

2015 年度 修士学位請求論文
 $\mathbb{Z}^n$ -次数付き環から定まる fan について

明治大学大学院理工学研究科基礎理工学専攻

荒井 悠介

指導教員 藏野和彦

2016 年 2 月 10 日

目次

1	c-ideal と c-cone	4
2	cone 上に次数を持つ斉次元によって生成された部分代数について	15
3	主定理	25

序

本稿では、 $\mathbb{Z}^n$ -次数付き Noether 整域 R の $R_{\mathbf{a}} \neq 0$ を満たす斉次成分 $R_{\mathbf{a}}$ の次数 $\mathbf{a}$ によって生成される $\mathbb{R}^n$ の cone $C(R)$ の持つ fan 構造について論じる。動機となるのは次の事実である。

X は体上の正規射影代数多様体で $\mathbb{Q}$ -分解的であるとする。さらに、 X の因子類群 $\mathrm{Cl}(X)$ が有限個の Weil 因子 $D_1, \dots, D_n$ の同値類 $\overline{D_1}, \dots, \overline{D_n}$ によって

$$\mathrm{Cl}(X) = \mathbb{Z}\overline{D_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}\overline{D_n}$$

と書けるとする。このとき、 X の Cox 環

$$\mathrm{Cox}(X) := \bigoplus_{(m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{Z}^n} H^0(X, m_1 D_1 + \cdots + m_n D_n)$$

が定義できるが、 $\mathrm{Cox}(X)$ が有限生成な環となる場合、すなわち X が Mori dream space^{*1}である場合には、 X の effective cone の Mori chamber への分解に自然に fan の構造を導入できることが知られている ([Ok, Definition-Proposition 2.9])。

本稿の目的は、この事実を $\mathbb{Z}^n$ -次数付き Noether 整域に一般化し、平易な環論と polyhedral cone の理論のみを用いて証明を与えることである。

一般の $\mathbb{Z}^n$ -次数付き Noether 整域 R に話を戻すと、nondegenerate な $C(R)$ については、次の最短 chamber 分解とその一意性が成り立つ ([越前谷, §3])。

定理 ([越前谷])。 $\mathbb{Z}^n$ -次数付き Noether 整域 R で、 $R_{\mathbf{0}}$ が体であるとし、 $C(R)$ が nondegenerate であるとする。このとき、

$$C(R) = \bigcup_{i=1}^l \sigma_i$$

となるような有限個の R の chamber $\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_l\}$ が存在する。特に、 $i \neq j$ ならば $J_{\sigma_i} \neq J_{\sigma_j}$ を満たすような $\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_l\}$ は一意に定まる。

このとき、chamber とそれに付随する chamber ideal を一般化した c-cone と c-ideal という概念を定義すると、各 chamber σ_i の任意の face も c-cone の構造を持つということが本稿の主定理である。

^{*1} Mori dream space には同値な二通りの定義が存在し、その一方は Cox 環が有限生成となることである (cf. [HK, Definition 1.10, Proposition 2.9])。

主定理. R は $\mathbb{Z}^n$ -次数付き Noether 整域で R_0 が体であるとする、次が成立する。

- (1) R の c-ideal は有限個である。
- (2) $J \subset R$ が c-ideal ならば、対応する c-ideal が J であるような最大の R の c-cone σ_J が存在する。
- (3) J_1 と J_2 は R の c-ideal とする。このとき、 $J_1 \supset J_2$ であるための必要十分条件は σ_{J_1} が σ_{J_2} の face となることである。
- (4) $R_0 \setminus \{0\}$ が R の単元全体と一致する^{*2}ならば、 $\{\sigma_J \mid J \text{ は } R \text{ の c-ideal}\}$ は fan の構造を持つ。

本質的な結果は (3) である。また、(4) により、 $C(R)$ が nondegenerate ならば、最短 chamber 分解に現れる chamber の face 全体の集合が fan の構造を持つことがわかる (系 3.4)。

§1 において c-ideal と c-cone を定義し、特に c-cone の境界における c-ideal の振る舞いを調べることによって、c-ideal が有限個であることと、 $C(R)$ が有限個の c-cone の相対内部の直和で表せることを示す。§2 では、環論的に有用であり、主定理 (3) の証明において重要となる定理 2.4 を示す。そして、以上の準備の下、§3 において主定理 (3) を証明し、 $C(R)$ の持つ fan 構造について論じる。

記号および規約

- $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ によってそれぞれ整数、有理数、実数の集合を表す。
- $\mathbb{N}$ によって自然数全体の集合を表すが、自然数は 0 を含まないものとし、0 以上の整数全体は $\mathbb{N}_0$ によって表す。すなわち、 $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ 、 $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ とする。
- 特に断らない限り、 $e_1, \dots, e_n$ により、 $\mathbb{R}^n$ の標準基底を表す。
- $\mathbb{R}^n$ の polyhedral cone σ に対して、 σ の相対内部と内点の集合をそれぞれ $\text{rel.int}(\sigma)$ 、 $\text{int}(\sigma)$ によって表す。
- $\mathbb{R}^n$ の polyhedral cone σ の face は自分自身も含むものとする。すなわち、 σ は零関数によって定まる σ の face であると思ふ。 σ 自身と異なる σ の face は σ の真の face であるという。

^{*2} R が整域であることから、この条件は R の全ての斉次な単元が R_0 に含まれるということである。したがって $C(R)$ が strongly convex であることと同値である。

1 c-ideal と c-cone

以下、 $\mathbb{Q}^n = \mathbb{Z}^n \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ 、 $\mathbb{R}^n = \mathbb{Z}^n \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ として $\mathbb{Z}^n$ が $\mathbb{Q}^n$ および $\mathbb{R}^n$ の格子点集合として定まっているものとする。

R は $\mathbb{Z}^n$ -次数付き Noether 整域で、 R_0 が体であるものとする。このとき、 $\mathbb{R}^n$ の cone $C(R)$ を

$$C(R) := \sum_{\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^n, R_{\mathbf{a}} \neq 0} \mathbb{R}_{\geq 0} \mathbf{a}$$

と定める。すなわち、 $C(R)$ は、 R の 0 でない斉次成分の次数によって生成された cone である。このとき、 R は R_0 上環として有限生成であることに注意する。

注意 1.1. R が有限生成 R_0 -代数であることから、 $C(R)$ は有理的な polyhedral cone である。すなわち、有限個の有理点 $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_l \in \mathbb{Q}^n$ が存在し、

$$C(R) = \mathbb{R}_{\geq 0} \mathbf{a}_1 + \dots + \mathbb{R}_{\geq 0} \mathbf{a}_l$$

と書ける。

定義 1.2. R は $\mathbb{Z}^n$ -次数付き Noether 整域で、 R_0 が体であるものとする。 $\mathbf{a} \in C(R) \cap \mathbb{Q}^n$ に対し

$$J_{\mathbf{a}}(R) := (R_{\mathbf{b}} \mid \mathbf{b} \in \mathbb{R}_{> 0} \mathbf{a} \cap \mathbb{Z}^n) R$$

とおき、 $\sqrt{J_{\mathbf{a}}(R)}$ を R の $\mathbf{a}$ における c-ideal と呼ぶ。

$\mathbf{a} \in C(R) \cap \mathbb{Q}^n$ のとき、 $J_{\mathbf{a}}(R) \neq 0$ である。また、 $J_0(R) = R$ に注意する。

定義 1.3. R は $\mathbb{Z}^n$ -次数付き Noether 整域で、 R_0 が体であるものとする。 $\sigma \subset \mathbb{R}^n$ を有理的な polyhedral cone とする。任意の $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \text{rel.int}(\sigma) \cap \mathbb{Q}^n$ に対し

$$\sqrt{J_{\mathbf{a}}(R)} = \sqrt{J_{\mathbf{b}}(R)}$$

が成り立つとき、 σ は c-ideal $\sqrt{J_{\mathbf{a}}(R)}$ を持つ c-cone であるという。nondegenerate な c-cone を chamber という。

c-cone σ に対応する c-ideal を J_{σ} と書く。すなわち、任意の $\mathbf{a} \in \text{rel.int}(\sigma) \cap \mathbb{Q}^n$ に対して $\sqrt{J_{\mathbf{a}}(R)} = J_{\sigma}$ である。

一般に、polyhedral cone σ に対して、 $\text{rel.int}(\sigma)$ は開集合とは限らないが、 σ が非退化である場合には $\text{rel.int}(\sigma)$ は $\text{int}(\sigma)$ と一致し、開集合となる。次の補題により、相対内部の空でない交わりから有理点が取れることがわかり、このことは後でしばしば使われる。

補題 1.4. $\sigma, \tau \subset \mathbb{R}^n$ をそれぞれ有理的な polyhedral cone とする。このとき、

$$\text{rel.int}(\sigma) \cap \text{rel.int}(\tau) \neq \emptyset$$

ならば、

$$\text{rel.int}(\sigma) \cap \text{rel.int}(\tau) \cap \mathbb{Q}^n \neq \emptyset$$

が成り立つ。

Proof. $V_1 := \sigma - \sigma$ 、 $V_2 := \tau - \tau$ とおく^{*3}。このとき、 V_1 、 V_2 は $\mathbb{R}^n$ の有理部分空間であるので、 $V_1 \cap V_2$ も有理的であることに注意する。また、 $\sigma \cap \tau$ は有理的な polyhedral cone である。

さて、

$$\mathbf{a} \in \text{rel.int}(\sigma) \cap \text{rel.int}(\tau)$$

を任意にとると、

$$\mathbf{a} \in V_1 \cap V_2 \subset V_1$$

である。 $t := \dim_{\mathbb{R}} V_1 \cap V_2$ 、 $s := \dim_{\mathbb{R}} V_1$ とおく。 $\mathbf{a} \in \text{rel.int}(\sigma)$ より、 V_1 の相対位相の下で、

$$\mathbf{a} \in U \subset \text{rel.int}(\sigma)$$

となる V_1 の開集合 U が存在する。すると、 U を $V_1 \cap V_2$ に制限することによって、 $\mathbf{a}$ の ($V_1 \cap V_2$ の中での) 適当な t 次元開近傍が $\text{rel.int}(\sigma)$ に含まれることがわかる。同様にして、 $\mathbf{a}$ の ($V_1 \cap V_2$ の中での) ある t 次元開近傍が $\text{rel.int}(\tau)$ に含まれる。つまり、

$$\mathbf{a} \in W \subset \text{rel.int}(\sigma) \cap \text{rel.int}(\tau)$$

となる $V_1 \cap V_2$ の開集合 W が存在する。 $\mathbb{R}^n$ の有理部分空間の空でない開集合は有理点を含むことに注意すると、

$$\text{rel.int}(\sigma) \cap \text{rel.int}(\tau) \cap \mathbb{Q}^n \neq \emptyset$$

を得る。 □

^{*3} $\mathbb{R}^n$ の polyhedral cone γ に対して $\gamma - \gamma$ は γ を含む最小の $\mathbb{R}$ -ベクトル空間である。同様に、 $\gamma \cap (-\gamma)$ は γ に含まれる最大の $\mathbb{R}$ -ベクトル空間である。

定義 1.5. $\sigma \subset C(R)$ を $\mathbb{R}^n$ の有理的な polyhedral cone とするとき、 R の部分 $\mathbb{Z}^n$ -次数付き R_0 -代数 $R|_\sigma$ を

$$R|_\sigma := \bigoplus_{\mathbf{a} \in \sigma \cap \mathbb{Z}^n} R_{\mathbf{a}}$$

と定め、これを R を σ に制限した環と言う。

命題 1.6. 定義 1.5 において、 $R|_\sigma$ も再び $\mathbb{Z}^n$ -次数付き Noether 整域となり、 $(R|_\sigma)_0$ は体である。

Proof. $\mathbb{R}^n$ の polyhedral cone は有限個の $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}$ への $\mathbb{R}$ -線形写像 $f_1, \dots, f_l$ に対して各 f_i の値が 0 以上になる点の集合として定義される。つまり、線形写像の値が 0 以上になる点を取るという操作を有限回繰り返して得られるのが polyhedral cone であるが、この操作はある hyperplane $H \subset \mathbb{R}^n$ によって分離される半空間の一方を取るということであるから、命題を示すためには

$$H := \{(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) \in \mathbb{R}^n \mid x_1, \dots, x_{n-1} \in \mathbb{R}\}$$

として

$$\sigma = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geq 0\}$$

の場合を考えれば十分である。しかし、これは、 $\mathbb{Z}$ -次数付き Noether 整域を次数が 0 以上の部分に制限した部分環がふたたび Noether 環となることから明らかである。 $\square$

補題 1.7. R は $\mathbb{Z}^n$ -次数付き Noether 整域で、 R_0 が体であるものとする。

- (1) $S \subset R$ は $\mathbb{Z}^n$ -次数付き Noether 整域の拡大で、 S_0 も体であるとする。 $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{Q}^n$ に対し

$$\sqrt{J_{\mathbf{a}}(S)} \subset \sqrt{J_{\mathbf{b}}(S)}, \quad \sqrt{J_{\mathbf{a}}(S)R} = \sqrt{J_{\mathbf{a}}(R)}, \quad \sqrt{J_{\mathbf{b}}(S)R} = \sqrt{J_{\mathbf{b}}(R)}$$

であるとき、 $\sqrt{J_{\mathbf{a}}(R)} \subset \sqrt{J_{\mathbf{b}}(R)}$ が成立する。

- (2) $\mathbb{Z}^m$ が $\mathbb{Z}^n$ の部分群であるとき、 $S := \bigoplus_{\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^m} R_{\mathbf{a}}$ とおくと、任意の $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{Z}^m$ に対し

$$\sqrt{J_{\mathbf{a}}(S)} \subset \sqrt{J_{\mathbf{b}}(S)} \iff \sqrt{J_{\mathbf{a}}(R)} \subset \sqrt{J_{\mathbf{b}}(R)}$$

が成り立つ。

- (3) $\sigma \subset C(R)$ を $\mathbb{R}^n$ の polyhedral cone とするとき、任意の $\mathbf{a} \in \text{rel.int}(\sigma) \cap \mathbb{Q}^n$ と任意の $\mathbf{b} \in \sigma \cap \mathbb{Q}^n$ に対し

$$\sqrt{J_{\mathbf{a}}(R|_\sigma)} \subset \sqrt{J_{\mathbf{b}}(R|_\sigma)} \iff \sqrt{J_{\mathbf{a}}(R)} \subset \sqrt{J_{\mathbf{b}}(R)}$$

が成り立つ。したがって、特に σ が R の c-cone であるとき、 $\sigma = C(R|_\sigma)$ 自身が $R|_\sigma$ の c-cone となる。

- (4) $S \subset R$ は $\mathbb{Z}^n$ -次数付き Noether 整域の拡大で、 S_0 も体であるとする。このとき、finite な単射 $S \rightarrow R$ が存在するならば、 $\mathbb{R}^n$ の有理的な polyhedral cone σ に対して、

$$\sigma \text{ が } S \text{ の c-cone} \iff \sigma \text{ が } R \text{ の c-cone}$$

が成り立つ。

Proof. (1) は明らか。

- (2) ($\implies$) は、 $S \subset R$ と $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{Z}^m$ が (1) の条件を満たすことから明らかである。

($\impliedby$) を示す。斉次元 $x \in J_{\mathbf{a}}(S)$ を任意にとると、 $x \in J_{\mathbf{a}}(R) \subset \sqrt{J_{\mathbf{b}}(R)}$ であるので、

$$x^l \in J_{\mathbf{b}}(R)$$

を満たす $l \in \mathbb{N}$ がある。すると、

$$\sqrt{J_{\mathbf{b}}(S)R} = \sqrt{J_{\mathbf{b}}(R)}$$

により、 $x^l \in J_{\mathbf{b}}(S) \cdot R$ としてよい。 $\deg x^l \in \mathbb{Z}^m$ であり、 $J_{\mathbf{b}}(S)$ の斉次な生成元の次数は $\mathbb{Z}^m$ の元にとれるので、

$$x^l \in J_{\mathbf{b}}(S)$$

となる。

- (3)

$$J_{\mathbf{a}}(R) \subset \sqrt{J_{\mathbf{b}}(R)} \iff J_{\mathbf{a}}(R|_\sigma) \subset \sqrt{J_{\mathbf{b}}(R|_\sigma)}$$

が言えれば十分である。

($\impliedby$) を示す。有限個の斉次元 $x_1, \dots, x_l \in R|_\sigma$ を、

$$(x_1, \dots, x_l)R = J_{\mathbf{a}}(R), (x_1, \dots, x_l)R|_\sigma = J_{\mathbf{a}}(R|_\sigma)$$

が成り立つようにとれるので、集合としての包含関係

$$\{x_1, \dots, x_l\} \subset \sqrt{J_{\mathbf{b}}(R|_\sigma)} \subset \sqrt{J_{\mathbf{b}}(R)}$$

が成り立つ。したがって、両辺が R 上生成するイデアルを考えれば

$$J_{\mathbf{a}}(R) \subset \sqrt{J_{\mathbf{b}}(R)}$$

が成り立つ。

($\implies$) を示そう。任意の $\mathbf{c} \in \mathbb{R}_{>0}\mathbf{a} \cap \mathbb{Z}^n$ に対して

$$R_{\mathbf{c}} \subset \sqrt{J_{\mathbf{b}}(R|_{\sigma})}$$

が言えればよい。

$0 \neq a \in R_{\mathbf{c}} \subset \sqrt{J_{\mathbf{b}}(R)}$ を任意にとると、

$$a^n \in J_{\mathbf{b}}(R)$$

となる $n \in \mathbb{N}$ が存在するので、 $\mathbb{R}_{>0}\mathbf{b}$ 上に次数を持つ斉次元 $b_1, b_2, \dots, b_l$ と $x_1, x_2, \dots, x_l \in R$ を用いて

$$a^n = x_1 b_1 + x_2 b_2 + \dots + x_l b_l$$

と書ける。すると a^n が斉次であることから、 $x_1, x_2, \dots, x_l \in R$ も斉次元で

$$\deg x_i = \deg a^n - \deg b_i \in \sigma - \sigma$$

としてよい。 $s \in \mathbb{N}$ を任意に取り、この両辺に a^{ns} を掛けると

$$a^{n+ns} = a^{ns} x_1 b_1 + a^{ns} x_2 b_2 + \dots + a^{ns} x_l b_l \quad (1.1)$$

となる。 $\mathbf{c} \in \text{rel.int}(\sigma)$ と $\deg x_i \in \sigma - \sigma$ に注意すれば、 s を十分大きく取ることにより

$$\deg a^{ns} x_i \in \sigma \quad (1.2)$$

が成り立つ。このことを示そう。まず、 $\mathbb{R}^n$ を $\sigma - \sigma$ に制限して考えればよいので、 σ は nondegenerate としてよい。 $\mathbf{x}_i := \deg x_i$ とおくと、

$$\deg a^{ns} x_i = \mathbf{x}_i + ns\mathbf{c}$$

である。 σ が nondegenerate であるという仮定より、 $\mathbf{c} \in \text{int}(\sigma)$ なので、 $\mathbf{c}$ のある ϵ -近傍は

$$B_{\epsilon}(\mathbf{c}) \subset \sigma$$

を満たす。このとき、

$$\left| \frac{\mathbf{x}_i}{m} \right| < \epsilon$$

となる $m \in \mathbb{N}$ を取ると、 $\mathbf{x}_i \in \sigma - \sigma$ より、

$$\frac{\mathbf{x}_i}{m} + \mathbf{c} \in B_{\epsilon}(\mathbf{c}) \subset \sigma$$

が成り立つ。すなわち、

$$\mathbf{x}_i + m\mathbf{c} \in \sigma$$

である。したがって、 $ns \geq m$ となるように s を取ればよい。

(1.2) により $a^{ns}x_i \in R|_\sigma$ が任意の $i = 1, \dots, l$ に対して成立するので、(1.1) より

$$a^{n+ns} \in J_{\mathbf{b}}(R|_\sigma)$$

が成り立ち、したがって

$$a \in \sqrt{J_{\mathbf{b}}(R|_\sigma)}$$

である。

(4) [越前谷, 命題 5.1] および (1) による。

□

定義 1.8. $\sigma \subset \mathbb{R}^n$ を polyhedral cone とするとき、その境界 $\partial\sigma$ を

$$\partial\sigma := \sigma \setminus \text{rel.int}(\sigma)$$

と定める。

命題 1.9. R は $\mathbb{Z}^n$ -次数付き Noether 整域で R_0 が体であるものとし、 $\sigma \subset C(R)$ を R の c-cone とする。このとき、任意の $\mathbf{a} \in \text{rel.int}(\sigma) \cap \mathbb{Q}^n$ と任意の $\mathbf{b} \in \partial\sigma \cap \mathbb{Q}^n$ に対し、

$$\sqrt{J_{\mathbf{a}}(R)} \subset \sqrt{J_{\mathbf{b}}(R)}$$

が成り立つ。

Proof. 補題 1.7.(1) より $R|_\sigma$ で命題が成り立つことを示せば十分である。したがって、 R を $R|_\sigma$ で置き換え、補題 1.7.(3) により $C(R) = \sigma$ としてよい。

R の斉次イデアル I に対して、 I の任意の極小素イデアルも斉次である^{*4}。よって、斉次素イデアル P で $J_{\mathbf{b}}(R) \subset P$ となるものに対して、

$$J_{\mathbf{a}}(R) \subset P$$

が成り立つことを示せば十分である。

このとき、 R/P は $\mathbb{Z}^n$ -次数付き Noether 整域であり $(R/P)_0 = R_0$ である。このとき、明らかに

$$C(R/P) \subset C(R)$$

^{*4} $n > 1$ であるときにも、 $\mathbb{Z}^n$ -次数付き環の斉次イデアルの極小素イデアルは斉次であることが示せる (cf.[後藤-渡辺, 定理 7.17])。

である。すると、 $J_{\mathbf{b}}(R) \subset P$ により、任意の $\mathbf{c} \in \mathbb{R}_{>0}\mathbf{b} \cap \mathbb{Z}^n$ に対し

$$(R/P)_{\mathbf{c}} = 0$$

である。よって、

$$C(R/P) \subsetneq C(R)$$

であることがわかる。すると、 $C(R/P)$ および $C(R)$ は polyhedral cone であるので、

$$\mathbf{c} \in \text{rel.int}(C(R)) \cap \mathbb{Q}^n \text{ かつ } \mathbf{c} \notin C(R/P)$$

であるような点 $\mathbf{c}$ が取れる。すると

$$J_{\mathbf{c}}(R) \subset P$$

であるが、 $C(R)$ 自身が R の $\mathbf{c}$ -cone であるので、

$$\sqrt{J_{\mathbf{a}}(R)} = \sqrt{J_{\mathbf{c}}(R)} \subset P$$

となる。したがって、特に、

$$J_{\mathbf{a}}(R) \subset P$$

である。 □

命題 1.10. R は $\mathbb{Z}^n$ -次数付き Noether 整域で、 $R_{\mathbf{0}}$ が体であり、 $C(R)$ は nondegenerate であるとする。 $\sigma \in C(R)$ を R の最短 chamber 分解に現れる chamber とする。このとき、任意の $\mathbf{a} \in \text{int}(\sigma) \cap \mathbb{Q}^n$ と任意の $\mathbf{b} \in \partial\sigma \cap \mathbb{Q}^n$ に対し、

$$\sqrt{J_{\mathbf{a}}(R)} \subsetneq \sqrt{J_{\mathbf{b}}(R)}$$

が成り立つ。

Proof. 命題 1.9 により $\subset$ は成り立つ。以下、 $=$ が成立すると仮定して矛盾を導く。

$\text{rel.int}(C(R))$ 上に次数を持つ斉次元によって生成されたイデアルは $\partial C(R)$ 上に次数を持つような R の斉次元を含まないので、仮定により $\mathbf{b} \notin \partial C(R)$ である。すると、 $\mathbf{a}$ を始点とし $\mathbf{b}$ を通る半直線は σ と異なる R の chamber σ' と交わる。このとき、 $\mathbf{a}$ を $\text{rel.int}(\sigma)$ の範囲で取り直すことによって、この半直線と $\text{int}(\sigma') \cap \mathbb{Q}^n$ の共通部分から点 $\mathbf{c}$ が取れる^{*5}。また、 $\mathbf{b} \in \partial\sigma'$ としてよい。すると、命題 1.9 によって

$$\sqrt{J_{\mathbf{c}}(R)} \subset \sqrt{J_{\mathbf{b}}(R)}$$

^{*5} σ' は chamber であるので $\text{rel.int}(\sigma') = \text{int}(\sigma')$ であることに注意する。

となる。したがって、仮定により

$$J_{\sigma'} = \sqrt{J_c(R)} \subset \sqrt{J_a(R)} = J_\sigma$$

となる。しかし、 σ と σ' は最短 chamber 分解に現れる chamber であるので、 J_σ と $J_{\sigma'}$ の間に包含関係は無い ([越前谷, §3.])。ゆえに、

$$\sqrt{J_a(R)} \subsetneq \sqrt{J_b(R)}$$

である。 □

命題 1.11. R は $\mathbb{Z}^n$ -次数付き Noether 整域で、 R_0 が体であるものとする。このとき、有限個の R の c-cone $\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_l\}$ が存在して

$$C(R) = \bigcup_{i=1}^l \text{rel.int}(\sigma_i) \quad (1.3)$$

をみたす。

Proof. $\mathbb{R}^n$ を $\sigma - \sigma$ に制限することによって、 $C(R)$ は nondegenerate であるとしてよい。すると、最短 chamber 分解

$$C(R) = \bigcup_{i=1}^l \sigma_i$$

が存在する。よって、補題 1.7.(1) により、任意の $\sigma \in \{\sigma_1, \dots, \sigma_l\}$ に対して、 $R|_\sigma$ において命題が成立することを示せば十分である。そこで、 $C(R)$ は一つの chamber とする。

このとき、 $C(R) = \sigma$ 、 $m := \dim_{\mathbb{R}}(\sigma \cap (-\sigma))$ とおくと、

$$C(R) = \text{rel.int}(\sigma) \cup \{\tau \mid \tau \text{ は } \sigma \text{ の face で } m+1 \leq \dim \tau \leq n-1\} \cup (\sigma \cap (-\sigma))$$

である。したがって、 σ の各 face に R を制限して考えれば、補題 1.7(3) を繰り返し適用することによって $C(R) = C(R) \cap (-C(R))$ の場合に帰着できる。このとき、 $C(R)$ は真の face を持たないので、

$$\text{rel.int}(C(R)) = C(R)$$

となり、この場合にも命題は成り立つ。 □

系 1.12 (主定理 (1)). R は $\mathbb{Z}^n$ -次数付き Noether 整域で、 R_0 が体であるものとする。このとき、 R の c-ideal は有限個である。

Proof. 任意の R の c-ideal J はある $\mathbf{a} \in C(R) \cap \mathbb{Q}^n$ を用いて $J = \sqrt{J_{\mathbf{a}}(R)}$ と書けるが、(1.3) により $\mathbf{a} \in \text{rel.int}(\sigma_i)$ となる i が存在する。したがって、 $J = J_{\sigma_i}$ であり、 R の c-ideal は高々 l 個であることがわかる。 $\square$

命題 1.13 (主定理 (2)). R は $\mathbb{Z}^n$ -次数付き Noether 整域で、 R_0 が体であるものとし、 J を R の c-ideal とする。このとき、c-ideal が J となるような最大の c-cone が存在する。すなわち、 R の c-cone の集合

$$\{\sigma \subset C(R) \mid \sigma \text{ は } R \text{ の c-cone で } J_\sigma = J\}$$

には包含関係を順序として最大元が存在する。

Proof. 命題 1.11 により

$$C(R) = \bigcup_{i=1}^l \text{rel.int}(\sigma_i)$$

を満たす有限個の R の c-cone $\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_l\}$ が存在する。ここで、 $\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_l\}$ を並び替えて $\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_s\}$ が J に対応する c-cone であるとする。このとき、

$$\bigcup_{i=1}^s \sigma_i = \overline{\sum_{\mathbf{a} \in \mathbb{Q}^n, \sqrt{J_{\mathbf{a}}(R)}=J} \mathbb{R}_{>0} \mathbf{a}} \quad (1.4)$$

である*6。このことを示そう、まず

$$\bigcup_{\mathbf{a} \in \mathbb{Q}^n, \sqrt{J_{\mathbf{a}}(R)}=J} \{\mathbf{a}\} \subset \bigcup_{i=1}^s \text{rel.int}(\sigma_i) \subset \sum_{\mathbf{a} \in \mathbb{Q}^n, \sqrt{J_{\mathbf{a}}(R)}=J} \mathbb{R}_{>0} \mathbf{a} \quad (1.5)$$

が成り立つことに注意する。すると、

$$\sum_{\mathbf{a} \in \mathbb{Q}^n, \sqrt{J_{\mathbf{a}}(R)}=J} \mathbb{R}_{>0} \mathbf{a} \subset \overline{\bigcup_{\mathbf{a} \in \mathbb{Q}^n, \sqrt{J_{\mathbf{a}}(R)}=J} \{\mathbf{a}\}}$$

が成り立つ。実際、 $\mathbf{x} \in \sum_{\mathbf{a} \in \mathbb{Q}^n, \sqrt{J_{\mathbf{a}}(R)}=J} \mathbb{R}_{>0} \mathbf{a}$ を任意にとると、

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{a}_1 + \dots + x_l \mathbf{a}_l$$

と書ける (ただし、 $x_i \in \mathbb{R}_{>0}$)。 $\{y_{i_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ を x_i に収束する有理数の点列とし、

$$\mathbf{x}_j := y_{1_j} \mathbf{a}_1 + \dots + y_{l_j} \mathbf{a}_l$$

*6 $U \subset \mathbb{R}^n$ に対し、 $\overline{U}$ によって、 U の $\mathbb{R}^n$ の中での閉包を表す。

とおくと、[越前谷, 補題 3.1] より、 $\mathbf{x}_j \in \bigcup_{\mathbf{a} \in \mathbb{Q}^n, \sqrt{J_{\mathbf{a}}(R)}=J} \{\mathbf{a}\}$ である。 $\{\mathbf{x}_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ は $\mathbf{x}$ に収束するので、

$$\mathbf{x} \in \overline{\bigcup_{\mathbf{a} \in \mathbb{Q}^n, \sqrt{J_{\mathbf{a}}(R)}=J} \{\mathbf{a}\}}$$

となる。すると、(1.5) の辺々の $\mathbb{R}^n$ の閉包が一致することがわかる。

ここで、

$$\sigma_J := \bigcup_{i=1}^s \sigma_i$$

とおくと、(1.4) によって右辺は $\mathbb{R}^n$ の cone であり、さらに各 σ_i が c-cone であることから、 σ_J は有理的な polyhedral cone である。すると、再び (1.4) から σ_J は c-ideal J を持つ R の c-cone であることがわかる。このとき、c-ideal が J であるような任意の R の c-cone τ に対して

$$\text{rel.int}(\tau) \cap \mathbb{Q}^n \subset \{\mathbf{a} \mid \mathbf{a} \in \mathbb{Q}^n, \sqrt{J_{\mathbf{a}}(R)} = J\}$$

が成立するので、

$$\text{rel.int}(\tau) \subset \sum_{\mathbf{a} \in \mathbb{Q}^n, \sqrt{J_{\mathbf{a}}(R)}=J} \mathbb{R}_{>0} \mathbf{a} \subset \sigma_J$$

である。したがって、特に、

$$\tau \subset \sigma_J$$

が成り立つ。すなわち、 σ_J は c-ideal J を持つ c-cone の中で最大のものである。 $\square$

命題 1.13 から、次の定義が well-defined となる。

定義 1.14. R の c-ideal J に対応する最大の c-cone を σ_J と表し、c-ideal J を持つ最大 c-cone と呼ぶ。また、 R の最大 c-cone 全体の集合を $F(R)$ と書くことにする。すなわち、

$$F(R) := \{\sigma_J \mid J \text{ は } R \text{ の c-ideal}\}$$

である。

系 1.12 により、 $F(R)$ は有限集合である。

命題 1.15. R は $\mathbb{Z}^n$ -次数付き Noether 整域で、 R_0 が体であるものとする、

$$C(R) = \coprod_{\sigma_J \in F(R)} \text{rel.int}(\sigma_J)$$

が成り立つ。

Proof. 命題 1.11 と命題 1.13 より、

$$C(R) = \bigcup_{\sigma_J \in F(R)} \text{rel.int}(\sigma_J)$$

が成立する。よって、 $J_1 \neq J_2$ ならば $\text{rel.int}(\sigma_{J_1}) \cap \text{rel.int}(\sigma_{J_2}) = \emptyset$ であることを示せば十分である。

$\text{rel.int}(\sigma_{J_1}) \cap \text{rel.int}(\sigma_{J_2}) \neq \emptyset$ であるとする、補題 1.4 より、

$$\text{rel.int}(\sigma_{J_1}) \cap \text{rel.int}(\sigma_{J_2}) \cap \mathbb{Q}^n \neq \emptyset$$

である。 $\mathbf{b} \in \text{rel.int}(\sigma_{J_1}) \cap \text{rel.int}(\sigma_{J_2}) \cap \mathbb{Q}^n$ を取ると、

$$J_1 = \sqrt{J_{\mathbf{b}}(R)} = J_2$$

となり矛盾する。したがって、

$$\text{rel.int}(\sigma_{J_1}) \cap \text{rel.int}(\sigma_{J_2}) = \emptyset$$

でなければならない。 □

次の命題は、最大 c-cone が chamber とほぼ同じ性質を持っていることを表している (cf. 命題 1.10)。

命題 1.16. R は $\mathbb{Z}^n$ -次数付き Noether 整域で、 R_0 は体であるとする。 $\mathbf{a} \in C(R) \cap \mathbb{Q}^n$ と R の c-ideal J に対して次が成立する。

- (1) $\mathbf{a} \in \sigma_J \iff J \subset \sqrt{J_{\mathbf{a}}(R)}$
- (2) $\mathbf{a} \in \text{rel.int}(\sigma_J) \iff J = \sqrt{J_{\mathbf{a}}(R)}$

したがって、特に、

$$\mathbf{a} \in \partial\sigma_J \iff J \subsetneq \sqrt{J_{\mathbf{a}}(R)}$$

が成り立つ。

Proof. (1) ($\implies$) は命題 1.9 により従う。($\impliedby$) を示す。[越前谷, 補題 3.1] より、 $\mathbf{a}$ が $\text{rel.int}(\sigma_J)$ の集積点であることがわかるので、 $\mathbf{a} \in \sigma_J$ となる。

(2) ($\implies$) は明らか。($\impliedby$) は命題 1.15 から従う。

□

2 cone 上に次数を持つ斉次元によって生成された部分代数について

R と S は $\mathbb{Z}^n$ -次数付き Noether 整域で、 R_0 および S_0 が体であるものとする。このとき、finite な単射 $S \rightarrow R$ が存在するならば、補題 1.7(4) により、

$$F(S) = F(R)$$

が成り立っている。したがって、finite な $\mathbb{Z}^n$ -次数付き Noether 整域の拡大で 0 次が共に体であるようなものが得られると、c-cone や c-ideal を考察する上で都合が良い。 C を $C(R)$ に含まれている有限個の有理的な polyhedral cone の集合とする。このとき、 C のある元上に次数を持つ斉次成分によって R_0 上生成された R の部分代数 R_C について、自然な単射 $R_C \rightarrow R$ が finite となるための十分条件について考察する。

定義 2.1. R は $\mathbb{Z}^n$ -次数付き Noether 整域で R_0 が体であるものとする。このとき、 $C(R)$ に含まれるある有理的な polyhedral cone の集合 C に対し、

$$H_C := \bigcup_{\alpha \in (\cup_{\sigma \in C} \sigma) \cap \mathbb{Z}^n, R_\alpha \neq 0} R_\alpha$$

とおく。すなわち、 H_C は、次数が C に含まれる cone に属しているような R の斉次元全体の集合である。このとき、 R の部分 R_0 -代数 R_C を R_0 上 H_C で生成された環、すなわち

$$R_C := R_0[H_C]$$

と定める。

注意 2.2. C の定め方から、 R_C は $\mathbb{Z}^n$ -次数付き Noether 整域で 0 次が体であるような環となることに注意する。

補題 2.3. R は $\mathbb{Z}^n$ -次数付き Noether 整域で、 R_0 が体であるものとする。 $C(R)$ は nondegenerate な simplicial cone であるとする。このとき、 $C(R)$ の edge 全体の集合を C とおく。すなわち、

$$C = \{C(R) \text{ の } 1 \text{ 次元 face}\}$$

とおくと、 $C(R_C)$ の任意の face は R_C の c-cone である。

Proof. $C(R) = C(R_C)$ は simplicial かつ nondegenerate であることから、適当な一次変換によって

$$C(R_C) = (\mathbb{R}_{\geq 0})^n$$

であるとしてよい。 $1 \leq m \leq n$ とするとき、 $C(R_C)$ の m 次元 face σ は

$$\sigma = \mathbb{R}_{\geq 0} \mathbf{e}_{i_1} + \cdots + \mathbb{R}_{\geq 0} \mathbf{e}_{i_m}$$

と書ける。このとき、 $\mathbf{a} \in \text{rel.int}(\sigma) \cap \mathbb{Z}^n$ を任意にとると、

$$\mathbf{a} = a_1 \mathbf{e}_{i_1} + \cdots + a_m \mathbf{e}_{i_m}$$

となる正の整数 $a_1, \dots, a_m$ が取れるので、

$$\begin{aligned} \sqrt{J_{\mathbf{a}}(R_C)} &\supset J_{a_1 \mathbf{e}_{i_1}}(R_C) \cdots J_{a_m \mathbf{e}_{i_m}}(R_C) \\ &= J_{\mathbf{e}_{i_1}}(R_C) \cdots J_{\mathbf{e}_{i_m}}(R_C) \end{aligned}$$

が成り立つ。一方、 R_C の定義から

$$J_{\mathbf{a}}(R_C) \subset J_{\mathbf{e}_{i_1}}(R_C) \cdots J_{\mathbf{e}_{i_m}}(R_C)$$

が成り立つので、

$$\sqrt{J_{\mathbf{a}}(R_C)} = \sqrt{J_{\mathbf{e}_{i_1}}(R_C) \cdots J_{\mathbf{e}_{i_m}}(R_C)}$$

である。ゆえに、 σ は R_C の c-cone である。 □

定理 2.4. R は $\mathbb{Z}^n$ -次数付き Noether 整域で、 R_0 が体であるものとする。また、 $C(R)$ は nondegenerate な simplicial cone であるとする。このとき、 $C(R)$ の edge 全体の集合を C とおくと、次は同値である。

- (1) 自然な単射 $R_C \rightarrow R$ は finite である。
- (2) $C(R)$ の全ての face が R の c-cone である。
- (3) $C(R)$ 自身が R の c-cone である。

Proof. $((1) \implies (2))$ は補題 1.7(4) と補題 2.3 から従う。また、 $((2) \implies (3))$ は明らかである。そこで、 $((3) \implies (1))$ を示す。

$$C(R) = (\mathbb{R}_{\geq 0})^n$$

としてよい。 R が整閉整域である場合に帰着できることを示そう。この条件は以下の主張 2 の証明において必要となる。

まず、 R の $Q(R)$ における閉包 $\overline{R}$ に自然に $\mathbb{Z}^n$ -次数付けができることを示す。 R の 0 でない斉次元全体で局所化することによって、

$$R \subset R_{(0)} = K[t_1^{\pm 1}, \dots, t_n^{\pm 1}]$$

を得るが、体 K 上の n 変数 Laurent 多項式環は整閉整域であるので、

$$R \subset \overline{R} \subset R_{(0)}$$

である。 $R_{(0)}$ には自然な $\mathbb{Z}^n$ -次数が入っており、このとき、局所化の自然な射 $R \rightarrow R_{(0)}$ は $\mathbb{Z}^n$ -次数付き環の射であることに注意する。そこで、 R 上整な $f \in R_{(0)}$ について、 f の任意の斉次成分も R 上整であることをいえばよい。まず、 f_i を $(R_{(0)})$ における) 次数の第 n 成分が i であるような斉次元の和であるとして、

$$f = \sum_{i \in \mathbb{Z}} f_i \quad (2.6)$$

と表したとき、各 f_i が R 上整であることを示す。 u を $R_{(0)}$ 上の不定元とし、 $s \in \mathbb{N}_0$ に対し、代入射 ϕ_s を

$$\begin{aligned} \phi_s: R_{(0)}[u^{\pm 1}] &\longrightarrow R_{(0)}[u^{\pm 1}] \\ a &\longmapsto a & (a \in K) \\ t_i &\longmapsto t_i & (i = 1, \dots, n-1) \\ t_n &\longmapsto u^s t_n \\ u &\longmapsto u \end{aligned}$$

と定めると、 ϕ_s は同型である。さらに、 ϕ_s は $R[u^{\pm 1}]$ の自己同型 ϕ'_s を導き、

$$\begin{array}{ccc} R[u^{\pm 1}] & \hookrightarrow & R_{(0)}[u^{\pm 1}] \\ \downarrow \phi'_s & & \downarrow \phi_s \\ R[u^{\pm 1}] & \hookrightarrow & R_{(0)}[u^{\pm 1}] \end{array}$$

は可換である。したがって、 f の $R[u^{\pm 1}]$ 上の整従属の関係式は、 ϕ_s によって $\phi_s(f)$ の $R[u^{\pm 1}]$ 上の整従属の関係式に写される。すなわち、 $\phi_s(f)$ は $R[u^{\pm 1}]$ 上整である。さて、(2.6) において $i < 0$ のとき $f_i = 0$ であることに注意する。このことを示そう。 $f_i \neq 0$ であるような最小の i が負であったと仮定する。 f の R 上の整従属の関係式が

$$f^m + a_1 f^{m-1} + \dots + a_m = 0 \quad (2.7)$$

と書けたとする。(2.7) の $R_{(0)}$ における次数を見たとき、次数の第 n 成分が mi であるような斉次成分全体の和は f_i^m と書けることに注意する。なぜならば、(2.7) の $m-1$ 次以下の項からは次数の第 n 成分が $i(m-1)$ 以上の項しか出てこないからである^{*7}。したがって $f_i^m = 0$ でなければならないが、 $R_{(0)}$ は整域なので、これは $f_i = 0$ を意味する。よって、

$$f = f_0 + f_1 + \cdots + f_l$$

と書ける。 f に $\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_l$ を作用させることで、

$$\begin{pmatrix} \phi_0(f) \\ \phi_1(f) \\ \phi_2(f) \\ \vdots \\ \phi_l(f) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & u & u^2 & \cdots & u^l \\ 1 & u^2 & u^4 & \cdots & u^{2l} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & u^l & u^{2l} & \cdots & u^{l^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_l \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

を得る。ここで、

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & u & u^2 & \cdots & u^l \\ 1 & u^2 & u^4 & \cdots & u^{2l} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & u^l & u^{2l} & \cdots & u^{l^2} \end{pmatrix}$$

とおくと、 A は Vandermonde 行列であるから、

$$\det A = \prod_{0 \leq i < j \leq l} (u^j - u^i) \neq 0 \quad (2.9)$$

が成り立つ。また、 A の余因子行列を $A^{(c)}$ と書くと、(2.8) より

$$\det A \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_l \end{pmatrix} = A^{(c)} \begin{pmatrix} \phi_0(f) \\ \phi_1(f) \\ \vdots \\ \phi_l(f) \end{pmatrix}$$

^{*7} $C(R) = (\mathbb{R}_{\geq 0})^n$ により、 $R_{(0)}$ の斉次元に R の斉次元を掛けても次数の各成分は減少しない。

であるから、各 i について、 $\det A \cdot f_i$ は $\phi_0(f), \dots, \phi_l(f)$ の $R_0[u]$ 線形結合で書けることがわかる。ゆえに、 $\det A \cdot f_i$ は $R[u^{\pm 1}]$ 上整である。したがって、

$$(\det A \cdot f_i)^k + a_1(\det A \cdot f_i)^{k-1} + \dots + a_k = 0 \quad (2.10)$$

を満たす $k \in \mathbb{N}$ と $a_1, \dots, a_k \in R[u^{\pm 1}]$ が存在する。(2.9) により、 $\det A$ の u に関する最高次の項は u^r という形をしていることに注意する。また、(2.10) を u の冪に関して整理すると、 u が $R_{(0)}$ 上の不定元であることから、 u の冪の係数は 0 でなければならない。そこで、(2.10) の u^{kr} の係数を考えると、これは

$$(f_i \text{ の } R \text{ 係数 monic 多項式}) = 0$$

という形をしているので、 f_i は R 上整である。

次に、各 f_i について、 f_{i_j} を次数の第 $n-1$ 成分が j であるような斉次成分の和として

$$f_i = \sum_{j \in \mathbb{Z}} f_{i_j}$$

と表し、同様の手順を繰り返すことによって f の全ての斉次成分が R 上整であることがわかる。したがって、 $\bar{R}$ に $R_{(0)}$ の次数を導入することができる。ここで、 $\bar{R}_0$ は体である。なぜならば、上記の議論で導入された次数により、 $R_0 \subset \bar{R}_0$ であり、これは整拡大だからである。

ところで、 R が永田環であることと、 $Q(\bar{R})$ は $Q(R)$ の有限次代数拡大であるので、 $R \rightarrow \bar{R}$ は finite であり、したがって $\bar{R}$ は Noether 環でもある。

以上のことから、 $C(\bar{R})$ が定義でき、このとき、 $F(\bar{R}) = F(R)$ であることに注意すると、 $\bar{R}_C$ が定義できる。ここで、各 $i = 1, \dots, n$ に対して、

$$R_C|_{\mathbb{R}_{\geq 0} e_i} = R|_{\mathbb{R}_{\geq 0} e_i}, \quad \bar{R}_C|_{\mathbb{R}_{\geq 0} e_i} = \bar{R}|_{\mathbb{R}_{\geq 0} e_i}$$

が成り立つことから、各 i に対して $\bar{R}_C|_{\mathbb{R}_{\geq 0} e_i}$ は $R_C|_{\mathbb{R}_{\geq 0} e_i}$ 上整であることがわかる。ゆえに、 $\bar{R}_C$ は R_C 上整であるので、 $R_C \rightarrow \bar{R}_C$ は finite となる。すると、

$$\begin{array}{ccc} R_C & \hookrightarrow & R \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bar{R}_C & \hookrightarrow & \bar{R} \end{array}$$

は可換であり、縦の射は共に finite である。したがって、 $\bar{R}_C \rightarrow \bar{R}$ が finite なら $R_C \rightarrow R$ も finite となる。

さて、 R_C の R における整閉包を $\widetilde{R}_C$ とおく。 R が R_0 上有限生成な環であることから R の商体 $Q(R)$ は R_0 上有限生成な体である。すると、 $R_C \subset \widetilde{R}_C \subset R$ より $Q(R_C) \subset Q(\widetilde{R}_C) \subset Q(R)$ であることから、 $Q(\widetilde{R}_C)$ は $Q(R_C)$ 上有限生成な体であることがわかる。また、 $\widetilde{R}_C$ が R_C 上整であることから、 $Q(\widetilde{R}_C)/Q(R_C)$ は有限次代数拡大となる。ゆえに、 $\widetilde{R}_C$ は有限生成 R_C -加群である。したがって、ここで、 $R = \widetilde{R}_C$ であることが示せばよい。このことは二段階に分けて証明する。

主張 1. 任意の $\alpha \in \mathbb{N}^n$ 、すなわち $\alpha \in \text{int}((\mathbb{R}_{\geq 0})^n)$ に対して、 $R_\alpha \subset \widetilde{R}_C$ である。

Proof. R が Noether 環であることから、

$$\sqrt{J_{e_i}(R)} = \sqrt{R_{ae_i} \cdot R}$$

が全ての $i = 1, \dots, n$ に対して成り立つような $a \in \mathbb{N}$ を取ることができる。

さて、 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ とし、 $t \in \mathbb{N}_0$ に対し

$$S_t := R_{at\alpha}$$

とおき、

$$S := \bigoplus_{t \in \mathbb{N}_0} S_t$$

と定める。このとき、 $C(R) = (\mathbb{R}_{\geq 0})^n$ が R の c-cone であることにより、

$$\sqrt{J_\alpha(R)} = \sqrt{J_{e_1}(R) \cdots J_{e_n}(R)}$$

となる。このことを示そう、 $(\supset)$ は明らかである。 $(\supsetneq)$ であったと仮定しよう。すると、 $\sqrt{J_\alpha(R)} \not\subset P$ かつ $\sqrt{J_{e_1}(R) \cdots J_{e_n}(R)} \subset P$ を満たす R の斉次素イデアル P が存在する。すると、 R/P はふたたび $\mathbb{Z}^n$ -次数付き Noether 整域で 0 次が体であるような環となるので、 $C(R/P)$ が定義でき、 $C(R/P) \subset C(R)$ である。また、

$$P \supset \sqrt{J_{e_1}(R) \cdots J_{e_n}(R)} \supset J_{e_1}(R) \cdots J_{e_n}(R)$$

なので、 $J_{e_i}(R) \subset P$ である。このとき、 $e_i \notin C(R/P)$ より、 $C(R/P) \subsetneq C(R)$ であるが、 $C(R)$ と $C(R/P)$ が polyhedral であることから、 $\mathbf{b} \in \text{rel.int}(C(R)) \cap \mathbb{Q}^n = (\mathbb{R}_{>0})^n \cap \mathbb{Q}^n$ を $\mathbf{b} \notin C(R/P)$ を満たすように取ることができる。すると、 $C(R)$ が R の c-cone であることにより、

$$\sqrt{J_\alpha(R)} = \sqrt{J_{\mathbf{b}}(R)} \subset P$$

となり P の取り方に矛盾する。したがって $(=)$ が成り立つ。すると、

$$\begin{aligned}\sqrt{J_{\alpha}(R)} &= \sqrt{J_{e_1}(R) \cdots J_{e_n}(R)} \\ &= \sqrt{R_{ae_1} \cdots R_{ae_n} \cdot R} \\ &= \sqrt{R_{a\alpha_1 e_1} \cdots R_{a\alpha_n e_n} \cdot R}\end{aligned}$$

が成り立つので、

$$J_{\alpha}(R)^l \subset R_{a\alpha_1 e_1} \cdots R_{a\alpha_n e_n} \cdot R$$

となる正の整数 l が存在する。更に、十分大きな t に対して

$$S_t \subset J_{\alpha}(R)^l \subset R_{a\alpha_1 e_1} \cdots R_{a\alpha_n e_n} \cdot R$$

が成り立つ。与えられた S_t の元を右辺の元として表し、次数に注目すれば、 R_0 -加群としての等式

$$S_t = R_{a\alpha_1 e_1} \cdots R_{a\alpha_n e_n} \cdot S_{t-1} \quad (2.11)$$

が成り立つことがわかる。そこで、

$$S'_1 := R_{a\alpha_1 e_1} \cdots R_{a\alpha_n e_n}$$

とおく^{*8}と、 S は、 S_1 から S_{t-1} の R_0 -加群としての生成元によって生成される $R_0[S'_1]$ -加群であることがわかる。つまり、 $R_0[S'_1] \rightarrow S$ は finite である。したがって、 $R_0[S'_1] \subset R_C$ より S の各元は R_C 上整である。ゆえに、

$$S \subset \widetilde{R_C}$$

であり、特に

$$R_{a\alpha} \subset \widetilde{R_C}$$

である。このことから、任意の $x \in R_{\alpha}$ に対し $x^a \in R_{a\alpha}$ であり、 x^a は R_C 上整なので、 x も R_C 上整であることがわかる。すなわち、

$$R_{\alpha} \subset \widetilde{R_C}$$

である。 □

主張 2. 任意の $\beta \in \mathbb{N}_0^n \setminus \mathbb{N}^n$ 、すなわち $\beta \in \partial(\mathbb{R}_{\geq 0})^n$ に対して、 $R_{\beta} \subset \widetilde{R_C}$ である。

^{*8} S'_1 は単なる集合 $\{x_1 x_2 \cdots x_n \mid x_i \in R_{a\alpha_i e_i}\}$ と見做しても、左記の集合で生成される R_0 -加群と見做してもよい。

Proof. まず、

$$\widetilde{R}_{C(0)} = R_{(0)}$$

が成り立つことに注意する。なぜならば、任意の $a/b \in R_{(0)}$ (ただし、 a と b は R の斉次元) に対し、 $\deg ac, \deg bc \in \mathbb{N}^n$ となるような斉次元 $c \in R$ が取れる。このとき、主張 1 の結果から $ac, bc \in \widetilde{R}_C$ であり、したがって、 $a/b = ac/bc \in \widetilde{R}_{C(0)}$ となるからである。このことから、 $\widetilde{R}_{C(0)} = R_{(0)}$ であり、これは体上の n 変数 Laurent 多項式環になる。すなわち、ある体 K を用いて

$$\widetilde{R}_{C(0)} = R_{(0)} = K[t_1^{\pm 1}, \dots, t_n^{\pm 1}]$$

と書ける。このとき、必要ならば R の次数を取り直して $\deg t_i = \mathbf{e}_i$ が成り立つとしてよい。

さて、

$$H_1(\widetilde{R}_C) := \{P \in \text{Spec}(\widetilde{R}_C) \mid \text{ht} P = 1\}$$

とおくと、 R が整閉であるという仮定から $\widetilde{R}_C$ も整閉整域であるので、 $P \in H_1(\widetilde{R}_C)$ に対して $\widetilde{R}_{CP}$ は DVR (離散付値環) となり、

$$\widetilde{R}_C = \bigcap_{P \in H_1(\widetilde{R}_C)} \widetilde{R}_{CP}$$

が成り立つ。したがって、主張 2 を示すためには、任意の $x \in R_{\beta}$ と、任意の $P \in H_1(\widetilde{R}_C)$ について

$$v_P(x) \geq 0$$

が成り立つことが言えればよい (ただし、 v_P は $\widetilde{R}_{CP}$ の離散付値とする。)。次の二つのケース

- (1) $v_P(x_i) = 0$ を満たす斉次元 $x_i \in R_{a_i \mathbf{e}_i}$ (ただし $a_i \in \mathbb{N}$) が、すべての $i = 1, \dots, n$ に対して存在するとき。
- (2) 任意の $a \in \mathbb{N}$ と任意の $y \in R_{a \mathbf{e}_i}$ に対して $v_P(y) > 0$ を満たす i が存在するとき。

に場合分けして考える。

(1) のとき、

$$\deg(x \cdot x_1 \cdots x_n) \in \mathbb{N}^n$$

であることに注意する。すると、主張 1 より

$$x \cdot x_1 \cdots x_n \in \widetilde{R}_C \subset \widetilde{R}_{CP}$$

であるから、

$$\begin{aligned}
0 &\leq v_P(x \cdot x_1 \cdots x_n) \\
&= v_P(x) + v_P(x_1) + \cdots + v_P(x_n) \\
&= v_P(x)
\end{aligned}$$

となる。

(2) のときは $i = 1$ として一般性を失わない。このとき、任意の $a \in \mathbb{N}$ に対して、 $R_{ae_1} \subset P$ である。 P は斉次元を含む高さ 1 の素イデアルなので、 P は斉次イデアルである。したがって、

$$C(\widetilde{R}_C/P) \subset C(\widetilde{R}_C) = (\mathbb{R}_{\geq 0})^n$$

である。ここで、補題 2.3 および $R_C \rightarrow \widetilde{R}_C$ が finite であることから、 $C(\widetilde{R}_C)$ 自身が $\widetilde{R}_C$ の c-cone である。 $C(\widetilde{R}_C/P) \subsetneq C(\widetilde{R}_C)$ であるが、 $(\mathbb{R}_{\geq 0})^n$ の内点で $C(\widetilde{R}_C/P)$ に含まれない点が存在する。このことから、 $C(\widetilde{R}_C/P)$ は $(\mathbb{R}_{\geq 0})^n$ の内点を含まないことがわかる。したがって、 $(\mathbb{R}_{\geq 0})^n$ のある真の face σ が存在して

$$C(\widetilde{R}_C/P) \subset \sigma$$

が成り立つ。ここで、

$$\sigma = \mathbb{R}_{\geq 0}e_1 + \cdots + \mathbb{R}_{\geq 0}e_{n-1}$$

としても一般性を失わない。すると、 P は次数の第 n 成分が正であるような $\widetilde{R}_C$ の斉次元を全て含むが、 $\text{ht} P = 1$ より

$$P = \{ \text{次数の第 } n \text{ 成分が正であるような } \widetilde{R}_C \text{ の斉次元の有限和} \} \quad (2.12)$$

であることがわかる。

ここで、 $K[t_1^{\pm 1}, \dots, t_n^{\pm 1}]$ の整閉性より、 $\widetilde{R}_C \subset R \subset K[t_1^{\pm 1}, \dots, t_n^{\pm 1}]$ であるが、

$$A := K[t_1^{\pm 1}, \dots, t_{n-1}^{\pm 1}, t_n]$$

とおくと、 $\widetilde{R}_C \subset A$ である。すると、(2.12) より

$$t_n A \cap \widetilde{R}_C = P$$

となるので、

$$\widetilde{R}_{CP} \subset A_{t_n A}$$

である。このとき、 $Q(A) = Q(\widetilde{R}_C) = K(t_1, \dots, t_n)$ に注意すると、 $t_n A \in H_1(A)$ であることより両辺は共に $K(t_1, \dots, t_n)$ の DVR であるので、

$$\widetilde{R}_{CP} = A_{t_n A}$$

が成り立つ。

ところで、 $R \subset K[t_1^{\pm 1}, \dots, t_n^{\pm 1}]$ であるが、次数を見ると、

$$x \in R_{\beta} \subset R \subset K[t_1, \dots, t_n] \subset A \subset A_{t_n A} = \widetilde{R}_{CP}$$

が成り立つので、このとき、

$$v_P(x) \geq 0$$

である。 □

主張 1 と主張 2 により、 R の任意の斉次成分 $R_{\mathbf{a}}$ に対して $R_{\mathbf{a}} \subset \widetilde{R}_C$ が成り立つので、 $\widetilde{R}_C = R$ であり、

$$R_C \longrightarrow \widetilde{R}_C = R$$

は finite である。 □

3 主定理

補題 3.1. R は $\mathbb{Z}^n$ -次数付き Noether 整域で R_0 が体であり、 $\sigma \subset C(R)$ は R の c-cone であるとする。このとき、 σ の任意の face τ は R の c-cone である。

Proof. まず、 $\dim \sigma \leq 2$ のときは常に命題が成立することに注意する。なぜならば、2 次元の有理的な polyhedral cone の真の face は 1 次元の (有理的な) cone と 0 次元の cone であるが、それらは定義から明らかに c-cone となるためである。そこで、 $\dim \sigma \geq 3$ であるとしてよい。

σ の face であって R の c-cone ではない $\tau \subset \sigma$ が存在したと仮定して矛盾を導く。このとき、

$$\sqrt{J_a(R)} \neq \sqrt{J_b(R)}$$

となる $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \text{rel.int}(\tau) \cap \mathbb{Z}^n$ が存在する。ここで、 $\mathbf{c} \in \text{rel.int}(\sigma) \cap \mathbb{Z}^n$ を任意にとると、 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ は $\mathbb{R}$ 上一次独立である。 $\mathbf{a}', \mathbf{b}' \in \mathbb{Q}^n$ を $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \text{rel.int}(\mathbb{R}_{\geq 0}\mathbf{a}' + \mathbb{R}_{\geq 0}\mathbf{b}')$ となるように取り、

$$L := \mathbb{R}_{\geq 0}\mathbf{a}' + \mathbb{R}_{\geq 0}\mathbf{b}' + \mathbb{R}_{\geq 0}\mathbf{c}$$

とおく。 $\mathbf{a}', \mathbf{b}', \mathbf{c}$ は一次独立であるので、適当な一次変換によって

$$L = (\mathbb{R}_{\geq 0})^3$$

としてよく、また、 σ が R の c-cone であることから、補題 1.7.(3) によって L も $R|_L$ の c-cone となる。 L の真の face $\mathbb{R}_{\geq 0}\mathbf{a}' + \mathbb{R}_{\geq 0}\mathbf{b}'$ を $(\mathbb{R}_{\geq 0})^2$ と同一視すると、

$$\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \text{rel.int}((\mathbb{R}_{\geq 0})^2)$$

であるが、 $\sqrt{J_a(R)} \neq \sqrt{J_b(R)}$ なので、補題 1.7.(3) より

$$\sqrt{J_a(R|_L)} \neq \sqrt{J_b(R|_L)}$$

が成り立つ。しかし、定理 2.4 から $(\mathbb{R}_{\geq 0})^2$ は $R|_L$ の c-cone であるので矛盾。したがって、 σ の任意の face は R の c-cone である。 $\square$

定理 3.2 (主定理 (3)). R は $\mathbb{Z}^n$ -次数付き Noether 整域で R_0 が体であるものとする。 R の c-ideal J_1 と J_2 に対して、

$$J_1 \supset J_2 \iff \sigma_{J_1} \text{ は } \sigma_{J_2} \text{ の face}$$

が成り立つ。

Proof. ($\Leftarrow$) を示そう。 σ_{J_1} は σ_{J_2} の face なので、特に、

$$\sigma_{J_1} \subset \partial\sigma_{J_2}$$

である。すると、命題 1.9 より

$$J_1 \supset J_2$$

である。

($\Rightarrow$) を示す。 $J_1 = J_2$ のときは明らかであるので、 $J_1 \supsetneq J_2$ としてよい。すると、命題 1.15 より

$$\text{rel.int}(\sigma_{J_1}) \cap \text{rel.int}(\sigma_{J_2}) = \emptyset \quad (3.13)$$

である。[越前谷, 補題 3.1] より、 $\text{rel.int}(\sigma_{J_1}) \cap \mathbb{Q}^n$ の任意の点は $\text{rel.int}(\sigma_{J_2}) \cap \mathbb{Q}^n$ の集積点であることがわかる。すなわち、

$$\text{rel.int}(\sigma_{J_1}) \cap \mathbb{Q}^n \subset \overline{\text{rel.int}(\sigma_{J_2}) \cap \mathbb{Q}^n}$$

が成り立つ。したがって、 $\mathbb{Q}^n$ の稠密性より、

$$\overline{\text{rel.int}(\sigma_{J_1})} \subset \overline{\text{rel.int}(\sigma_{J_2})}$$

となるので、

$$\sigma_{J_1} \subset \sigma_{J_2}$$

である。すると、(3.13) より

$$\sigma_{J_1} \subset \partial\sigma_{J_2}$$

が成り立つ。

そこで、 σ_{J_1} を含む σ_{J_2} の最小の face F を取る^{*9}と、 F の最小性から

$$\sigma_{J_1} \not\subset \partial F$$

すなわち

$$\text{rel.int}(\sigma_{J_1}) \cap \text{rel.int}(F) \neq \emptyset$$

が成り立つ。

すると、補題 3.1 より F は R の c-cone となり、 F に対応する c-ideal は J_1 となるが、 σ_{J_1} の最大性から

$$\sigma_{J_1} = F$$

となり、 σ_{J_1} は σ_{J_2} の face となる。 □

^{*9} polyhedral cone σ がある polyhedral cone の真の face の和集合 $\cup \tau_i$ に含まれる場合、 $\sigma \subset \tau_j$ となる face τ_j は必ず存在する (cf. [石田, 定理 1.1.10])。

注意 3.3. 定理 3.2 より、 R の c-ideal J に対して、 σ_J の face は、ある c-ideal $J' \supset J$ が存在して、 $\sigma_{J'}$ という形をしていることもわかる。

系 3.4. R は $\mathbb{Z}^n$ -次数付き Noether 整域で R_0 が体であるものとする。このとき、 $R_0 \setminus \{0\}$ が R の単元全体と一致するならば、 $\{\sigma_J \mid J \text{ は } R \text{ の c-ideal}\}$ は fan の構造を持つ。

Proof. 任意の相異なる $\sigma_{J_1}, \sigma_{J_2} \in F(R)$ に対し、 $\sigma_{J_1} \cap \sigma_{J_2}$ が σ_{J_1} と σ_{J_2} 双方の face となっていることを示せばよい。

$$\sigma_{J_1} \cap \sigma_{J_2} \neq \emptyset$$

とする。 J_1 と J_2 に包含関係があるときは、定理 3.2 により明らかである。そこで、 J_1 と J_2 には包含関係がないとする。このとき、 $\mathbf{a} \in \sigma_{J_1} \cap \sigma_{J_2} \cap \mathbb{Q}^n$ に対して、 $\sqrt{J_{\mathbf{a}}(R)}$ は J_1 と J_2 を含むので、命題 1.16 により

$$\sigma_{J_1} \cap \sigma_{J_2} \subset \partial \sigma_{J_1}$$

である。すると、 $\sigma_{J_1} \cap \sigma_{J_2}$ を含む最小の σ_{J_1} の face F が存在し、 $F \in F(R)$ となる。さて、 σ_{J_1} と σ_{J_2} は有理的な polyhedral cone であるので、 $\sigma_{J_1} \cap \sigma_{J_2}$ も同様である。 F の最小性より、

$$\text{rel.int}(\sigma_{J_1} \cap \sigma_{J_2}) \cap \text{rel.int}(F) \neq \emptyset$$

であるので、補題 1.4 により、

$$\text{rel.int}(\sigma_{J_1} \cap \sigma_{J_2}) \cap \text{rel.int}(F) \cap \mathbb{Q}^n \neq \emptyset$$

が成り立つことに注意する。

F が σ_{J_1} の face であることから、注意 3.3 により、 J_1 を含む R の c-ideal J_3 が存在して

$$F = \sigma_{J_3}$$

と書けることがわかる。ここで、任意の $\mathbf{a} \in \text{rel.int}(\sigma_{J_1} \cap \sigma_{J_2}) \cap \text{rel.int}(F) \cap \mathbb{Q}^n$ に対し、 $\sqrt{J_{\mathbf{a}}(R)} = J_3$ であるが、 $\mathbf{a} \in \text{rel.int}(\sigma_{J_2})$ により、

$$J_2 \subset J_3$$

すなわち、 $F = \sigma_{J_3}$ が σ_{J_2} の face であることがわかる。よって $F = \sigma_{J_3}$ は σ_{J_1} と σ_{J_2} の face である。したがって、また、

$$F = \sigma_{J_1} \cap \sigma_{J_2}$$

が成り立つ。 □

系 3.5. R は $\mathbb{Z}^n$ -次数付き Noether 整域で、 R_0 が体であるものとし、 C を $F(R)$ の 1 次元 cone 全体の集合とすると、自然な単射

$$R_C \rightarrow R$$

は finite である。

Proof. $\mathbb{R}^n$ を $C(R) - C(R)$ に制限することによって、最短 chamber 分解

$$C(R) = \bigcup_{i=1}^l \sigma_i$$

を取ると、 $\{\sigma_1, \dots, \sigma_l\} \subset F(R)$ となっていることに注意する。すると、定理 3.2 により、 C は各 σ_i の edge 全体の集合である。したがって、各 σ_i に対して $R|_{\sigma_i}$ において命題が成り立つことを示せば十分である。

そこで、 $R = R|_{\sigma_i}$ 、 $\dim C(R) = n$ 、 $C = \{\sigma_i \text{ の edge}\}$ とする。ここで、次数が σ_i のある edge に属する元によって生成される n 次元 simplicial cone の全体を $\text{Sim}(C)$ とおくと、 $\text{Sim}(C)$ は R の c-cone の有限集合である。Caratheodory の定理により、

$$C(R) = \bigcup_{\tau \in \text{Sim}(C)} \tau$$

であることに注意する。すると、任意の $\tau \in \text{Sim}(C)$ に対して $R|_{\tau}$ で命題が成り立つことを示せば十分であることがわかる。このときは、 τ が simplicial であることによって、定理 2.4 を適用すれば、結論を得る。 $\square$

謝辞

本論文の作成にあたり、終始丁寧かつ熱心なご指導を頂きました指導教官の藏野和彦教授に深く感謝致します。並びに、日々の研究や学校生活を様々な形で支えて下さった本学理工学部数学科の先生方、同大学院理工学研究科の先輩方、同期、後輩の皆様方に感謝申し上げます、謝辞にかえさせていただきます。

参考文献

- [BH] W.Bruns and J.Herzog, *Cohen-Macaulay rings*, Cambridge University Press, 1993
- [越前谷] 越前谷彩香, $\mathbb{Z}^n$ 次数付環の chamber 分解について, 明治大学大学院理工学研究科修士論文, 2015
- [後藤-渡辺] 後藤四郎・渡辺敬一, 可換環論, 日本評論社, 2011
- [HK] Y.Hu and S.Keel, Mori dream space and GIT, *Michigan Math. J.* 48. 331-348., 2000
- [石田] 石田正典, トーリック多様体入門-扇の代数幾何-, 朝倉書店, 2000
- [川又] 川又雄二郎, 共立講座 21 世紀の数学 (19), 代数多様体論, 共立出版株式会社, 1997
- [Ma] H.Matsumura, *Commutative algebra*, The Benjamin/Cummings Publishing Co., Inc., Reading, Mass., 1980
- [Ok] S.Okawa, On images of Mori dream space, arXiv:1104.1326., to appear in *Math. Ann.*
- [高瀬] 高瀬友樹, 多重次数付環の様々なイデアルとその局所コホモロジーについて, 明治大学大学院理工学研究科修士論文, 2014