

次数 5 のモノミアル曲線の シンボリック・リース環について

海老名智治

1 序

R を正則局所環 (または、体上の多項式環) とし、 P を R の素イデアルとするとき、Cowsik [1] は 1985 年に、 P のシンボリック・リース環

$$R_s(P) = \bigoplus_{n \geq 0} P^{(n)}$$

はネーター環となるかという問題を提起した。 $R_s(P)$ がネーター環であることと、環 R 上有限生成であることは同値である。Cowsik は、アフィン代数曲線は集合論的完全交叉か? という Kronecker の問題に対する新しい手法を与えるために、このような問題を提起したようである。Kronecker の問題は、現在も未解決である。

Roberts [10] は、Cowsik のこの問いに対しての反例を 1985 年に与えた。彼は、永田 [9] による Hilbert の第 14 の問題の反例の環とイデアルを巧妙に変形して、Cowsik の問題の反例を作り上げた。Roberts のこの例は、係数環を完備化すると素イデアルは分解して永田の反例と一致して、そのシンボリック・リース環は有限生成ではないのである。後に Roberts [11] は、Hilbert の第 14 問題と Cowsik の問題の両方に対する別の反例を与えた。彼の新しい反例では、係数環の完備化の後に素イデアルは分解しない。しかし、環は標数 0 の体を含んでいる。同じような環について、標数が正ならばシンボリック・リース環は有限生成であることが証明されている [8]。有限体上では、Cowsik の問題は、未解決である。

このように、Hilbert の第 14 問題と Cowsik の問題には、非常に深い関係がある。

K を体とし、 $\mathfrak{p}_K(a, b, c)$ を K^3 内のスペースモノミアル曲線 (t^a, t^b, t^c) の定義イデアルとする。この時、 $\mathfrak{p}_K(a, b, c)$ は、多項式環 $K[x, y, z]$ の 2 項式からなるイデアルで、高々 3 元で生成される (Herzog [6])。このシンボリック・リース環 $R_s(\mathfrak{p}_K(a, b, c))$

に関して、様々な数学者によって研究が行われている。Huneke [7] は、このシンボリック・リース環がネーター環となるかどうかの判定方法を与えた。シンボリック・リース環がネーター環になるような K, a, b, c の例は多く存在するが、1994 年に後藤-西田-渡辺 [5] によって初めてネーター環でない例が見つかった。彼らは、体 K の標数が 0 であって自然数 n が 4 以上で 3 の倍数ではない場合、シンボリック・リース環 $R_s(\mathfrak{p}_K(7n-3, (5n-2)n, 8n-3))$ はネーター環でないことを証明した。 K の標数が正であるときは $R_s(\mathfrak{p}_K(7n-3, (5n-2)n, 8n-3))$ はネーター環であり、そのことを用いて標数 0 での無限生成性が証明されている。

一方、Cutkosky [2] は、シンボリック・リース環 $R_s(\mathfrak{p}_K(a, b, c))$ に、幾何学的な意味付けを行った。ここでは、 a, b, c は、二つずつが互いに素であると仮定する。 X, Y, Z の次数をそれぞれ a, b, c とし、重み付き射影空間 $\mathbb{P} = \text{Proj}(K[X, Y, Z])$ の点 $V_+(\mathfrak{p}_K(a, b, c))$ でのブローアップを X とする。 E をこのブローアップの例外曲線、 H は $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1)$ の引き戻しとする。このとき、任意の非負整数 r, d に対して、

$$\left[\mathfrak{p}_K(a, b, c)^{(r)} \right]_d = H^0(X, \mathcal{O}_X(dH - rE))$$

という同一視が可能である。このことから、シンボリック・リース環 $R_s(\mathfrak{p}_K(a, b, c))$ が有限生成であることと、 X の Cox 環

$$\text{Cox}(X) = \bigoplus_{d, r \in \mathbb{Z}} H^0(X, \mathcal{O}_X(dH - rE))$$

が有限生成であることは同値であることがわかる。極小モデル理論を用いて、 $-K_X$ が ample であれば、 $\text{Cox}(X)$ は有限生成であることがわかる。このケースでは、更に、 $-K_X$ が big であれば、 $\text{Cox}(X)$ は有限生成であることが Cutkosky [2] によって証明されている。例えば、 $(a+b+c)^2 > abc$ は $(-K_X)^2 > 0$ と同値であるが、このときは $-K_X$ が big であり、従って $R_s(\mathfrak{p}_K(a, b, c))$ が有限生成である。ここで X 上の曲線 C は、 $C^2 < 0$ かつ $C \neq E$ を満たすとき、 C は negative curve であると定義する。 $\text{Cox}(X)$ の有限生成性は、negative curve の存在に深く関わる。もし、negative curve C が存在し、更に $C \cdot D = 0$ を満たす曲線 D が存在すれば、 $R_s(\mathfrak{p}_K(a, b, c))$ は有限生成である [2]。 $\sqrt{abc} \notin \mathbb{Z}$ の場合は逆も言える。体 K の標数が正であれば、negative curve が存在すれば $R_s(\mathfrak{p}_K(a, b, c))$ は有限生成であることは [2] で示されている。

a, b, c は、二つずつが互いに素な自然数とし、 $\min\{a, b, c\} = a$ とする。 $a = 1, 2, 3, 4, 6$ の場合は、 $-K_X$ は常に big になることがわかり、従って $R_s(\mathfrak{p}_K(a, b, c))$ は有限生成である。一方、 $a = 7, 9, 10, 11, 12, \dots$ の場合は、 $\mathfrak{p}_K(a, b, c)$ の生成元の中に negative

curve の方程式があり、かつ $R_s(\mathfrak{p}_K(a, b, c))$ はネーター環でない例 (後藤-西田-渡辺 [5]、Gonzales-Karu [4]、ただし、体 K の標数は 0) がある。ただし、 $a = 9, 10, 11, 12, \dots$ の部分に関しては、相当大きな数までは具体的にチェックできるが、本当に 9 以上のすべての数でそうになっているかは不明である。

$a = 5, 8$ の場合は、 $R_s(\mathfrak{p}_K(a, b, c))$ はネーター環でない例は無く、ネーター環になるという証明もできていない。

次が、この論文の主定理である。

定理 1.1 K は体とする。 a, b, c は 2 つずつが互いに素な自然数であり、 $\min\{a, b, c\} = a = 5$ とする。 $\mathfrak{p}_K(a, b, c)$ は、スペース・モノミアル曲線 (t^a, t^b, t^c) の定義イデアルとする。今、 $\mathfrak{p}_K(a, b, c)$ の生成元の中に、negative curve の方程式があると仮定する。この時、シンボリック・リース環 $R_s(\mathfrak{p}_K(a, b, c))$ はネーター環である。

$a = 8$ のケースで同様なことを、内澤京也君が証明している。

K の標数が正であって、 $R_s(\mathfrak{p}_K(a, b, c))$ はネーター環でない例は見つかっていない。また、どの標数でも negative curve がない例は、 $(a, b, c) = (1, 1, 1)$ 以外には見つかっていない。Cutkosky-蔵野 [3] で議論されているが、この環のネーター性は、永田予想や Seshadri 定数の有理性と関連しており、非常に重要な問題であるといえる。

2 準備

K を体とする。 a, b, c は、二つずつが互いに素な自然数とする。環準同形

$$\phi: K[X, Y, Z] \longrightarrow K[T]$$

を $\phi(X) = T^a$, $\phi(Y) = T^b$, $\phi(Z) = T^c$ によって定め、 $\mathfrak{p}_K(a, b, c) := \text{Ker } \phi$ とする。 $S = K[X, Y, Z]$ において X, Y, Z の次数をそれぞれ a, b, c とし、 T の次数を 1 とすれば、 ϕ は次数付き環の準同型である。

ここで、

- $\mathbb{N}a \cap (\mathbb{N}_0b + \mathbb{N}_0c)$ の最小元を $sa = t_1b + u_1c$ ($s \in \mathbb{N}$, $t_1, u_1 \in \mathbb{N}_0$)
- $\mathbb{N}b \cap (\mathbb{N}_0a + \mathbb{N}_0c)$ の最小元を $tb = s_2a + u_2c$ ($t \in \mathbb{N}$, $s_2, u_2 \in \mathbb{N}_0$)
- $\mathbb{N}c \cap (\mathbb{N}_0a + \mathbb{N}_0b)$ の最小元を $uc = s_3a + t_3b$ ($u \in \mathbb{N}$, $s_3, t_3 \in \mathbb{N}_0$)

と、 $s, t, u, s_2, s_3, t_1, t_3, u_1, u_2$ を定める。ただし、 $\mathbb{N}, \mathbb{N}_0$ はそれぞれ自然数全体、非負整数全体の集合とする。

混乱の恐れがないときは、 $\mathfrak{p}_K(a, b, c)$ を単に $\mathfrak{p}$ と書く。このとき、次が知られている。

定理 2.1 (Herzog [6]) 1. イデアル $p_K(a, b, c)$ の極小生成系の元数 $\mu(\mathfrak{p}_K(a, b, c))$ は 2 または 3 である。

2. 次は同値である。

$$(1) \quad \mu(\mathfrak{p}_K(a, b, c)) = 3$$

$$(2) \quad s, t, u \geq 2 \text{ かつ } t_1, u_1, s_2, u_2, s_3, t_3 \geq 1$$

3. $\mu(\mathfrak{p}_K(a, b, c)) = 3$ とする。このとき、 $t_1, u_1, s_2, u_2, s_3, t_3$ は一意的に決まり、 $s = s_2 + s_3, t = t_1 + t_3, u = u_1 + u_2$ が成立する。また、 $f := X^s - Y^{t_1}Z^{u_1}, g := Y^t - X^{s_2}Z^{u_2}, h := Z^u - X^{s_3}Y^{t_3}$ としたとき、 $\mathfrak{p}_K(a, b, c) = (f, g, h)$ となる。

注意 2.2 $\mu(\mathfrak{p}_K(a, b, c)) = 3$ のとき、 $\mathfrak{p}_K(a, b, c)$ の 3 つの生成元 f, g, h は既約であることが容易に分かる。

一般に、可換環 R と素イデアル P に対して、

$$P^{(n)} = P^n R_P \cap R$$

を n 次のシンボリック冪という。 $P^{(n)}$ は P^n を含むイデアルであり、

- $R \supset P = P^{(1)} \supset P^{(2)} \supset P^{(3)} \supset \dots$
- $P^{(n)}P^{(m)} \subset P^{(n+m)}$

が成立する。ここで、

$$R_s(P) = R[Pt, P^{(2)}t^2, P^{(3)}t^3, \dots] \subset R[t]$$

を P のシンボリック・リース環という。 R がネーター環であれば、 $R_s(P)$ がネーター環であることと、 $R_s(P)$ は環 R 上有限生成であることは同値である。

$P = \mathfrak{p}_K(3, 4, 5)$ のとき、 $P^2 \neq P^{(2)}$ である。実際、このケースでは、 P^2 の生成元は $f^2, g^2, h^2, fg, gh, hf$ であり、次数が最小なものは g^2 であって、これは次数 16 である。しかし、

$$gh - f^2 = -XZ^3 - X^2Y^3 + 3X^3YZ - X^6$$

であることから、 $(gh - f^2)/X$ は次数 15 の $P^{(2)}$ の元である。

問題 2.3 $R_s(\mathfrak{p}_K(a, b, c))$ は、いつネーター環になるか？

注意 2.4 $\mu(\mathfrak{p}) = 2$ ならば、 $\mathfrak{p}$ は完全交叉であり、任意の n に対して $\mathfrak{p}^{(n)} = \mathfrak{p}^n$ が成立する。よって、 $R_s(\mathfrak{p}) = S[\mathfrak{p}t] \subset S[t]$ が成立する。ゆえに、 $R_s(\mathfrak{p})$ はネーター環である。

上の注意により、 $R_s(\mathfrak{p}_K(a, b, c))$ がネーター環かどうかを考えると、 $\mu(\mathfrak{p}_K(a, b, c)) = 3$ である場合を考えれば十分である。

定義 2.5 0 でない次数 d の $\mathfrak{p}^{(r)}$ の斉次元が存在し、更に $a + b + c > \frac{d}{r}$ が成り立っているとき、 $-K$ は big であるという。

定理 2.6 (Cutkosky [2]) $-K$ が big であるならば、 $R_s(\mathfrak{p}_K(a, b, c))$ はネーター環である。

次に、negative curve を定義する。

定義 2.7 $\frac{d}{r} < \sqrt{abc}$ を満たす自然数 r, d と、 $\mathfrak{p}^{(r)}$ の中に 0 でない d 次の既約斉次式 q が存在するとき、 q は negative curve という。

negative curve が存在すると仮定すれば、この時 r と d は一意的に定まり、 q についても $K^\times$ 倍を除いて一意的に定まることが知られている。

このとき、論文 [2] の議論によって、次が証明できる。

定理 2.8 $\sqrt{abc} \notin \mathbb{Z}$ と仮定する。 $R_s(\mathfrak{p})$ がネーター環である時、negative curve が存在する。

定理 2.9 (Cutkosky [3]) K の標数が正で negative curve が存在するならば、 $R_s(\mathfrak{p}_K(a, b, c))$ はネーター環である。

K の標数が 0 の場合は、negative curve が存在して、かつ $R_s(\mathfrak{p}_K(a, b, c))$ はネーター環でない例がある (後藤-西田-渡辺 [5]、González-Karu [4])。

$(a, b, c) = (1, 1, 1)$ 以外では、(どの標数でも) negative curve が存在しない例は見つからない。

注意 2.10 注意 2.2 と negative curve の一意性により、次のことがわかる。 $\mu(\mathfrak{p}) = 3$ である場合、 $\deg f, \deg g, \deg h$ の中に、 $\sqrt{abc}$ 未満であるものは、存在していても高々 1 つである。

次のことが、González-Karu [4] の議論から証明できる。

定理 2.11 K は標数 0 の体であるとする。 $\mu(\mathfrak{p}) = 3$ とし、更に h は negative curve であると仮定する。

自然数 r に対して Δ_r を、次の 3 つの直線

$$\begin{aligned} y &= -\frac{s_2}{s_3}x, \\ y &= \frac{u_2}{u_1 + u_2}x, \\ y &= \frac{t_1 + t_3}{t_3}x + \left(\frac{u_2}{u_1 + u_2} - \frac{t_1 + t_3}{t_3} \right) r \end{aligned}$$

で囲まれる境界を含む領域とする。このとき、以下の 3 つの条件が同値である。

- (1) $R_s(\mathfrak{p}_K(a, b, c))$ はネーター環である。
- (2) 以下の条件を満たす自然数 r が存在する。
 - (i) r は u の倍数である。
 - (ii) X または Y の冪の係数が 0 ではないような元が $[\mathfrak{p}^{(r)}]_{\frac{abr}{u}}$ に存在する。(実はこの元の X の冪の係数も Y の冪の係数も 0 ではないことが示される。)
- (3) 以下の条件を満たす自然数 r と $\delta = \sum_{(\alpha, \beta) \in \Delta_r \cap \mathbb{Z}^2} C_{(\alpha, \beta)} \xi^\alpha \eta^\beta$ ($C_{(\alpha, \beta)} \in K$) が存在する。
 - (i) r は u の倍数である。
 - (ii) $\left(\frac{\partial^{i+j}}{\partial^i \xi \partial^j \eta} \delta \right) (1, 1) = 0$ が、 $i + j < r$ である任意の i, j について成立する。
 - (iii) $C_{(0,0)} \neq 0$ または $C_{(r, \frac{ru_2}{u_1+u_2})} \neq 0$ である。(実は、この条件を満たす δ は $C_{(0,0)} \neq 0$ かつ $C_{(r, \frac{ru_2}{u_1+u_2})} \neq 0$ を満たす。)

よって、条件 (3) の判定を行うことにより、 $R_s(\mathfrak{p}_K(a, b, c))$ がネーター環であるかどうかを調べることができる。

González-Karu は、この手法によって、次のような $R_s(\mathfrak{p}_K(a, b, c))$ がネーター環でないための十分条件を発見した。

定理 2.12 (González-Karu [4]) K は標数 0 の体であるとする。 $\mu(\mathfrak{p}) = 3$ とし、更に h は negative curve であると仮定する。

ここで、 $n := \lfloor \frac{s_2}{s_3} \rfloor + 1$ とおく。

更に次の 2 つの条件を満たせば、 $R_s(\mathfrak{p})$ はネーター環でない。

- (1) $(n-1) \left[\frac{u_2}{u}, \frac{t}{t_3} \right]$ に含まれる整数は n 個以下である。
- (2) $\frac{nu_2}{u} \notin \mathbb{Z}$

$\min\{a, b, c\} = 7, 9, 10, 11, \dots$ の場合には、この定理を満たすような a, b, c の組が存在

するため、 $R_s(\mathbf{p})$ がネーター環ではないような例を与えることができる。ただし、 $a \geq 9$ のすべての a に対してこうできるかは、数学的な証明はないが、コンピューター計算によると、かなり大きな数までは可能な様である。

次章では、ある特殊な場合に $R_s(\mathbf{p})$ がネーター環になることを示すために、定理 2.11 を用いる。以下では、定理 2.11 の条件 (3) をチェックするための補題を準備しておく。

補題 2.13 K は標数 0 の体とする。 n は自然数であり、 $S \subset \mathbb{Z}^2$ は以下の条件を満たすとする。

- $\#S = \frac{n(n+1)}{2}$
- $S_w = S \cap \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2 \mid x = w\}$ とおく。この時、 $\#S_{w_i} = i$ を満たすような $\{w_1, w_2, \dots, w_n\} \subset \mathbb{Z}$ が存在する。

ここで、

$$\delta(\xi, \eta) = \sum_{(\alpha, \beta) \in S} C_{(\alpha, \beta)} \xi^\alpha \eta^\beta \quad (C_{(\alpha, \beta)} \in K)$$

とおく。この時、 $0 \leq i + j < n$ を満たす i, j に対して常に

$$\frac{\partial^{i+j}}{\partial^i \xi \partial^j \eta} \delta(1, 1) = 0 \quad (\#)$$

ならば、 $\delta(\xi, \eta) = 0$ である。

証明 まず、 $S = S_{w_1} \amalg S_{w_2} \amalg \dots \amalg S_{w_n}$ に注意する。

n に関する数学的帰納法を用いて証明する。

$n = 1$ である場合は明らかである。

$n = k$ で命題が成立していることを仮定して、 $n = k+1$ の場合を考える。まず、 $\delta(\xi, \eta)$ が条件 (#) を満たしているという仮定より、 $\xi^{-w_{k+1}} \delta(\xi, \eta)$ も条件 (#) を満たしていることが簡単に証明できる。 $\delta(\xi, \eta) = 0$ であることと、 $\xi^{-w_{k+1}} \delta(\xi, \eta) = 0$ であることは同値である。よって、 $\delta(\xi, \eta)$ の代わりに $\xi^{-w_{k+1}} \delta(\xi, \eta)$ を考えれば、最初から $w_{k+1} = 0$ としてよい。

δ を ξ について 1 回偏微分した式を $\delta'(\xi, \eta)$ とおく。 δ' は、 $n = k$ として補題の条件をすべて満たしている。よって、帰納法の仮定から $\delta' = 0$ である。このことから、 $(\alpha, \beta) \in S$ について、 $\alpha \neq 0$ ならば $C_{(\alpha, \beta)} = 0$ であることがわかった。

$S_0 = \{(\alpha, \beta) \in S \mid \alpha = 0\} = \{(0, \beta_1), (0, \beta_2), \dots, (0, \beta_{k+1})\}$ とおく。このとき、

$$\delta(\xi, \eta) = \sum_{j=1}^{k+1} C_{(0, \beta_j)} \eta^{\beta_j}$$

である。条件 (#) により、

$$\frac{\partial}{\partial^q \eta} \delta(1, 1) = \sum_{j=1}^{k+1} \beta_j (\beta_j - 1) \cdots (\beta_j - q + 1) C_{(0, \beta_j)} = 0 \quad (q = 0, 1, 2, \dots, k)$$

が成立している。この $C_{(0, \beta_1)}, C_{(0, \beta_2)}, \dots, C_{(0, \beta_{k+1})}$ に関する連立方程式を変形すると、

$$\sum_{j=1}^{k+1} \beta_j^q C_{(0, \beta_j)} = 0 \quad (q = 0, 1, 2, \dots, k)$$

とできる。行列の形に書くと、係数行列はファンデルモンド型の正方行列であるため、行列式は 0 ではない。よってこの連立方程式から、 $C_{(0, \beta_1)} = C_{(0, \beta_2)} = \cdots = C_{(0, \beta_{k+1})} = 0$ が得られる。よって、 $n = k + 1$ の場合についても命題が成立することが示された。

証明終

系 2.14 S は補題 2.13 で定義した集合とする。 S に含まれない $\mathbb{Z}^2$ の元 (α', β') をとる。

$$\mathbb{Z}^2 \supset U \supset S \cup \{(\alpha', \beta')\}$$

とする。

このとき、

$$\delta(\xi, \eta) = \sum_{(\alpha, \beta) \in U} C_{(\alpha, \beta)} \xi^\alpha \eta^\beta$$

で、 $0 \leq i + j < n$ を満たす i, j に対して常に

$$\frac{\partial^{i+j}}{\partial^i \xi \partial^j \eta} \delta(1, 1) = 0 \tag{$}$$

であり、かつ $C_{(\alpha', \beta')} \neq 0$ を満たす $\delta(\xi, \eta)$ が存在する。

証明 必要ならば U を小さく取り直して、 $U = S \cup \{(\alpha', \beta')\}$ としてよい。

$\#U = \frac{n(n+1)}{2} + 1$ であり、(\$) が定める連立方程式は $\frac{n(n+1)}{2}$ 個である。よって、連立方程式 (\$) の解 $\delta(\xi, \eta) \neq 0$ は存在する。

ここで、 $C_{(\alpha', \beta')} = 0$ を仮定すると、補題 2.13 によって、連立方程式 (\$) を満たす $\delta(\xi, \eta)$ は $\delta(\xi, \eta) = 0$ のみである。よって、 $C_{(\alpha', \beta')} \neq 0$ を満たす連立方程式 (\$) の解 $\delta(\xi, \eta)$ は存在する。

証明終

3 主定理の証明

以下、この節では、 $a = 5$ であり、 a, b, c は互いに素とする。

3.1 $b \equiv c \pmod{5}$ の場合

$b \geq c$ ならば、 $b = 5n + c$ ($n \in \mathbb{N}_0$) と書けるので $t = 1$ となり、 $\mu(\mathfrak{p}) = 2$ である。
 $b < c$ ならば、 $c = 5n + b$ ($n \in \mathbb{N}$) と書けるので $u = 1$ となり、 $\mu(\mathfrak{p}) = 2$ である。

よって、注意 2.4 により、このケースでは $R_s(\mathfrak{p})$ は Noether である。

3.2 $b \equiv 2c \pmod{5}$ の場合

この場合、 $c \equiv 3b \pmod{5}$ に注意。

補題 3.1 a, b, c は 2 つずつが互いに素で、 $a = 5$ とする。更に、 $b \equiv 2c \pmod{5}$ とする。
このとき、次は同値。

- (1) $\frac{b}{2} < c < 3b$
- (2) $\mu(\mathfrak{p}) = 3$

証明 $3b \leq c$ ならば $c = 5n + 3b$ ($n \in \mathbb{N}_0$) と書けるので $u = 1$ となり、 $\mu(\mathfrak{p}) = 2$ である。
 $2c \leq b$ ならば $b = 5n + 2c$ ($n \in \mathbb{N}_0$) と書けるので $t = 1$ となり、 $\mu(\mathfrak{p}) = 2$ である。
よって、(2) $\Rightarrow$ (1) が示された。

(1) $\Rightarrow$ (2) を示す。 $b/2 < c < 3b$ と仮定する。 $c < 3b$ より $3b = 5n + c$ ($n \in \mathbb{N}$) と書けるので、 $\deg g \leq 3b$ となる。 $b < 2c$ より $2c = 5n + b$ ($n \in \mathbb{N}$) と書けるので、 $\deg h \leq 2c$ となる。

$\deg g = b$ なら $b = 5n + 2c$ ($n \in \mathbb{N}_0$) なので、 $2c \leq b$ となり仮定に矛盾。 $\deg g = 2b$ なら $2b = 5n + 4c$ ($n \in \mathbb{N}_0$) なので、 $2c \leq b$ となり仮定に矛盾。よって、 $\deg g = 3b$ である。
 $\deg h = c$ なら $c = 5n + 3b$ ($n \in \mathbb{N}_0$) なので、 $3b \leq c$ となり仮定に矛盾。よって、 $\deg h = 2c$ である。

$\deg g = 3b, \deg h = 2c$ より、 $t = 3, u = 2$ であり、仮定より $u_2 = 1, s_2 \geq 1, t_3 = 1, s_3 \geq 1$ である。

$s = 1$ かつ $t_1 \geq 1$ なら、 $b < 5$ であり、 $b/2 < c < 3b$ かつ $c \equiv 3b \pmod{5}$ なので、

- $b = 1$ のとき、 $\frac{1}{2} < c < 3$ より矛盾。

- $b = 2$ のとき、 $1 < c < 6$ より矛盾。
- $b = 3$ のとき、 $\frac{3}{2} < c < 9$ より $c = 4$ となり、 $s = 1$ に矛盾。
- $b = 4$ のとき、 $2 < c < 12$ より $c = 7$ となり、 $s = 1$ に矛盾。

$s = 1$ かつ $u_1 \geq 1$ なら、 $c < 5$ であり、 $c/3 < b < 2c$ かつ $b \equiv 2c \pmod{5}$ なので、

- $c = 1$ のとき、 $\frac{1}{3} < b < 2$ より矛盾。
- $c = 2$ のとき、 $\frac{2}{3} < b < 4$ より矛盾。
- $c = 3$ のとき、 $1 < b < 6$ より矛盾。
- $c = 4$ のとき、 $\frac{4}{3} < b < 8$ より $b = 3$ となり、 $s = 1$ に矛盾。

よって、 $s \geq 2$ である。 $t_1 = 0$ と仮定すると、 $(5, c) = 1$ より $s = c$, $u_1 = 5$ なので、 $5c \leq b + 3c$ であるから $2c \leq b$ となり仮定に矛盾。よって、 $t_1 \geq 1$ である。 $u_1 = 0$ と仮定すると、 $(5, b) = 1$ より $s = b$, $t_1 = 5$ なので、 $5b \leq 2b + c$ であるから $3b \leq c$ となり仮定に矛盾。よって、 $u_1 \geq 1$ である。従って、 $\mu(\mathbf{p}) = 3$ となる。 **証明終**

f が negative curve ならば、 $t_1 b + u_1 c < \sqrt{abc}$ より、

$$\begin{aligned} 0 &> (t_1 b + u_1 c)^2 - 5bc \\ &= t_1^2 b^2 + (2t_1 u_1 - 5)bc + u_1^2 c^2 \\ &= t_1^2 \left(b + \frac{2t_1 u_1 - 5}{2t_1^2} \cdot c \right)^2 + \frac{c^2}{4t_1^2} \left\{ 4t_1^2 u_1^2 - (2t_1 u_1 - 5)^2 \right\} \end{aligned}$$

なので、

$$0 > 4t_1^2 u_1^2 - (2t_1 u_1 - 5)^2 = 5(4t_1 u_1 - 5)$$

であるから、

$$t_1 u_1 < \frac{5}{4}$$

となる。 $t_1 u_1 = 1$ なら $5n = b + c$ ($n \in \mathbb{N}$) となり b, c の仮定に矛盾。 $t_1 u_1 = 0$ なら $\mu(\mathbf{p}) = 2$ である。つまり、このケースでは、 $\mu(\mathbf{p}) = 3$ の場合は f が negative curve にならない。

以下、 g が negative curve または h が negative curve と仮定する。

g が negative curve のとき、 $3b < \sqrt{abc}$ なので、

$$c > \frac{9}{5}b$$

であり、

$$\begin{aligned} -K \text{ が big でない} &\iff a + b + c \leq 3b \\ &\iff c \leq 2b - 5 \end{aligned}$$

となる。

h が negative curve のとき、 $2c < \sqrt{abc}$ なので、

$$c < \frac{5}{4}b \quad (*)$$

であり、

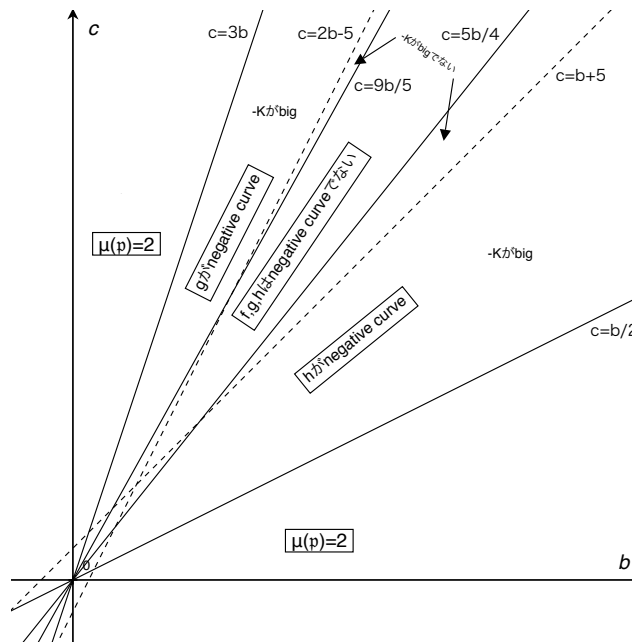
$$\begin{aligned} -K \text{ が big でない} &\iff a + b + c \leq 2c \\ &\iff c \geq b + 5 \end{aligned}$$

となる。

よって、図のようになる。 $\mu(p) = 3$ の領域は点線を境にして、 $-K$ が big である領域と $-K$ が big でない領域が分かれている。また、

- g が negative curve
- f, g, h は negative curve でない
- h が negative curve

の 3 つに分かれている。



g が negative curve の場合は b と c を入れ替えれば $b \equiv 3c \pmod{5}$ で h が negative curve の場合になる。

ここでは、 h が negative curve の場合について考える。

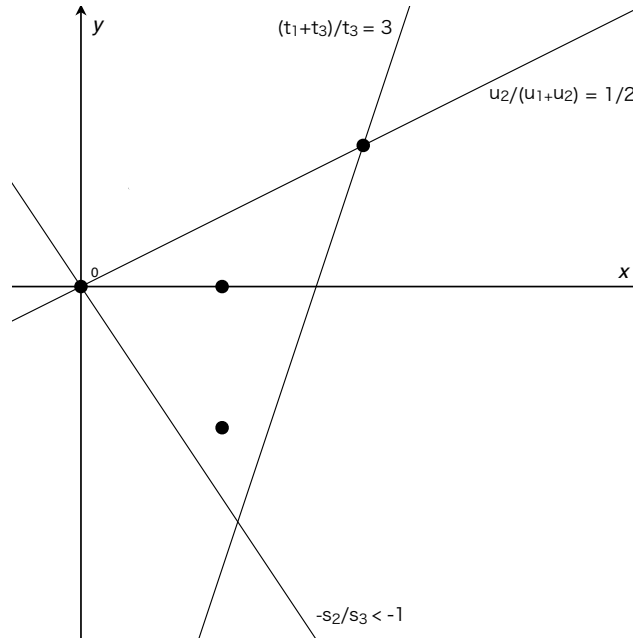
$\deg g = 3b = 5s_2 + c$, $\deg h = 2c = 5s_3 + b$ であり、(*) より $c < 5b/4$ なので、

$$\begin{aligned} s_2 - s_3 &= \frac{1}{5}(3b - c) - \frac{1}{5}(2c - b) \\ &= \frac{3}{5} \left(\frac{4}{3}b - c \right) \\ &> \frac{3}{5} \left(\frac{5}{4}b - c \right) \\ &> 0 \end{aligned}$$

となるので、

$$-\frac{s_2}{s_3} < -1$$

である。 $(t_1 + t_3)/t_3 = 3$, $u_2/(u_1 + u_2) = 1/2$ なので、 Δ_2 は図のようになる。



$(\alpha', \beta') = (0, 0)$ において系 2.13 を用いることにより、定理 2.11 を使って、このケースでは $R_s(\mathfrak{p})$ は Noether であることがわかる。

3.3 $b \equiv 3c \pmod{5}$ の場合

この場合、 $c \equiv 2b \pmod{5}$ に注意。

補題 3.2 a, b, c は 2 つずつが互いに素で、 $a = 5$ とする。更に、 $b \equiv 3c \pmod{5}$ と仮定する。このとき、次は同値。

- (1) $\frac{b}{3} < c < 2b$
- (2) $\mu(\mathfrak{p}) = 3$

証明 $2b \leq c$ ならば $c = 5n + 2b$ ($n \in \mathbb{N}_0$) と書けるので $u = 1$ となり、 $\mu(\mathfrak{p}) = 2$ である。 $3c \leq b$ ならば $b = 5n + 3c$ ($n \in \mathbb{N}_0$) と書けるので $t = 1$ となり、 $\mu(\mathfrak{p}) = 2$ である。よって、(2) $\Rightarrow$ (1) が示された。

(1) $\Rightarrow$ (2) を示す。 $b/3 < c < 2b$ と仮定する。 $c < 2b$ より $2b = 5n + c$ ($n \in \mathbb{N}$) と書けるので、 $\deg g \leq 2b$ となる。 $b < 3c$ より $3c = 5n + b$ ($n \in \mathbb{N}$) と書けるので、 $\deg h \leq 3c$ となる。

$\deg g = b$ なら $b = 5n + 3c$ ($n \in \mathbb{N}_0$) なので、 $3c \leq b$ となり仮定に矛盾。よって、 $\deg g = 2b$ である。 $\deg h = c$ なら $c = 5n + 2b$ ($n \in \mathbb{N}_0$) なので、 $2b \leq c$ となり仮定に矛盾。 $\deg h = 2c$ なら $2c = 5n + 4b$ ($n \in \mathbb{N}_0$) なので、 $2b \leq c$ となり仮定に矛盾。よって、 $\deg h = 3c$ である。

$\deg g = 2b$, $\deg h = 3c$ より、 $t = 2$, $u = 3$ であり、仮定より $u_2 = 1$, $s_2 \geq 1$, $t_3 = 1$, $s_3 \geq 1$ である。

$s = 1$ かつ $t_1 \geq 1$ なら、 $b < 5$ であり、

- $b = 1$ のとき、 $\frac{1}{3} < c < 2$ より矛盾。
- $b = 2$ のとき、 $\frac{2}{3} < c < 4$ より矛盾。
- $b = 3$ のとき、 $1 < c < 6$ より矛盾。
- $b = 4$ のとき、 $\frac{4}{3} < c < 8$ より $c = 3$ となり、 $s = 1$ に矛盾。

$s = 1$ かつ $u_1 \geq 1$ なら、 $c < 5$ であり、 $c/2 < b < 3c$ なので、

- $c = 1$ のとき、 $\frac{1}{2} < b < 3$ より矛盾。
- $c = 2$ のとき、 $1 < b < 6$ より矛盾。
- $c = 3$ のとき、 $\frac{3}{2} < b < 9$ より $b = 4$ となり、 $s = 1$ に矛盾。
- $c = 4$ のとき、 $2 < b < 12$ より $b = 7$ となり、 $s = 1$ に矛盾。

よって、 $s \geq 2$ である。 $t_1 = 0$ と仮定すると、 $(5, c) = 1$ より $s = c$, $u_1 = 5$ なので、 $5c \leq b + 2c$ であるから $3c \leq b$ となり仮定に矛盾。よって、 $t_1 \geq 1$ である。 $u_1 = 0$ と仮定すると、 $(5, b) = 1$ より $s = b$, $t_1 = 5$ なので、 $5b \leq 3b + c$ であるから $2b \leq c$ となり仮定に矛盾。よって、 $u_1 \geq 1$ である。従って、 $\mu(\mathfrak{p}) = 3$ となる。 **証明終**

f が negative curve とすると、 $b \equiv 2c \pmod{5}$ の場合と同様に $t_1 u_1 < 5/4$ となり、 $t_1 u_1 = 1$ なら $5n = b + c$ ($n \in \mathbb{N}$) となり b, c の仮定に矛盾。 $t_1 u_1 = 0$ なら $\mu(\mathfrak{p}) = 2$ である。つまり、このケースでは、 $\mu(\mathfrak{p}) = 3$ の場合は f が negative curve にならない。

以下、 g が negative curve または h が negative curve とする。

g が negative curve のとき、 $2b < \sqrt{abc}$ なので、

$$c > \frac{4}{5}b$$

であり、

$$\begin{aligned} -K \text{ が big でない} &\iff a + b + c \leq 2b \\ &\iff c \leq b - 5 \end{aligned}$$

となる。

h が negative curve のとき、 $3c < \sqrt{abc}$ なので、

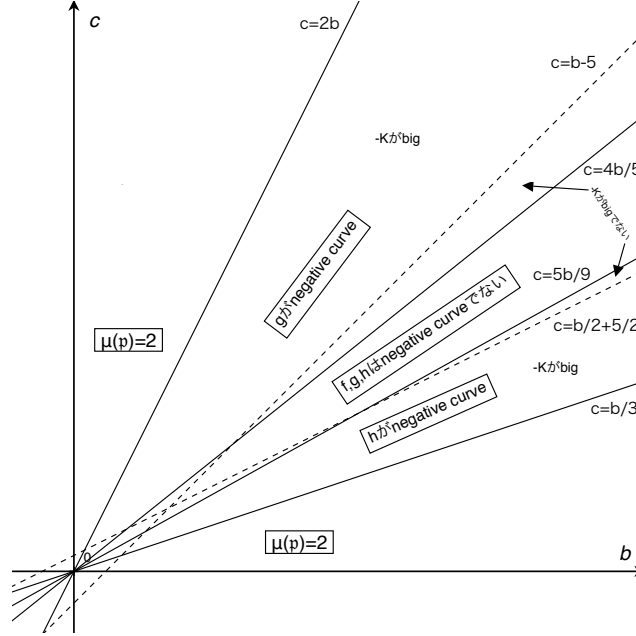
$$c < \frac{5}{9}b \tag{**}$$

であり、

$$\begin{aligned} -K \text{ が big でない} &\iff a + b + c \leq 3c \\ &\iff c \geq \frac{1}{2}b + \frac{5}{2} \end{aligned}$$

となる。

よって、図のようになる。これは、 $b \equiv 2c \pmod{5}$ の場合の図を $b = c$ に関して反転させた形になる。



g が negative curve の場合は b と c を入れ替えれば $b \equiv 2c \pmod{5}$ で h が negative curve の場合になる。

ここでは、 h が negative curve の場合について考える。

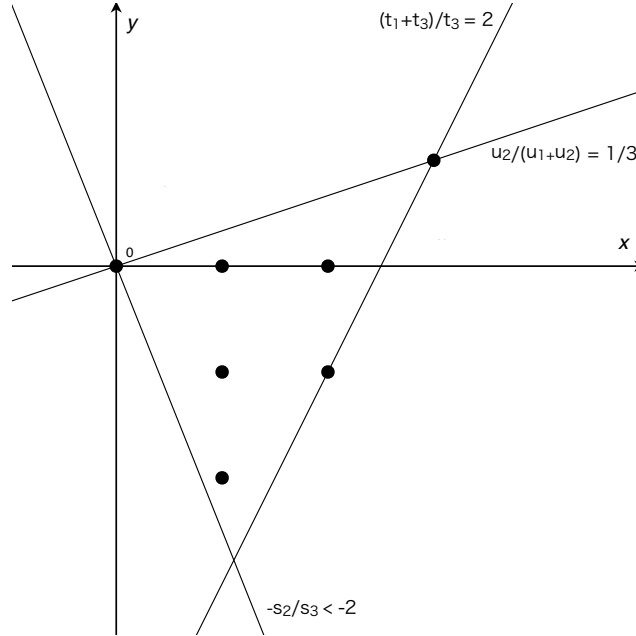
$2b = 5s_2 + c$, $3c = 5s_3 + b$ であり、(**) より $c < 5b/9$ なので、

$$\begin{aligned} s_2 - 2s_3 &= \frac{1}{5}(2b - c) - \frac{2}{5}(3c - b) \\ &= \frac{7}{5} \left(\frac{4}{7}b - c \right) \\ &> \frac{7}{5} \left(\frac{5}{9}b - c \right) \\ &> 0 \end{aligned}$$

となるので、

$$-\frac{s_2}{s_3} < -2$$

である。 $(t_1 + t_3)/t_3 = 2$, $u_2/(u_1 + u_2) = 1/3$ なので、 Δ_3 は図のようになる。



$(\alpha', \beta') = (0, 0)$ において系 2.13 を用いることにより、定理 2.11 を使って、このケースでは $R_s(\mathfrak{p})$ は Noether であることがわかる。

3.4 $b \equiv 4c \pmod{5}$ の場合

この場合、 $c \equiv 4b \pmod{5}$ に注意。

補題 3.3 a, b, c は 2 つずつが互いに素で、 $a = 5$ とする。更に、 $b \equiv 4c \pmod{5}$ で、 $b, c > 5$ とする。このとき、次は同値。

- (1) $\frac{b}{4} < c < 4b$
- (2) $\mu(\mathfrak{p}) = 3$

証明 $4b \leq c$ ならば $c = 5n + 4b$ ($n \in \mathbb{N}_0$) と書けるので $u = 1$ となり、 $\mu(\mathfrak{p}) = 2$ である。 $4c \leq b$ ならば $b = 5n + 4c$ ($n \in \mathbb{N}_0$) と書けるので $t = 1$ となり、 $\mu(\mathfrak{p}) = 2$ である。よって、(2) $\Rightarrow$ (1) が示された。

(1) $\Rightarrow$ (2) を示す。 $b/4 < c < 4b$ と仮定する。 $c < 4b$ より $4b = 5n + c$ ($n \in \mathbb{N}$) と書けるので、 $\deg g \leq 4b$ となる。 $b < 4c$ より $4c = 5n + b$ ($n \in \mathbb{N}$) と書けるので、 $\deg h \leq 4c$ となる。よって、 $t \leq 4, u \leq 4$ である。

$\deg g = b$ なら $b = 5n + 4c$ ($n \in \mathbb{N}_0$) なので、 $4c \leq b$ となり仮定に矛盾。よって、 $2b \leq \deg g \leq 4b$ である。 $\deg h = c$ なら $c = 5n + 4b$ ($n \in \mathbb{N}_0$) なので、 $4b \leq c$ となり仮定に矛盾。よって、 $2c \leq \deg h \leq 4c$ である。

- $\deg g \geq 2b, \deg h \geq 2c$ より、 $t \geq 2, u \geq 2$ である。
- $s = 1$ と仮定すると、 $b \leq 5$ または $c \leq 5$ となり仮定に矛盾。よって、 $s \geq 2$ である。
- $t_1 = 0$ と仮定すると、 $(a, c) = 1$ より $s = c$ であるから、 $5c \leq b + c$ なので $4c \leq b$ となり仮定に矛盾。よって、 $t_1 \geq 1$ である。
- $u_1 = 0$ と仮定すると、 $(a, b) = 1$ より $s = b$ であるから、 $5b \leq b + c$ なので $4b \leq c$ となり仮定に矛盾。よって、 $u_1 \geq 1$ である。
- $s_2 = 0$ と仮定すると、 $(b, c) = 1$ より $t = c, u_2 = b$ なので、 $c \leq 5$ となり仮定に矛盾。よって、 $s_2 \geq 1$ である。
- $s_3 = 0$ と仮定すると、 $(b, c) = 1$ より $u = b, t_3 = c$ なので、 $b \leq 5$ となり仮定に矛盾。よって、 $s_3 \geq 1$ である。
- $u_2 = 0$ と仮定すると、 $(a, b) = 1$ より $t = 5$ であるから、 $t \leq 4$ に矛盾。よって、 $u_2 \geq 1$ である。
- $t_3 = 0$ と仮定すると、 $(a, c) = 1$ より $u = 5$ であるから、 $u \leq 4$ に矛盾。よって、 $t_3 \geq 1$ である。

従って、 $\mu(\mathfrak{p}) = 3$ となる。

証明終

以下、 $\mu(\mathfrak{p}) = 3$ と仮定する。

$b + c \equiv 0 \pmod{5}$ なので、次の 3 通りが考えられる。

$$\begin{cases} sa = b + c \\ 4b = s_2a + c \\ 2c = s_3a + 3b \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} sa = b + c \\ 3b = s_2a + 2c \\ 3c = s_3a + 2b \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} sa = b + c \\ 2b = s_2a + 3c \\ 4c = s_3a + b \end{cases} \quad (3)$$

(1) のとき、 $3b/2 < c < 4b$ であり、

- g が negative curve なら、 $4b < \sqrt{abc}$ より $\frac{16}{5}b < c < 4b$ となる。
- h が negative curve なら、 $2c < \sqrt{abc}$ より $c < \frac{5}{4}b$ となり仮定に矛盾。

(2) のとき、 $2b/3 < c < 3b/2$ であり、

- g が negative curve なら、 $3b < \sqrt{abc}$ より $c > \frac{9}{5}b$ となり仮定に矛盾
- h が negative curve なら、 $3c < \sqrt{abc}$ より $c < \frac{5}{9}b$ となり仮定に矛盾。

(3) のとき、 $b/4 < c < 2b/3$ であり、

- g が negative curve なら、 $2b < \sqrt{abc}$ より $c > \frac{4}{5}b$ となり仮定に矛盾。
- h が negative curve なら、 $4c < \sqrt{abc}$ より $b/4 < c < \frac{5}{16}b$ となる。 (***)

(1), (2), (3) で f が negative curve なら、 $b + c = sa < \sqrt{abc}$ より、

$$0 > b^2 - 3bc + c^2$$

なので、

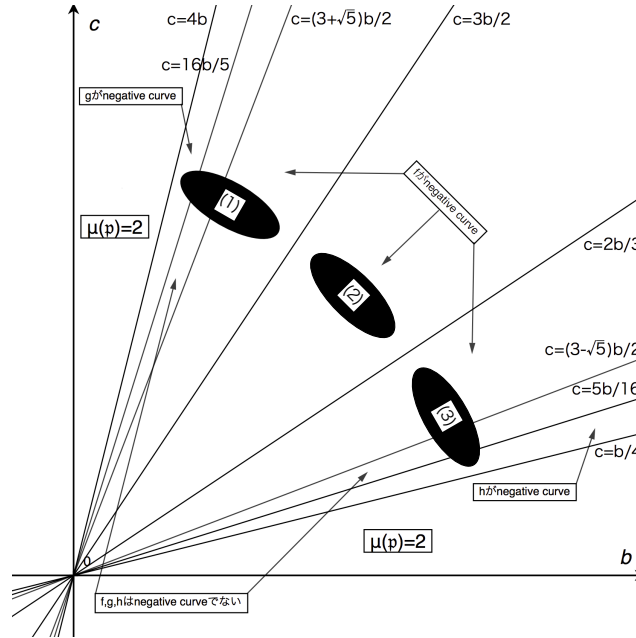
$$0 > \left(c - \frac{3 + \sqrt{5}}{2}b\right) \left(c - \frac{3 - \sqrt{5}}{2}b\right)$$

であるから、

$$\frac{3 - \sqrt{5}}{2}b < c < \frac{3 + \sqrt{5}}{2}b$$

となる。

よって、図のようになる。このケースでは、 f, g, h が negative curve である領域があり、また、 f, g, h が negative curve でない領域がある。



このケースでは、 $\deg f = b + c < a + b + c$ なので、常に $-K$ は big である。従って、定理 2.6 により $R_s(\mathfrak{p})$ は Noether になる。

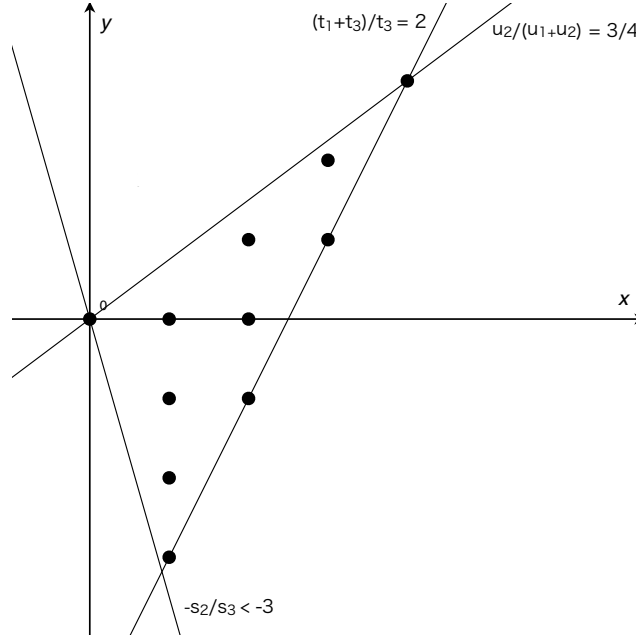
以下、 h が negative curve のとき、 $r = u = 4$ で定理 2.11 (3) の条件をみたすことを確かめる。 $\deg g = 2b = 5s_2 + 3c$, $\deg h = 4c = 5s_3 + b$ であり、(***) より $b/4 < c < 5b/16$ なので、

$$\begin{aligned}
 s_2 - 3s_3 &= \frac{1}{5}(2b - 3c) - \frac{3}{5}(4c - b) \\
 &= 3\left(\frac{1}{3}b - c\right) \\
 &> 3\left(\frac{5}{16}b - c\right) \\
 &> 0
 \end{aligned}$$

となるので、

$$-\frac{s_2}{s_3} < -3$$

である。 $(t_1 + t_3)/t_3 = 2$, $u_2/(u_1 + u_2) = 3/4$ なので、 Δ_4 は図のようになる。



$(\alpha', \beta') = (0, 0)$ において系 2.13 を用いることにより、定理 2.11 を使って、このケースでは $R_s(\mathfrak{p})$ は Noether であることがわかる。

参考文献

- [1] R. COWSIK, *Symbolic powers and the number of defining equations*, Algebra and its Applications, Lect. Notes in Pure and Appl. Math. **91** (1985), 13–14.
- [2] S. D. CUTKOSKY, *Symbolic algebras of monomial primes*, J. reine angew. Math. **416** (1991), 71–89.
- [3] S. D. CUTKOSKY AND K. KURANO, *Asymptotic regularity of powers of ideals of points in a weighted projective plane*, KYOTO J. MATH. **51** (2011), 25–45.
- [4] J. L. GONZÁLEZ AND K. KARU, *Some non-finitely generated Cox rings*, COMPOS. MATH. **152** (2016), 984–996.
- [5] S. GOTO, K. NISHIDA AND K.-I. WATANABE, *Non-Cohen-Macaulay symbolic blow-ups for space monomial curves and counterexamples to Cowsik’s question*, PROC. AMER. MATH. SOC. **120** (1994), 383–392.
- [6] J. HERZOG, *Generators and relations of Abelian semigroups and semigroup rings*, Manuscripta Math. **3** (1970), 175–193.

- [7] C. HUNEKE, *Hilbert functions and symbolic powers*, Michigan Math. J. **34** (1987), 293–318.
- [8] K. KURANO, *Positive characteristic finite generation of symbolic Rees algebras and Roberts’ counterexamples to the fourteenth problem of Hilbert*, Tokyo J. Math. **16** (1993), 473–496.
- [9] M. NAGATA, *On the fourteenth problem of Hilbert*, Proc. Internat. Congress Math. (1958), Cambridge Univ. Press, 1960.
- [10] P. ROBERTS, *A prime ideal in a polynomial ring whose symbolic blow-up is not Noetherian*, Proc. Amer. Math. Soc. **94** (1985), 589–592.
- [11] P. ROBERTS, *An infinitely generated symbolic blow-ups in a power series ring and a new counterexample to Hilbert’s fourteenth problem*, J. Algebra **132** (1990), 461–473.