslash \mathrm{U}(A)$$

がいえる。

定理 2.8 A は局所環、$a, b \in A$、$(a) = (b) \neq (0)$ とする。このとき、$b = au$ を満たす $u \in A$ は、A の単元である。

証明 $b \in (b) = (a)$ より、ある $u \in A$ を使って、$b = au$ と表せる。u が非単元であると仮定する。$(a) = (b) = (au) = (a)(u)$ であり、(a) は A 加群である。注意 2.7 より、$u \in \mathfrak{J}$ であるから、$(u) \subset \mathfrak{J}$ である。このとき、定理 2.5 より、$(a) = (0)$ となる。これは矛盾であるので、u は単元である。 証明終

3 半局所環の場合

2 章では A が局所環であると仮定することで、定理 2.8 が示された。

定義 3.1 極大イデアルが有限個である環を**半局所環**という。

この章の目的は次を示すことである。

定理 3.2 A を半局所環とし、$a, b \in A$ とする。このとき、$(a) = (b) \neq (0)$ ならば、$b = au$ となる A の単元 u が存在する。

そのために、いくつかの準備を行い、3.3 節で上の定理の証明を与える。

例 3.3 $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ は局所環であって、それぞれの極大イデアルは $2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, 0 である。ここで、$A = (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ とすると、A の極大イデアルは

$$\mathfrak{m}_1 = (2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}), \qquad \mathfrak{m}_2 = (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \times 0$$

である。ここで、$a = (1, 0)$, $b = (3, 0) \in A$ とすると、$(a) = (b) \neq (0)$ が成り立つ。このとき、$u = (3, 0) \in A$ とすると $b = au$ となるが、$u \in \mathfrak{m}_2$ より u は A の単元ではない。

$v = (0,1)$ とおく。このとき、$a(u+v) = au + av = b + 0 = b$ である。また、$u \notin \mathfrak{m}_1$ かつ $v \in \mathfrak{m}_1$ より $u + v \notin \mathfrak{m}_1$ であり、$u \in \mathfrak{m}_2$ かつ $v \notin \mathfrak{m}_2$ より $u + v \notin \mathfrak{m}_2$ である。よって、$u + v$ は A の単元となる。これより、単元ではない u に対し、$av = 0$ となる v を適切に定めることによって、$u + v$ が $a(u+v) = b$ を満たす単元となった。

この例からわかるように、A が半局所環で $(a) = (b) \neq 0$ の場合、$a = bu$ を満たす u は A の単元であるとは限らない。しかし、定理 3.2 は、$a = bu$ を満たす A の単元 u は存在することを言っている。

これを示すために、“Prime Avoidance” と呼ばれる定理と加群の局所化について、準備を進めてゆく。

3.1 Prime Avoidance

環 A の真のイデアル $\mathfrak{p}$ に対し、$xy \in \mathfrak{p}$ となる $x, y \in A$ について $x \in \mathfrak{p}$ または $y \in \mathfrak{p}$ となるとき、$\mathfrak{p}$ は A の**素イデアル**であるという。ここでは、素イデアルに関する性質を見る。

命題 3.4 $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ を A のイデアル、$\mathfrak{p}$ を A の素イデアルとする。このとき、$\mathfrak{a} \not\subset \mathfrak{p}$ かつ $\mathfrak{b} \not\subset \mathfrak{p}$ ならば $\mathfrak{ab} \not\subset \mathfrak{p}$ となる。

証明 仮定より、$a \in \mathfrak{a} \backslash \mathfrak{p}$, $b \in \mathfrak{b} \backslash \mathfrak{p}$ が存在する。$\mathfrak{p}$ は素イデアルなので $ab \in \mathfrak{ab} \backslash \mathfrak{p}$ である。よって、$\mathfrak{ab} \not\subset \mathfrak{p}$ を得る。 証明終

系 3.5 $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_r$ を A のイデアル、$\mathfrak{p}$ を A の素イデアルとする。このとき、$\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_r \not\subset \mathfrak{p}$ ならば $\prod_{i=1}^r \mathfrak{a}_i \not\subset \mathfrak{p}$ となる。

定理 3.6 (Prime Avoidance) $x \in A$ とし、$\mathfrak{a}$ を A のイデアル、$\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r$ を A の素イデアルとする。このとき、各 $\mathfrak{p}_i$ について $(x) + \mathfrak{a} \not\subset \mathfrak{p}_i$ ならば

$$x + y \notin \bigcup_{i=1}^{r} \mathfrak{p}_i$$

となる $y \in \mathfrak{a}$ が存在する。

証明 $\mathfrak{p}_i \subset \mathfrak{p}_j$ となる $\mathfrak{p}_i$ を除くことで、$\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r$ に包含関係がないと仮定してよい。

$r=1$ のとき、対偶を示す。すなわち、任意の $y\in\mathfrak{a}$ について $x+y\in\mathfrak{p}_1$ となることを仮定する。このとき、$0\in\mathfrak{a}$ より $x=x+0\in\mathfrak{p}_1$ となる。よって、任意の $y\in\mathfrak{a}$ について $y=(x+y)-x\in\mathfrak{p}_1$ となるので、$\mathfrak{a}\subset\mathfrak{p}_1$ より $(x)+\mathfrak{a}\subset\mathfrak{p}_1$ である。

$r>1$ のとき、帰納法の仮定から

$$x+y\notin\bigcup_{i=1}^{r-1}\mathfrak{p}_i$$

となる $y\in\mathfrak{a}$ が存在する。もし $x+y\notin\mathfrak{p}_r$ ならば証明は終了する。$x+y\in\mathfrak{p}_r$ であるときを考える。ここで、$\mathfrak{a}\subset\mathfrak{p}_r$ と仮定すると、$y\in\mathfrak{p}_r$ より $x\in\mathfrak{p}_r$ であって、$(x)+\mathfrak{a}\subset\mathfrak{p}_r$ となり矛盾する。よって、$\mathfrak{a},\mathfrak{p}_1,\ldots,\mathfrak{p}_{r-1}\not\subset\mathfrak{p}_r$ となるので、$\mathfrak{p}_r$ は素イデアルより $\mathfrak{a}\prod_{i=1}^{r-1}\mathfrak{p}_i\not\subset\mathfrak{p}_r$ である。すなわち、$z\notin\mathfrak{p}_r$ となる $z\in\mathfrak{a}\prod_{i=1}^{r-1}\mathfrak{p}_i$ が存在する。このとき、$y+z$ は求める元となる。実際、$1\leq i\leq r-1$ について $x+y\notin\mathfrak{p}_i$ かつ $z\in\mathfrak{p}_i$ より $x+y+z\notin\mathfrak{p}_i$ である。また、$x+y\in\mathfrak{p}_r$ かつ $z\notin\mathfrak{p}_r$ より $x+y+z\notin\mathfrak{p}_r$ である。$y,z\in\mathfrak{a}$ より $y+z\in\mathfrak{a}$ であるので、$y+z$ が求める元であることがわかった。 証明終

定理 3.6 において、$x=0$ とおくことで次がわかる。

系 3.7 $\mathfrak{a}$ を A のイデアル、$\mathfrak{p}_1,\ldots,\mathfrak{p}_r$ を A の素イデアルとする。このとき、各 $\mathfrak{p}_i$ について $\mathfrak{a}\not\subset\mathfrak{p}_i$ ならば、$y\notin\bigcup_{i=1}^{r}\mathfrak{p}_i$ となる $y\in\mathfrak{a}$ が存在する。

定義 3.8 A のイデアル $\mathfrak{a},\mathfrak{b}$ に対して、それらの**イデアル商** $(\mathfrak{a}:\mathfrak{b})$ を

$$(\mathfrak{a}:\mathfrak{b})=\{x\in A\mid x\mathfrak{b}\subset\mathfrak{a}\}$$

と定めると、これは A のイデアルとなる。特に、$(0:\mathfrak{b})$ を $\mathfrak{b}$ の**零化イデアル**といい、$\mathrm{Ann}(\mathfrak{b})$ と表す。すなわち

$$\mathrm{Ann}(\mathfrak{b})=\{x\in A\mid x\mathfrak{b}=0\}$$

である。

3.2 局所化

定義 3.9 環 A の部分集合 S が条件

(1) $x, y \in S$ ならば $xy \in S$

(2) $1 \in S$

を満たすとき、S を**積閉集合**という。

M を A 加群とし、$S \subset A$ を積閉集合とする。このとき、(m, s), $(m', s') \in M \times S$ に対して

$$t(s'm - sm') = 0$$

となる $t \in S$ が存在するとき、$(m, s) \sim (m', s')$ と書く。このとき、$\sim$ は $M \times S$ 上の同値関係となる。実際、$1 \in S$ かつ $1(sm - sm) = 0$ より $(m, s) \sim (m, s)$ となる。よって、反射律が成り立つ。$(m, s) \sim (m', s')$ ならば $t \in S$ を用いて $t(s'm - sm') = 0$ となるので、$t(sm' - s'm) = 0$ より $(m', s') \sim (m, s)$ となる。よって、対称律が成り立つ。$(m, s) \sim (m', s')$ かつ $(m', s') \sim (m'', s'')$ ならば $t,\ u \in S$ を用いて $t(s'm - sm') = 0$, $u(s''m' - s'm'') = 0$ となるので、$tus' \in S$ かつ $tus'(s''m - sm'') = 0$ より $(m, s) \sim (m'', s'')$ となる。よって、推移律が成り立つ。この同値関係 $\sim$ による $M \times S$ の商集合を $S^{-1}M$ と書く。また、(m, s) が属する同値類を m/s と書く。

集合 $S^{-1}A$ において、和と積を

$$\frac{a}{s} + \frac{b}{t} = \frac{ta + sb}{st}, \qquad \frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} = \frac{ab}{st}$$

と定義する。この定義が well-defined であることは、次のように確かめられる。$a/s = a'/s'$, $b/t = b'/t'$ とすると、$u, v \in S$ を用いて $u(s'a - sa') = 0$, $v(t'b - tb') = 0$ となる。和について、$uv(s't'(ta + sb) - st(t'a' + s'b')) = 0$ より $(ta + sb)/st = (t'a' + s'b')/s't'$ となる。積について、$uv(s't'ab - sta'b') = 0$ より $ab/st = a'b'/s't'$ となる。この和と積によって $S^{-1}A$ は可換環となる。ここで、$S^{-1}A$ の零元は $0/1$、単位元は $1/1$ である。このとき、$S^{-1}A$ を A の S による**局所化**という。

集合 $S^{-1}M$ において、和とスカラー積を

$$\frac{m}{s} + \frac{n}{t} = \frac{tm + sn}{st}, \qquad \frac{a}{s} \cdot \frac{m}{t} = \frac{am}{st}$$

と定義する。この定義が well-defined であることは、$S^{-1}A$ の議論と同様に確かめられる。この和とスカラー積によって $S^{-1}M$ は $S^{-1}A$ 加群となる。このとき、$S^{-1}M$ を M の S による**局所化**という。

命題 3.10 M を A 加群、$\mathfrak{a}$ を A のイデアルとする。このとき、

(1) $S^{-1}\mathfrak{a} = \mathfrak{a}(S^{-1}A)$

(2) $S^{-1}(\mathfrak{a}M) = (S^{-1}\mathfrak{a})(S^{-1}M)$

注意 3.11 $\mathfrak{p}$ を A のイデアルとし、$S = A \backslash \mathfrak{p}$ とおく。このとき、

(1) $\mathfrak{p}$ が素イデアルであるための必要十分条件は、S が積閉集合となることである。

(2) $\mathfrak{p}$ が素イデアルならば、$S^{-1}A$ は局所環であって、その唯一つの極大イデアルは $S^{-1}\mathfrak{p}$ である。

証明 素イデアル及び積閉集合の定義より (1) は明らかである。

次に (2) を示す。もし $1/1 \in S^{-1}\mathfrak{p}$ ならば、$s'(a-s) = 0$ となる $s, s' \in S$, $a \in \mathfrak{p}$ が存在する。よって、$s'a = s's$ となるが、$s'a \in \mathfrak{p}$ かつ $s's \in S$ より矛盾する。これより、$S^{-1}\mathfrak{p}$ は $S^{-1}A$ の真のイデアルである。ここで、$b/t \in S^{-1}A$ $(b \in A,\, t \in S)$ をとり、$b/t \notin S^{-1}\mathfrak{p}$ であるとする。このとき、$b \notin \mathfrak{p}$ であるので、$b, t \in S$ より b/t は $S^{-1}A$ の単元となる。これより、$S^{-1}\mathfrak{p}$ に含まれないイデアルは単元を含むため、$S^{-1}A$ に一致する。すなわち、$S^{-1}A$ の真のイデアルは全て $S^{-1}\mathfrak{p}$ に含まれる。よって、$S^{-1}A$ は $S^{-1}\mathfrak{p}$ を唯一つの極大イデアルとする局所環である。 **証明終**

定義 3.12 A 加群 M と A の素イデアル $\mathfrak{p}$ に対し、M の $S = A \backslash \mathfrak{p}$ による局所化 $S^{-1}M$ を $\mathfrak{p}$ における**局所化**という。このとき、$S^{-1}M$ を $M_{\mathfrak{p}}$ とも表す。

3.3 証明

この章の目的であった、定理 3.2 に証明を与える。

証明 仮定より $b = au$ となる $u \in A$ が存在する。$\mathfrak{a} = (a) = (b)$, $\mathfrak{u} = (u)$ とすると、$\mathfrak{a} = \mathfrak{u}\mathfrak{a}$ となる。A は半局所環なので $\mathrm{Max}(A) = \{\mathfrak{m}_1, \cdots, \mathfrak{m}_r\}$ とおく。各 i について $S_i = A \backslash \mathfrak{m}_i$ とすると、$\mathfrak{m}_i$ は極大イデアルなので S_i は A の積閉集合となる。

まず、$\mathfrak{u} \subset \mathfrak{m}_i$ となる $\mathfrak{m}_i$ について、$S_i^{-1}\mathfrak{u} \subset S_i^{-1}\mathfrak{m}_i$ となる。ここで、$S_i^{-1}A$ は局所環なので、唯一つの極大イデアル $S_i^{-1}\mathfrak{m}_i$ は $S_i^{-1}A$ の Jacobson

根基と一致する。また、$\mathfrak{a}=\mathfrak{u}\mathfrak{a}$ より $S_i^{-1}\mathfrak{a}=(S_i^{-1}\mathfrak{u})(S_i^{-1}\mathfrak{a})$ であって、$S_i^{-1}\mathfrak{a}$ は有限生成 $S_i^{-1}A$ 加群である。よって、定理 2.5 より $S_i^{-1}\mathfrak{a}=0$ となる。すなわち、$s\mathfrak{a}=0$ となる $s\in S_i$ が存在する。これより、$s\in\mathrm{Ann}(\mathfrak{a})$ かつ $s\notin\mathfrak{m}_i$ となる。このとき、$\mathrm{Ann}(\mathfrak{a})\not\subset\mathfrak{m}_i$ となるので $\mathfrak{u}+\mathrm{Ann}(\mathfrak{a})\not\subset\mathfrak{m}_i$ を得る。

一方、$\mathfrak{u}\not\subset\mathfrak{m}_i$ となる $\mathfrak{m}_i$ についても $\mathfrak{u}+\mathrm{Ann}(\mathfrak{a})\not\subset\mathfrak{m}_i$ となる。

よって、定理 3.6 より

$$u+v\notin\bigcup_{i=1}^{r}\mathfrak{m}_i$$

となる $v\in\mathrm{Ann}(\mathfrak{a})$ が存在する。このとき、$u+v$ を含む A の極大イデアルが存在しないので $u+v$ は A の単元である。さらに、

$$a(u+v)=au+av=b+0=b$$

となる。よって、$u+v$ は求める元となる。 証明終

4 反例

この章では問題 1.1 に対して、どのような A の単元 u に対しても $a\neq bu$ となるような環 A の反例を与える。次の命題により、そのような反例があると仮定すれば、ある特別な環が反例にならざるを得ないことがわかる。

命題 4.1 A を体 K を含む環とする。A とその元 a,b は問題 1.1 の反例と仮定する。つまり、$a,b\in A$, $(a)=(b)\neq(0)$ であり、どのような A の単元 u に対しても $a\neq bu$ となると仮定する。このとき、$B=K[X,Y,Z]/(X-XYZ)$ も $a=x$, $b=xy$ と見ると問題 1.1 の反例となる。但し、自然な射

$$\pi:K[X,Y,Z]\longrightarrow B$$

において、$x=\pi(X)$, $y=\pi(Y)$ とする。

証明 A と $a,\,b\in A$ を反例とすると、$(a)=(b)\neq(0)$ であり、A の単元 u で $a=bu$ を満たすものは存在しない。ここで、$(a)=(b)$ より $b=ac$, $a=bd$ を満たす $c,d\in A$ が存在するので、$a=acd$ となる。$K[X,Y,Z]$ から A への環準同型 γ を、次のように定義する。

$$\begin{array}{ccc}
K[X,Y,Z] & \xrightarrow{\quad\gamma\quad} & A \\
\cup & & \cup \\
X & \longmapsto & a \\
Y & \longmapsto & c \\
Z & \longmapsto & d
\end{array}$$

すると、$a = acd$ より、$\gamma(X - XYZ) = 0$ であるので環準同型定理より次のことが言える。$B = K[X,Y,Z]/(X - XYZ)$ とし、自然な写像を $\pi : K[X,Y,Z] \longrightarrow B$ とすると、ある環準同型写像 $\bar{\gamma}$ が一意に存在し、$\bar{\gamma} \circ \pi = \gamma$ を満たす。

$$\begin{tikzcd} K[X,Y,Z] \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\pi"] & A \\ B \arrow[ur, dotted, "\bar{\gamma}"'] & \end{tikzcd}$$

ここで、B において $(x) = (xy) \neq (0)$ であることに注意する ($a \neq 0$ より $x \neq 0$ である)。このとき、仮にある $v \in \mathrm{U}(B)$ がとれて、$xy = xv$ が成り立っていたとすると、

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\quad\bar{\gamma}\quad} & A \\ \Cup & & \Cup \\ x & \longmapsto & a \\ xy & \longmapsto & ac \quad = b \end{array}$$

$\bar{\gamma}(xy) = ac = b$ であり、また $\bar{\gamma}(xv) = \bar{\gamma}(x)\bar{\gamma}(v) = a\bar{\gamma}(v)$ でもあることから、$b = a\bar{\gamma}(v)$ となる。ここで、$\bar{\gamma}$ は環準同型であるので、$\bar{\gamma}(v) \in \mathrm{U}(A)$ である。しかし、これはどのような A の単元 u に対しても $a \neq bu$ となることに矛盾する。従って B は問題 1.1 の反例となることが言える。 **証明終**

以上のことから問題 1.1 の反例 A を考えるにあたり、上で定義した環 B について調べればよいことが言える。

この環 B を調べるにあたって次数付き環の知識が必要となるため、以下に述べる。

4.1 次数環について

定義 4.2 A を環とする。A の部分加法群 A_i $(i \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ が存在して、次の条件を満たすとき、A は**次数付き環**であるという[4]。

(1) 任意の $i, j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し、$A_i A_j \subseteq A_{i+j}$ である。

(2) $A = \displaystyle\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} A_i$ である。

A_i を A の i **次斉次成分**という。

[4] 正確には、$(A, \{A_i\}_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}})$ は次数環というべきである。下の例 4.5 の (2), (3) で見るが、同じ A に対して、$\{A_i\}_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ のとり方は一通りではない。

定義 4.3 A を次数付き環、I を A のイデアルとする。任意の $a \in I$ に対して、$a = a_0 + a_1 + \cdots + a_t$ と次数によって斉次成分に分けたときに (つまり、$0 \leq i \leq t$ に対して、$a_i \in A_i$ とする。これを元 a の**斉次分解**という)、すべての i に対して $a_i \in I$ が成立するとき、I を**斉次イデアル**という。

定義 4.4 A, A' を次数付き環とする。A_i, A'_i は、それぞれの環の斉次成分とする。次の条件を満たすとき、写像 $f : A \to A'$ は**次数付き環の射**であるという。

(1) f は環準同型写像である。

(2) 各 i に対して、$f(A_i) \subset A'_i$

例 4.5 以下、K を体とする。

(1) $A := K[x]$ であり、$A_0 = K,\ A_1 = Kx,\ A_2 = Kx^2,\ \ldots,\ A_i = Kx^i, \ldots$ としたとき、A は次数環になる。

(2) $A := K[x_1, x_2]$ であり、$A_0 = K,\ A_1 = Kx_1 + Kx_2,\ A_2 = Kx_1^2 + Kx_1x_2 + Kx_2^2,\ \ldots,\ A_i = \sum_{\substack{u+v=i \\ u,v \geq 0}} K{x_1}^u x_2^v, \ldots$ としたとき、A は次数環になる。

(3) $A := K[x_1, x_2]$ であり、$A_0 = K[x_1],\ A_1 = K[x_1]x_2,\ A_2 = K[x_1]x_2^2, \ldots,$ $A_i = K[x_1]x_2^i, \ldots$ としたとき、A は次数環になる。

次数付き環において、次が成り立つ。

補題 4.6 A は次数付き環とし、I を A のイデアルとする。このとき次は同値である。

(1) I は斉次イデアルである。

(2) I は斉次元で生成される。

証明 A は次数付き環であるから、$A = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} A_i$ と表すことができる。(1) を仮定する。イデアル I から任意に元 a をとってくると、$a = a_0 + a_1 + \cdots + a_k$ と斉次元の和で書ける。但し、(1) より a_i は $A_i \cap I$ の元である。ここで、斉次元の集合 $\bigcup_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \left[(A_i - \{0\}) \cap I \right]$ を T とおくと、T は I の元からなる。T によって生成された A のイデアルを (T) とおくと、(T) は I に含まれ

る。逆に I の任意の元は $A_i \cap I$ の元 a_i の和で書けるので、I が (T) に含まれることも言える。従って $I = (T)$ より、I は斉次元で生成されることが言えた。

逆に、I が斉次元で生成されたイデアルとする。I から任意に元 a をとると、$a = b_{\lambda_1}a_{\lambda_1} + \cdots + b_{\lambda_t}a_{\lambda_t}$ と書ける。但し、b_{λ_i} は A の元であり、a_{λ_i} は $I \cap A_{d_i}$ の元とする。a は A に含まれることから、$a = c_0 + c_1 + \cdots + c_k$ とも書くことができる。但し、$c_i \in A_i$ である。このとき、任意の i に対して、c_i が I に含まれることを示せば良い。さて、b_{λ_i} は A の元であるから、$b_{\lambda_i} = e_{i0} + e_{i1} + \cdots + e_{ik_i}$ と表すことができる。但し e_{ij} は A_j の元である。従って、a は次のように書ける。

$$
\begin{aligned}
a &= (e_{10} + \cdots + e_{1k_1})a_{\lambda_1} + \cdots + (e_{t0} + \cdots + e_{tk_t})a_{\lambda_t} \\
&= e_{10}a_{\lambda_1} + \cdots + e_{1k_1}a_{\lambda_1} + \cdots + e_{t0}a_{\lambda_t} + \cdots + e_{tk_t}a_{\lambda_t}
\end{aligned}
$$

従って、それぞれの項の次数に気をつけると、

$$
c_l = \sum_{j+d_u=l} e_{uj}a_{\lambda_u}
$$

と書ける。a_{λ_k} は I の元であるので、c_l は I に含まれることが言える。よって I は斉次イデアルであることが結論される。　証明終

補題 4.7 A は次数付き環とし、I を A の斉次イデアルとする。このとき次が成り立つ。

(1) $A/I = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} A_i/(I \cap A_i)$ は次数付き環となる。

(2) A から A/I への自然な写像 φ は次数付き環の射となる。

証明

$$
\begin{tikzcd}
A_i \arrow[r, hook, "\psi_i"] \arrow[rr, bend right, "\mu_i"'] \arrow[d] & A \arrow[r, two heads, "\varphi"] & A/I \\
A_i/\mathrm{ker}\mu_i \arrow[urr, dotted] & &
\end{tikzcd}
$$

A_i から A への包含写像 ψ_i と A から A/I への自然な写像 φ の合成写像 $\varphi \circ \psi_i$ を μ_i とする。このとき、$\mathrm{Ker}\varphi \cap A_i = \mathrm{Ker}\mu_i$ であるので、準同型定理より φ による A_i の像 $\varphi(A_i)$ と $A_i/\mathrm{Ker}\mu_i$ は同型である。

さて、(1) を示す。A/I が環であることは明らかである。φ は環準同型より、0 以上の整数 i に対し、$\varphi(A_i)$ は A/I の部分加法群になる。

A/I と $\varphi(A_i)$ が定義 4.2 を満たすことを示す。A は次数付き環であるから $A = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} A_i$ と書ける。特に $A = \sum_{i\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} A_i$ より $\varphi(A) = \sum_{i\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} \varphi(A_i)$ となる。次に直和となることを示す。つまり、$\varphi(A_i)$ の元 a_i に対し、$\sum_{i=0}^{k} a_i = 0$ が成り立つとき、すべての i について $a_i = 0$ となることを示せば良い。定義から、A_i から元 b_i がとれて、$a_i = \varphi(b_i)$ と書ける。従って、仮定より、$\sum_{i=0}^{k} \varphi(b_i) = 0$ である。φ は環準同型であることから $\varphi(\sum_{i=0}^{k} b_i) = 0$ となるので、$\sum_{i=0}^{k} b_i = 0$ は $\mathrm{Ker}\varphi$ に含まれる。ところで、$\mathrm{Ker}\varphi = I$ であり、I は斉次イデアルであったので、すべての i に対して b_i は I に含まれる。よって、すべての i に対し、$a_i = 0$ となる。以上より A/I は $\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} \varphi(A_i)$ と同一視して良い。

また、φ は環準同型写像であるので、任意の 0 以上の整数 i, j に対して $\varphi(A_iA_j) = \varphi(A_i)\varphi(A_j)$ が成り立つ。A は次数付き環より、$\varphi(A_i)\varphi(A_j) = \varphi(A_iA_j) \subseteq \varphi(A_{i+j})$ となる。よって A/I が次数付き環となることが示された。

(2) を示す。φ が環準同型であることは、A から A/I への自然な写像であることから明らかである。また、0 以上の任意の整数 i に対して、$A_i/(A_i\cap I) = \varphi(A_i)$ であることから、φ が次数付き環の射であることが示される。

証明終

4.2 反例の構成

以下、K を体として

$$B = \frac{K[X,Y,Z]}{(X - XYZ)}$$

とおく。

ここで、環 B の単元の集合が $K \setminus \{0\}$ となることを示すために、準備が必要である。まず環 B が次数付き環であることを述べる。

主張 4.8 環 B は x, y, z の次数を $1, 0, 0$ として次数付き環になる。

証明 $R=K[X,Y,Z]$ とおくと、環 R は X,Y,Z の次数をそれぞれ $1,0,0$ と見て次数付き環となる。実際、$R_i=K[Y,Z]X^i$ に対して、$R=\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} R_i$ である。さて、$I=(X-XYZ)$ とすると、I は A のイデアルで、$X-XYZ\in R_1$ より I は R の斉次イデアルであることが言える。ゆえに、補題 4.7 より次数付き環の射 $\zeta:R\longrightarrow R/I=B$ がとれて、環 $R/I=B$ は次数付き環となる。 **証明終**

B は次数付き環より、$B=\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} R_i/(I\cap R_i)$ と書けることに気をつけておく。

以下、

$$S=\frac{K[X,Y,Z]}{(1-YZ)}$$

とおく。

補題 4.9 S は x,y,z の次数を $1,0,0$ として次数付き環になる。

証明 $R=K[X,Y,Z]$ は X,Y,Z の次数をそれぞれ $1,0,0$ とみて、次数付き環である。このとき、$1-YZ\in R_0$ なので、$(1-YZ)$ は斉次イデアルになる。よって、$S=K[X,Y,Z]/(1-YZ)$ は次数付き環である。 **証明終**

補題 4.10 S は整域である。

証明

$$S=\frac{K[X,Y,Z]}{(1-YZ)}=\left(\frac{K[Y,Z]}{(1-YZ)}\right)[X]$$

である。よって、$K[Y,Z]$ のイデアル $(1-YZ)$ が素イデアルであることを示せば十分である。次の写像

$$\begin{array}{ccc}\tau:K[Y,Z] & \longrightarrow & K[Y,1/Y]\\ \cup & & \cup\\ Y & \longmapsto & Y\\ Z & \longmapsto & 1/Y\end{array}$$

を考えるとき、$\ker\tau=(1-YZ)$ が成り立つことを確かめる。$(1-YZ)\subset\ker\tau$ は明らかである。$\ker\tau\subset(1-YZ)$ を示す。$u\in\ker\tau$ を仮定する. すると u は、$(1-YZ)$ の元で動かして

$$u-(1-YZ)v=a_0+a_1Y+\cdots+a_nY^n+a_{-1}Z+a_{-2}Z^2+\cdots+a_{-m}Z^m$$

と表せる (但し $a_i \in K$)。$u-(1-YZ)v \in \ker\tau$ より、

$$0 = \tau(u-(1-YZ)v) = \sum_{i=-m}^{n} a_i Y^i$$

となるので、すべての i に対して $a_i = 0$ である。したがって、$u = (1-YZ)v$ が成立する。よって、$\ker\tau = (1-YZ)$ が成り立つ。

$K[Y, 1/Y]$ は整域であるので、$(1-YZ)$ は $K[Y,Z]$ の素イデアルである。 証明終

補題 4.11 S は x, y, z の次数をそれぞれ $1, 0, 0$ とみて次数付き環であるが、このとき、$\mathrm{U}(S) = \mathrm{U}(S_0)$ である。

証明 $\mathrm{U}(S)$ の元 $a = a_0 + a_1 + \cdots + a_t$ をとる (但し、$a_i \in S_i$であり、$a_t \neq 0$)。このとき $d = d_0 + d_1 + \cdots + d_s \in S$ (但し $d_i \in S_i$) で、

$$(a_0 + a_1 + \cdots + a_t)(d_0 + d_1 + \cdots + d_s) = 1$$

を満たすものが存在する。但し、$d_s \neq 0$ とする。よって、$0 \neq a_t d_s \in S_{t+s}$ である。S が次数付き環かつ整域であるので $t + s = 0$ であり、$t, s \geq 0$ より $t = s = 0$ となる。よって、a も d も S_0 の元であるので、$\mathrm{U}(S) = \mathrm{U}(S_0)$ と結論付けられる。 証明終

補題 4.12 B と S は共に x, y, z の次数を順に $1, 0, 0$ と見て次数付き環になるのだが、1 以上の整数 n に対して B_n から S_n への自然な射は同型となる。

証明 $I = (X - XYZ)$、$J = (1-YZ)$ とする。I と J は斉次イデアルであるから $I = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} (I \cap R_i)$、$J = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} (J \cap R_i)$ と書ける。$B_n = R_n/I_n$、$S_n = R_n/J_n$ より、1 以上の整数 n に対して $I_n = J_n$ となることを示せば良い。R も x, y, z の次数を $1, 0, 0$ として次数付き環になることに注意する。R の単項イデアル $(X - XYZ)R$ は次のように書ける。

$$(X - XYZ)R = \{ f(X,Y,Z)(X - XYZ) \mid f(X,Y,Z) \text{ は } R \text{ の元 } \}$$

ここで、$f(X,Y,Z)$ は次数付き環 R の元であることから、

$$f(X,Y,Z) = f_0(X,Y,Z) + \cdots + f_l(X,Y,Z)$$

と表せる。従って、

$$f(X,Y,Z)(X-XYZ) = f_0(X,Y,Z)(X-XYZ)+\cdots+f_l(X,Y,Z)(X-XYZ)$$

と書ける。任意の整数 i に対して $f_i(X,Y,Z)(X-XYZ)$ は R_{i+1} の元であることに気をつけると、1 以上の整数 n に対して次のことが言える。

$$\begin{aligned}(X-XYZ)R \cap R_n &= R_{n-1}(X-XYZ)\\ &= K[Y,Z]X^{n-1}(X-XYZ)\\ &= K[Y,Z](1-YZ)X^n\\ &= (1-YZ)R \cap R_n\end{aligned}$$

よって、1 以上の整数 n に対して $I_n = J_n$ となる。これより B_n と S_n は同型である。 証明終

上の補題より以下の命題が示される。

命題 4.13 $\mathrm{U}(B) = K^\times$ が成り立つ。但し、$K^\times = K \setminus \{0\}$ である。

証明 B は次数付き環より $B = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} B_i$ と書ける。ゆえに、任意に $\mathrm{U}(B)$ の元 a をとると、$a = a_0 + a_1 + \cdots + a_k$ と書ける (但し、$a_i \in B_i$)。また、a は単元より、ある B の元 b が存在して、$ab = 1$ が成り立つ。この b に対しても $b = b_0 + b_1 + \cdots + b_k$ と書くことができる (但し、$b_i \in B_i$)。さて、B から S への写像 η は次数付き準同型であったので

$$\eta(a) = \eta_0(a_0) + \eta_1(a_1) + \cdots + \eta_k(a_k)$$

となる。但し、η_n は写像 η の B_n への制限であり、B_n から S_n への写像である。そして、a は B の単元であることから準同型写像で写した $\eta(a)$ は S の単元になることが言える。よって、補題 4.11 より $\mathrm{U}(S) = \mathrm{U}(S_0)$ であったので、$\eta(a)$ は S_0 の元となるので、$\eta_0(a_0) + \eta_1(a_1) + \cdots + \eta_k(a_k)$ は S_0 に含まれることが言える。各項の次数に気をつけると、1 以上の整数 i に対して $\eta_i(a_i) = 0$ となる。補題 4.12 より 1 以上の整数 i に対して B_i と S_i は同型になることから、$a_i = 0$ となることが言える。B の元 b に対しても同様のことが言えるので、

$$a_0 b_0 = 1$$

となることが言える。従って a_0 は B_0 の単元となり、$a=a_0$ より a は B_0 の単元となる。

$\mathrm{U}(B_0)=\mathrm{U}(K[Y,Z])$ となることを示す。$B_0=R_0/I_0$ であり、$R_0=K[Y,Z]$、$I_0=(X-XYZ)R\cap R_0$ であった。定義からイデアル $(X-XYZ)R$ に含まれる 0 次の元は 0 のみであるので、$I_0=(0)$ となることが言える。よって、$B_0=K[Y,Z]/(0)=K[Y,Z]$ より、$\mathrm{U}(B_0)=\mathrm{U}(K[Y,Z])$ となる。

$\mathrm{U}(K[Y,Z])=K^\times$ となることを示す。$K[Y,Z]$ は Y と Z を共に次数 1 と見て次数付き環となる。体 K は整域より $K[Y,Z]$ も整域となるので、補題 4.11 より $\mathrm{U}(K[Y,Z])=\mathrm{U}(K)$ となることが言える。従って $\mathrm{U}(K)=K^\times$ より $\mathrm{U}(K[Y,Z])=K^\times$ となる。

以上のことから $\mathrm{U}(B_0)=K^\times$ となることが言えた。　証明終

これらを踏まえ、環 B が問題 1.1 の反例となることを示す。

定理 4.14 $B=K[X,Y,Z]/(X-XYZ)$ としたとき、$(x)=(xy)\neq(0)$ であり、どのような B の単元 u に対しても $x\neq xyu$ となる。

証明 $x,y,z\in B$ をとると、$(x)=(xy)\neq(0)$ となる。実際、$xy\in(x)$ より $(x)\supset(xy)$ が言えて、さらに $x-xyz=0$ より、$x=xyz$ となることから $x=xyz\in(xy)$ が言えるので $(x)\subset(xy)$ となる。

次に、$(x)=(xy)\neq(0)$ となることを示す。$(xy)=(0)$ と仮定する。すると、$XY\in(X-XYZ)$ である。よって、ある $f(X,Y,Z)\in K[X,Y,Z]$ がとれて、$XY=f(X,Y,Z)(X-XYZ)$ と書くことができる。ここで $K[X,Y,Z]$ から $K[X]$ への写像 ξ を

$$\begin{array}{ccc} K[X,Y,Z] & \xrightarrow{\quad\xi\quad} & K[X] \\ \Psi & & \Psi \\ X & \longmapsto & X \\ Y & \longmapsto & 1 \\ Z & \longmapsto & 1 \end{array}$$

となるようにとると、代入原理より、$X=f(X)(X-X)=0$ となる。これは矛盾である。従って $(xy)\neq(0)$ となる。

さて、どのような $u\in\mathrm{U}(B)$ に対しても $x\neq xyu$ となることを示そう。ある元 $u\in\mathrm{U}(B)$ がとれて、$x=xyu$ が成り立っていたとする。ここで、命題 4.13 より $\mathrm{U}(B)=K^\times$ であるから、$u\in K^\times$ であることに注意しておく。このとき、

$$X-XYu=g(X,Y,Z)(1-YZ)X$$

をみたす $g(X,Y,Z)\in K[X,Y,Z]$ がとれる。ここで、X に 1 を代入すると

$$1-Yu=g(1,Y,Z)(1-YZ)$$

となるが、Z についての次数に注目すると、左辺は 0 次であり、右辺は 1 次以上となるのであり得ない。よって、$x=xyu$ を満たすような環 B の単元 u は存在しない。 証明終

5 極小素イデアルがただ一つの場合

前章では、$B=K[X,Y,Z]/(X-XYZ)$ が問題 1.1 の反例であることを示した。B は 2 つの極小素イデアル $(x),(1-yz)$ を持つ。この章では、極小素イデアルが 1 つの場合について考える。

定義 5.1 環 A におけるベキ零元全体の集合 $\mathfrak{N}_A$ を、A の**ベキ零根基**という。

補題 5.2 A を環とする。このとき，次は同値である。

i) A はただ一つの極小素イデアルをもつ

ii) $\mathfrak{N}_A$ は素イデアル

証明 i) $\Rightarrow$ ii) を示す。まず、任意の A の素イデアル $\mathfrak{q}$ に対し、$\mathfrak{q}$ に含まれるような A の極小素イデアル $\mathfrak{p}$ が存在することを示す。$\sum$ を $\mathfrak{q}$ に含まれるような素イデアル全体の集合とすると、$\mathfrak{q}\in\sum$ であるから、$\sum\neq\emptyset$ である。$\{\mathfrak{q}_i\}_{i\in I}$ を $\sum$ の全順序部分集合とする。$\mathfrak{q}'=\bigcap_{i\in I}\mathfrak{q}_i$ は $\{\mathfrak{q}_i\}_{i\in I}$ の下界であることが示される。ツォルンの補題より、$\sum$ の極小元 $\mathfrak{p}$ が存在する。これは $\mathfrak{q}$ に含まれる A の極小素イデアルである。よって、ただ 1 つの極小素イデアル $\mathfrak{p}$ を持つ環では、任意の素イデアルは $\mathfrak{p}$ を含むので $\mathfrak{N}_A=\mathfrak{p}$ である。

ii) $\Rightarrow$ i) を示す。$\mathfrak{N}_A=\bigcap_{\mathfrak{q}\in\mathrm{Spec}(A)}\mathfrak{q}$ であるので、任意の A の極小素イデアル $\mathfrak{p}$ に対し、$\mathfrak{N}_A\subset\mathfrak{p}$ である。$\mathfrak{p}$ は極小であるので、$\mathfrak{N}_A=\mathfrak{p}$ である。 証明終

補題 5.3 $u\in A$ において，次は同値である。ただし、$u\in A$ の $A/\mathfrak{N}_A$ における像を $\bar{u}$ とする。

i) $u \in \mathrm{U}(A)$

ii) $\bar{u} \in \mathrm{U}(A/\mathfrak{N}_A)$

証明 i) $\Rightarrow$ ii) は明らかである。

ii) $\Rightarrow$ i) を示す。$u \notin \mathrm{U}(A)$ を仮定する。このとき、ある A の極大イデアル $\mathfrak{m}$ が存在し、$u \in \mathfrak{m}$ となる。$\bar{\mathfrak{m}}$ を $\mathfrak{m}$ の $A/\mathfrak{N}_A$ への像とすると、対応定理より $\bar{\mathfrak{m}}$ は $A/\mathfrak{N}_A$ の極大イデアルで、$\bar{u} \in \bar{\mathfrak{m}}$ となる。したがって、$\bar{u}$ は $A/\mathfrak{N}_A$ の単元でない。 証明終

この章の目的は、以下の問題が正しいかどうかを見ることである。

問題 5.4 C は、ただ一つの極小素イデアルを持つ環とする。$a, b \in C$ に対して、$(a) = (b) \neq (0)$ のとき、$a = bu$ となる C の単元 u は存在するか。

a がベキ零元の場合とそうでない場合に分けて考察してゆく。

5.1 a がベキ零元でない場合

定理 5.5 C は、ただ一つの極小素イデアルを持つ環とする。$a, b \in C$ は、$(a) = (b)$ をみたし、a がベキ零元でないとする。このとき、ある $u \in \mathrm{U}(C)$ が存在して $a = bu$ をみたす。

証明 仮定より、$a \in (b)$ であるので、ある $u \in C$ が存在し、$a = bu$ となる。すなわち、$\bar{a} = \bar{b}\bar{u}$ となり、$\bar{a}(C/\mathfrak{N}_C) = \bar{b}(C/\mathfrak{N}_C) \neq 0$ となる。補題 5.2 より、$\mathfrak{N}_C$ は素イデアルであるので、$C/\mathfrak{N}_C$ は整域である。したがって、注意 1.2 により $\bar{u} \in \mathrm{U}(C/\mathfrak{N}_C)$ となり、補題 5.3 により $u \in \mathrm{U}(C)$ となる。 証明終

以上より、a がベキ零元でない場合、問題5.4 が成立することが分かった。

5.2 a がベキ零元の場合

C は、体 K を含み、ただ一つの極小素イデアルを持つ環とする。環 C において、$(a) = (b) \neq 0$ と仮定する。このとき、$a = bc, b = ad$ となるような $c, d \in C$ が存在する。すなわち、$a = acd$ となる。

$K[X,Y,Z]$ から C への写像 ξ を

$$\begin{array}{ccc} K[X,Y,Z] & \xrightarrow{\xi} & C \\ \uplus & & \uplus \\ X & \longmapsto & a \\ Y & \longmapsto & c \\ Z & \longmapsto & d \end{array}$$

と定義すると、$a - acd = 0$ であるので、$X - XYZ \in \operatorname{Ker}\xi$ である。さらに、$a \neq 0$ はベキ零元であると仮定すれば、ある $n > 1$ が存在して、$\xi(X^n) = a^n = 0$ となり、$X^n \in \operatorname{Ker}\xi$ となる。すなわち、

$$D_n := K[X,Y,Z]/(X - XYZ, X^n)$$

から C への写像 $\bar{\xi}$ が誘導される。X, Y, Z の D_n への像を x, y, z と表記すると、$x = xyz$ であるので、$xD_n = xyD_n$ となる。したがって、D_n において $x = xyu$ となる $u \in \mathrm{U}(D_n)$ が存在すれば、$\bar{\xi}(u)$ は C の単元であり、$a = ab\bar{\xi}(u)$ であるので、C において問題 5.4 の主張は正しい。したがって、C と a, b が問題 5.4 の反例ならば、$x = xyu$ となる $u \in \mathrm{U}(D_n)$ は存在しないことになる。また、D_n はただ 1 つの極小素イデアルを持つ環である。(対応定理より、$D_n/xD_n \simeq K[X,Y,Z]/(X) \simeq K[Y,Z]$ となる。$K[Y,Z]$ は整域であるので、xD_n は素イデアルで、$xD_n \supset \bigcap_{\mathfrak{p}\in\mathrm{Spec}(D_n)} \mathfrak{p} = \mathfrak{N}_{D_n}$ となる。さらに、x はベキ零元であるので、$xD_n \subset \mathfrak{N}_{D_n}$ になる。よって $\mathfrak{N}_{D_n}$ は素イデアルとなる。補題 5.2 より、D_n はただ 1 つの極小素イデアルを持つ。）すなわち、D_n も問題 5.4 の反例となる。

したがって、問題 5.4 を考えるにあたり、D_n を調べれば十分である。

命題 5.6 $x = xyu$ を満たす D_n の単元 u は存在しない。

証明 ある $v \in K[X,Y,Z]$ が存在し、$xy\bar{v} = x$ かつ $\bar{v} \in \mathrm{U}(D_n)$ を満たすと仮定する。

$K[X,Y,Z]$ から $K[Y,Z]$ への写像 η を、

$$\begin{array}{ccc} K[X,Y,Z] & \xrightarrow{\eta} & K[Y,Z] \\ \uplus & & \uplus \\ X & \longmapsto & 0 \\ Y & \longmapsto & Y \\ Z & \longmapsto & Z \end{array}$$

と定義すると、$(X - XYZ, X^n) \subset \operatorname{Ker}\eta$ となる。よって D_n から $K[Y,Z]$ への写像 $\bar{\eta}$ が誘導される。$\bar{v} \in \mathrm{U}(D_n)$ であるので、$\eta(v) = \bar{\eta}(\bar{v}) \in \mathrm{U}(K[Y,Z])$

となる。すなわち、$\eta(v)$ は定数である。また、$X-XYv \in (X-XYZ, X^n)$ であるので、ある $l, m \in K[X,Y,Z]$ が存在して、

$$X - XYv = (X - XYZ)l + X^n m$$

となり、したがって

$$1 - Yv = (1 - YZ)l + X^{n-1}m$$

となる。$K[Y,Z]$ において、

$$\begin{aligned} \eta(1 - Yv) &= \eta(1 - YZ)\eta(l) \\ 1 - Y\eta(v) &= (1 - YZ)\eta(l) \end{aligned}$$

となる。左辺の Z に関する次数は 0 であるが、右辺の次数は正であるので、矛盾する。 証明終

命題 5.6 より、D_n は問題 5.4 の反例である。したがって、a がベキ零元の場合、必ずしも問題 5.4 が正しいとは限らない。

参考文献

[1] M.F.Atiyah; I.G.MacDonald, *Introduction to Commutative Algebra* (Westview Press, 1969)

[2] 松村英之, 復刊 可換環論 (共立出版, 2000)