2014年度藏野研究室卒業論文
「$\mathfrak{S}_6$の部分群の分類」

明治大学理工学部数学科
内澤 京也
林原 昌司
望月 ふみか
海老名 智治

2015年2月26日

目 次

1 序 **2**

2 $\mathfrak{S}_6$ の類等式と正規部分群 **6**
- 2.1 $\mathfrak{S}_6$ の類等式 6
- 2.2 $\mathfrak{S}_6$ の正規部分群 6
- 2.3 $\mathfrak{S}_6$ の位数 $1, 720$ の部分群 8
- 2.4 $\mathfrak{S}_6$ の位数 360 の部分群 8

3 位数が 2 の冪の群 **8**
- 3.1 $\mathfrak{S}_6$ の位数 2 の部分群 8
- 3.2 $\mathfrak{S}_6$ の位数 16 の部分群 8
- 3.3 $\mathfrak{S}_6$ の位数 8 の部分群 9
- 3.4 $\mathfrak{S}_6$ の位数 4 の部分群 12

4 位数が 3^n, 2×3^n の部分群 **14**
- 4.1 $\mathfrak{S}_6$ の位数 3 の部分群 14
- 4.2 $\mathfrak{S}_6$ の位数 9 の部分群 15

4.3　$\mathfrak{S}_6$ の位数 6 の部分群 15
4.4　$\mathfrak{S}_6$ の位数 18 の部分群 18

5　位数が 5 の倍数の部分群　19
5.1　$\mathfrak{S}_6$ の位数 5 の部分群 19
5.2　$\mathfrak{S}_6$ の位数 10 の部分群 19
5.3　$\mathfrak{S}_6$ の位数 20 の部分群 20
5.4　$\mathfrak{S}_6$ の位数 180 の部分群 21
5.5　$\mathfrak{S}_6$ の位数 240 の部分群 22
5.6　$\mathfrak{S}_6$ の位数 90 の部分群 22
5.7　$\mathfrak{S}_6$ の位数 15 の部分群 23
5.8　$\mathfrak{S}_6$ の位数 45 の部分群 24
5.9　$\mathfrak{S}_6$ の位数 40 の部分群 24
5.10　$\mathfrak{S}_6$ の位数 80 の部分群 25
5.11　$\mathfrak{S}_6$ の位数 30 の部分群 26
5.12　$\mathfrak{S}_6$ の位数 120 の部分群 26
5.13　$\mathfrak{S}_6$ の位数 60 の部分群 27

6　その他の位数の部分群　28
6.1　$\mathfrak{S}_6$ の位数 144 の部分群 28
6.2　$\mathfrak{S}_6$ の位数 48 の部分群 29
6.3　$\mathfrak{S}_6$ の位数 12 の部分群 31
6.4　$\mathfrak{S}_6$ の位数 24 の部分群 35
6.5　$\mathfrak{S}_6$ の位数 36 の部分群 39
6.6　$\mathfrak{S}_6$ の位数 72 の部分群 42

1　序

1545 年、「アルス・マグナ (偉大なる術)」という本にて、三次方程式の解法がカルダノ (1501-1576) によって公表された。また、四次方程式の解法は、その弟子フェラーリ (1522-1565) の方法が同本で紹介されていて、四次までの一般の方程式の代数的解法は、他にも様々な人が挑戦し、それぞれの解法を導いている。しかし、一般の五次方程式について、これの代数的解法を導くことに成功した人は現れなかった。歴史が動いたのは「アルス・マグナ」出版から実に 200 年以上も後になる。1770 年、ラグランジュが方程式の代数的解法と根の置換の関係を考察し、方程式が代

数的に解ける条件を見出した。1799 年、そのラグランジュを参考に、ルフィニが五次以上の一般の方程式の代数的解法が存在しないことを論文にし、1824 年、アーベルの論文により、ルフィニの論文の欠陥が解決された。これにより、五次以上の一般の方程式に代数的解法が存在しないことが示されたのである。その後ガロアが、数学史史上初めてカテゴリー論的操作を行いその基礎を作った、後にガロア理論と呼ばれる理論によって、n 次方程式を代数的に解くことが出来るかどうかが、対称群の部分群の性質を調べることによって分かるということが示された。また、既に本研究室の先輩が $\mathfrak{S}_3$, $\mathfrak{S}_4$, $\mathfrak{S}_5$ の部分群を位数ごとに分類して、それを卒業論文 [2] にしている。その結果からも三次・四次方程式の可解性や、一般の五次方程式の非可解性を見出すことが出来る。そこで、これらの議論に興味を持った我々は、六次方程式の可解性の判定に繋がる、$\mathfrak{S}_6$ の部分群を位数ごとに分類することにした。以下に、位数ごとに、$\mathfrak{S}_6$ の部分群の共役類の個数、各共役類の代表元とその共役類に含まれる部分群の個数をまとめる。

この論文では、$\{1,2,\ldots,6\}$ の部分集合 $\{1,2,\ldots,n\}$ のみを動かす $\mathfrak{S}_6$ の部分群を $\mathfrak{S}_n$ と書く。$\mathfrak{A}_4 \times \mathfrak{S}_2$ は、$\{1,2,3,4\}$ の偶置換と $\{5,6\}$ の置換の直積集合である。

位数	共役類の代表元	共役な群の個数
1	$\{e\}$	1
2	$<(12)>$	15
	$<(12)(34)>$	45
	$<(12)(34)(56)>$	15
3	$<(123)>$	20
	$<(123)(456)>$	20
4	$G_1^{(4)} := \{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$	15
	$G_2^{(4)} := \{e, (12), (56), (12)(56)\}$	45
	$G_3^{(4)} := \{e, (12), (34)(56), (12)(34)(56)\}$	45
	$G_4^{(4)} := \{e, (13)(24), (12)(34)(56), (14)(23)(56)\}$	45
	$G_5^{(4)} := <(1324)>$	45
	$G_6^{(4)} := \{e, (12)(34), (12)(56), (34)(56)\}$	15
	$G_7^{(4)} := <(1324)(56)>$	45
5	$<(12345)>$	36
6	$<(123456)>$	60
	$<(123)(45)>$	60
	$<(123), (23)>$	20
	$<(123), (23)(45)>$	60
	$<(123)(456), (23)(56)>$	60
	$<(123)(456), (14)(26)(35)>$	20
8	$G_1^{(8)} := <G_1^{(4)}, (12)>$	45
	$G_2^{(8)} := <G_1^{(4)}, (56)>$	15
	$G_3^{(8)} := <G_1^{(4)}, (12)(56)>$	45
	$G_4^{(8)} := <(12), (34), (56)>$	15
	$G_5^{(8)} := <(12), (34), (13)(24)(56)>$	45
	$G_6^{(8)} := <(1324), (56)>$	45
	$G_7^{(8)} := <(1324), (12)(56)>$	45
9	$<(123), (456)>$	10
10	$<(12345), (25)(34)>$	36
12	$G_1^{(12)} := \mathfrak{S}_3 \times \mathfrak{S}_2$	60
	$G_2^{(12)} := <(13)(24), (145236)>$	60
	$G_3^{(12)} := \mathfrak{A}_4$	15
	$G_4^{(12)} := <G_6^{(4)}, (135)(246)>$	15
15		0

位数	共役類の代表元	共役な群の個数
16	$< G_1^{(4)}, (12), (56) >$	45
18	$< (123), (456), (12) >$	20
	$< (123), (456), (12)(45) >$	10
	$< (123), (456), (14)(25)(36) >$	20
20	$< (12345), (1342) >$	36
24	$G_1^{(24)} := \mathfrak{S}_4$	15
	$G_2^{(24)} := \mathfrak{A}_4 \times \mathfrak{S}_2$	15
	$G_3^{(24)} := (\mathfrak{S}_4 \times \mathfrak{S}_2) \cap \mathfrak{A}_6$	15
	$G_4^{(24)} := < G_4^{(8)}, (135)(246) >$	15
	$G_5^{(24)} := < G_4^{(12)}, (13)(24) >$	15
	$G_6^{(24)} := < G_4^{(12)}, (16)(25)(34) >$	15
30		0
36	$< (123), (456), (12), (56) >$	10
	$< (135), (246), (13)(24), (12)(34)(56) >$	10
	$N_{\mathfrak{S}_6}(< (123), (456) >) \cap \mathfrak{A}_6$	10
40		0
45		0
48	$\mathfrak{S}_4 \times \mathfrak{S}_2$	15
	$N_{\mathfrak{S}_6}(G_6^{(4)})$	15
60	$\mathfrak{A}_5$	6
	$< (12345), (25)(34), (25)(16) >$	6
72	$N_{\mathfrak{S}_6}(< (123), (456) >)$	10
80		0
90		0
120	$\mathfrak{S}_5$	6
	$< (12345), (2354), (25)(16) >$	6
144		0
180		0
240		0
360	$\mathfrak{A}_6$	1
720	$\mathfrak{S}_6$	1

以下の章で、この分類に関して証明を与える。

2　$\mathfrak{S}_6$ の類等式と正規部分群

${}^{\#}\mathfrak{S}_6 = 720$ であるので、$\mathfrak{S}_6$ の部分群の位数は、1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 45, 48, 60, 72, 80, 90, 120, 144, 180, 240, 360, 720 のどれかである。

2.1　$\mathfrak{S}_6$ の類等式

$\mathfrak{S}_6$ の共役類は、型の等しい元の集合である。以下、$\mathfrak{S}_6$ の元の型、型がそうなる元の個数、その元の位数を表にまとめたものである。

型	個数	位数
$[1,1,1,1,1,1]$	1	1
$[2,1,1,1,1]$	${}_6C_2 = 15$	2
$[2,2,1,1]$	${}_6C_2 \times {}_4C_2 \times 1/2! = 45$	2
$[2,2,2]$	${}_6C_2 \times {}_4C_2 \times 1/3! = 15$	2
$[3,1,1,1]$	${}_6C_3 \times 2! = 40$	3
$[3,2,1]$	${}_6C_3 \times {}_3C_2 \times 2! = 120$	6
$[3,3]$	${}_6C_3 \times {}_3C_3 \times 1/2! \times 2! \times 2! = 40$	3
$[4,1,1]$	${}_6C_4 \times 3! = 90$	4
$[4,2]$	${}_6C_4 \times 3! = 90$	4
$[5,1]$	${}_6C_5 \times 4! = 144$	5
$[6]$	$1 \times 5! = 120$	6

2.2　$\mathfrak{S}_6$ の正規部分群

H は $\mathfrak{S}_6$ の正規部分群とする。H はいくつかの共役類の和集合になっていて、かつ単位元を含むことから、取り得る H の位数は、

$$h = 1 + 15a_1 + 45a_2 + 15a_3 + 40a_4 + 120a_5 + 40a_6 + 90a_7 + 90a_8 + 144a_9 + 120a_{10}$$

である。ただし、$a_1, a_2, \ldots, a_{10} = 1$ または 0 である。ここで、上の 11 個の共役類に対して、H が上から $i+1$ 番目の共役類を含むときに $a_i = 1$、そうでないとき $a_i = 0$ としている。$h | 720$ に注意する。$h \neq 1,\ 720$ としよう。

補題 2.1　(1) $a_1 = 1$ ならば、$H = \mathfrak{S}_6$ である。

(2) $a_2 = 1$ ならば、$\mathfrak{A}_6 \subset H$ である。よって、$H = \mathfrak{A}_6$ または $\mathfrak{S}_6$ である。

(3) $a_3 = 1$ ならば、$H = \mathfrak{S}_6$ である。

証明 (1) について。$a_1 = 1$ のとき、H は、型 $[2, 1, 1, 1, 1]$ の元を全て含むので、H は全ての互換を含む。よって、あみだくじの原理より $H = \mathfrak{S}_6$ である。

(2) について。$a_2 = 1$ なので、H は、型 $[2, 2, 1, 1]$ の元を全て含む。$\mathfrak{A}_6$ は、2 つの互換の積全体で生成される。それが $(ij)(kl)$ の形のときは、H はこの元を含む。また、

$$(ij)(jk) = \{(ij)(mn)\}\{(mn)(jk)\}$$

より H はこの元を含む [1]。よって、$H = \mathfrak{A}_6$ または $\mathfrak{S}_6$ である。

(3) について。$a_3 = 1$ ならば、H は、型 $[2, 2, 2]$ の元を全て含む。
$(ij)(kl)(mn), (mn)(ik)(jl) \in H$ であるので、

$$\{(ij)(kl)(mn)\}\{(mn)(ik)(jl)\} = (il)(kj) \in H$$

であり、$a_2 = 1$ になる。よって、$H = \mathfrak{A}_6$ または $\mathfrak{S}_6$ である。また H は奇置換 $(12)(34)(56)$ を含むので、$H = \mathfrak{S}_6$ であることがわかった。 **証明終**

次のように場合分けする。

(1) $a_9 = 0$ とする。このとき、$h \equiv 1 \pmod 5$ である。$h|720$ より、$h = 6$, 16, 36 のどれかであるので、$a_1 = 1$ または $a_3 = 1$ となる。このとき、補題 2.1 で示したように $H = \mathfrak{S}_6$ である。よって ${}^{\#}H = 720$ となるが、これは矛盾する。

(2) $a_9 = 1$ であり、$h \equiv 5 \pmod{10}$ とする。$h \geq 145$ となるが、$h \mid 720$ でこれをみたすものはない。

(3) $a_9 = 1$ であり、$h \equiv 0 \pmod{10}$ とする。a_1, a_2, a_3 の中に 1 がある。すると補題 2.1 で示したように $\mathfrak{A}_6 \subset H$ である。よって、$H = \mathfrak{A}_6$ または $H = \mathfrak{S}_6$ となる。以上より、次がわかった。

定理 2.2 $\mathfrak{S}_6$ の正規部分群は $\{e\}$, $\mathfrak{A}_6$, $\mathfrak{S}_6$ の 3 つである。

[1] この論文では、$i, j, k, l, \ldots$ と書けば、それは $\{1, 2, \ldots, 6\}$ 内の異なる文字をあらわすものとする。

2.3 $\mathfrak{S}_6$ の位数 $1,\ 720$ の部分群

$\mathfrak{S}_6$ の位数 1 の部分群は $\{e\}$ のみである。また、$\mathfrak{S}_6$ の位数 720 の部分群は $\mathfrak{S}_6$ のみである。$\{e\}$ と $\mathfrak{S}_6$ は、正規部分群である。

2.4 $\mathfrak{S}_6$ の位数 360 の部分群

H は、$\mathfrak{S}_6$ の位数 360 の部分群とする。$[\mathfrak{S}_6 : H] = 720/360 = 2$ であるので、$H \lhd \mathfrak{S}_6$ となる。よって、$\mathfrak{S}_6$ の位数 360 の部分群は $H = \mathfrak{A}_6$ のみで, これは正規部分群である。

3 位数が 2 の冪の群

3.1 $\mathfrak{S}_6$ の位数 2 の部分群

H は、$\mathfrak{S}_6$ の位数 2 の部分群とする。H は巡回群なので、ある位数 2 の元 σ によって $H = <\sigma> = \{e, \sigma\}$ と表せる。$\mathfrak{S}_6$ の位数 2 の元は、(ij), $(ij)(kl)$, $(ij)(kl)(mn)$ のいずれかの形をしている。よって、H は、$H_1 = <(12)>$, $H_2 = <(12)(34)>$, $H_3 = <(12)(34)(56)>$ のいずれかと共役である。

(1) H_1 と共役のとき。(12) の中の数の組み合わせの個数だけ群があるので、${}_6C_2 = 15$ 個存在する。

(2) H_2 と共役のとき。$(12)(34)$ の数字の組み合わせを考えて、${}_6C_2 \times {}_4C_2 \div 2 = 45$ 個存在する。

(3) H_3 と共役のとき。$(12)(34)(56)$ の数字の組み合わせを考えて、${}_6C_2 \times {}_4C_2 \div 6 = 15$ 個存在する。

3.2 $\mathfrak{S}_6$ の位数 16 の部分群

ここで用いる Sylow の定理を紹介する。

定理 3.1 (Sylow の定理) p は素数、G は位数 $p^k m$ の有限群であり、m は p の倍数ではないとする。

(第 1 定理) G は位数 p^k の部分群を含む。(この部分群を G の p-Sylow 部分群と呼ぶ。)

(第 2 定理) G の部分群 H の位数が p の冪ならば、H はある p-Sylow 部分群に含まれる。

(第 3 定理) G の p-Sylow 部分群は全て共役である。

(第 4 定理) G の p-Sylow 部分群の個数は m の約数であり、p を法として 1 と合同である。

$\mathfrak{S}_4$ の位数 8 の部分群の議論から、$V := \{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ とおくと、$< V, (12) >$ は $\mathfrak{S}_6$ の位数 8 の部分群である。ここで、$< (56) >$ は $\mathfrak{S}_6$ の位数 2 の部分群で、$< V, (12) >$ の各元とは台が交わっていないので、

$$
\begin{aligned}
G_1^{(16)} &:= < V, (12), (56) > \\
&= \left\{ \begin{array}{cccc} e, & (12)(34), & (13)(24), & (14)(23), \\ (12), & (34), & (1324), & (1423), \\ (56), & (12)(34)(56), & (13)(24)(56), & (14)(23)(56), \\ (12)(56), & (34)(56), & (1324)(56), & (1423)(56) \end{array} \right\}
\end{aligned}
$$

は、$\mathfrak{S}_6$ の位数 16 の部分群の 1 つとなる。

ここで $\mathfrak{S}_6$ の位数 720 の素因数分解を考えると、Sylow の定理から $\mathfrak{S}_6$ の位数 16 の部分群は $\mathfrak{S}_6$ の 2-Sylow 部分群であり、その全てが $G_1^{(16)}$ と共役であることが分かる。
$\mathfrak{S}_4$ に位数 8 の部分群が 3 個あることに注意して、数字の選び方から、$G_1^{(16)}$ と共役な群は $\mathfrak{S}_6$ 内に 45 個存在する。

3.3 $\mathfrak{S}_6$ の位数 8 の部分群

H は、$\mathfrak{S}_6$ の位数 8 の部分群とする。Sylow の定理より、H は $G_1^{(16)}$ と共役な群に含まれることが分かる。逆に、$\mathfrak{S}_6$ の任意の位数 8 の部分群 H に対して、それと共役な群が $G_1^{(16)}$ に含まれる。よって、共役類の代表元を求めるときは、H として、$G_1^{(16)}$ の位数 8 の部分群であるものを考えれば十分であることが分かる。
以下、この $G_1^{(16)}$ に対して、H と V の共通部分の元の個数について場合分けをして考えてゆく。ここで、V は $G_1^{(16)}$ の正規部分群であり、商群

$G_1^{(16)}/V$ が考えられることに注意すると、$H/H\cap V \subset G_1^{(16)}/V$ が得られる。また、$G_1^{(16)}/V$ の位数は 4 であることから、H と V の共通部分の元の個数は 2 個の場合と 4 個の場合が考えられることが分かる。

(1) $^{\#}(H\cap V)=4$ の場合、H/V は $G_1^{(16)}/V$ の位数 2 の部分群となる。$G_1^{(16)}/V$ の位数 2 の部分群は $<\overline{(12)}>, <\overline{(56)}>, <\overline{(12)(56)}>$ の 3 つであることから、$G_1^{(16)}$ の位数 8 の部分群として、

$$\begin{aligned} G_1^{(8)} &:= <V,(12)> \\ &= \left\{ \begin{array}{cccc} e, & (12)(34), & (13)(24), & (14)(23), \\ (12), & (34), & (1324), & (1423) \end{array} \right\} \\ G_2^{(8)} &:= <V,(56)> \\ &= \left\{ \begin{array}{cccc} e, & (12)(34), & (13)(24), & (14)(23), \\ (56), & (12)(34)(56), & (13)(24)(56), & (14)(23)(56) \end{array} \right\} \\ G_3^{(8)} &:= <V,(12)(56)> \\ &= \left\{ \begin{array}{cccc} e, & (12)(34), & (13)(24), & (14)(23), \\ (12)(56), & (34)(56), & (1324)(56), & (1423)(56) \end{array} \right\} \end{aligned}$$

の 3 つが得られる。この 3 つの群が含んでいる互換の個数に注目すれば、これら 3 つの群は互いに共役ではないことが分かる。以下、この 3 つの群と $\mathfrak{S}_6$ 内で共役な群の個数を調べる。

まず、$G_1^{(8)}$ について、$\mathfrak{S}_4$ の位数 8 の部分群の個数は 3 つであることに注意すると、数字の選び方から $\mathfrak{S}_6$ 内には $G_1^{(8)}$ と共役な群は 45 個存在することが分かる。次に、$G_2^{(8)}$ について、V は $\mathfrak{S}_4$ の正規部分群であることに注意すると、数字の選び方から $\mathfrak{S}_6$ 内には $G_2^{(8)}$ と共役な群は 15 個存在することが分かる。最後に、$G_3^{(8)}$ について、これは $G_1^{(8)}$ と共役な群 1 つにつき 1 つずつ見つかるので、$\mathfrak{S}_6$ 内には $G_3^{(8)}$ と共役な群は 45 個存在することが分かる。

(2) $^{\#}(H\cap V)=2$ の場合、$H/H\cap V = G_1^{(16)}/V$ となる。また、H は $G_1^{(16)}$ の指数 2 の部分群であるので、$(1324)^2=(12)(34)$ から、$(12)(34)$ は H に含まれることが分かる。よって、$H\cap V = <(12)(34)>$ であり、

$$H/<(12)(34)> = G_1^{(16)}/V = <\overline{(12)}, \overline{(56)}>$$

が得られ、$G_1^{(16)}$ 内で、

$$^{\#}(H\cap V) = {}^{\#}(H\cap(12)V) = {}^{\#}(H\cap(56)V) = {}^{\#}(H\cap(12)(56)V) = 2$$

となることが分かった。$V \cup (12)V = G_1^{(8)}$ となることに注意して、$\mathfrak{S}_4$ の位数 4 の部分群の議論 [2] から、$H \cap (12)V$ は、$\{(12),(34)\}$ となる場合と、$\{(1324),(1423)\}$ となる場合の 2 通りが考えられる。

(a) $(12),(34) \in H$ の場合、$<(12),(34)>$ は H に含まれる。

　ここで、$<(12),(34)>$ は $G_1^{(16)}$ の正規部分群であることから、商群 $G_1^{(16)}/<(12),(34)>$ を考えることが出来る。その位数 2 の部分群 3 つに対応して、$G_1^{(16)}$ の位数 8 の部分群 3 つ、$G_1^{(8)}$ と、

$$\begin{aligned} G_4^{(8)} &:= <(12),(34),(56)> \\ &= \left\{ \begin{array}{cccc} e, & (12)(34), & (12), & (34), \\ (56), & (12)(34)(56), & (12)(56), & (34)(56) \end{array} \right\} \\ G_5^{(8)} &:= <(12),(34),(13)(24)(56)> \\ &= \left\{ \begin{array}{cccc} e, & (12)(34), & (12), & (34), \\ (13)(24)(56), & (14)(23)(56), & (1324)(56), & (1423)(56) \end{array} \right\} \end{aligned}$$

が得られ、これらの群に含まれる互換と 4 巡回元の個数に注目すれば、$G_1^{(8)}$ から $G_5^{(8)}$ までの 5 つの群は互いに共役ではないことが分かる。以下、この 2 つの群と $\mathfrak{S}_6$ 内で共役な群の個数を調べる。

　$G_4^{(8)}$ について、$\mathfrak{S}_6$ 内での台の交わらない 3 つの互換の選び方から、$\mathfrak{S}_6$ 内に $G_4^{(8)}$ と共役な群は 15 個存在する。次に $G_5^{(8)}$ について、台の交わらない 4 巡回元と互換の積は $\mathfrak{S}_6$ に 90 個存在し、2 個毎に 1 つ群が存在するので、$\mathfrak{S}_6$ 内に $G_5^{(8)}$ と共役な群は 45 個存在する。

(b) $(1324),(1423) \in H$ の場合、$<(1324)>$ は H に含まれる。

　ここで、$<(1324)>$ は $G_1^{(16)}$ の正規部分群であることから、商群 $G_1^{(16)}/<(1324)>$ を考えることが出来る。その位数 2 の部分群 3 つに対応して、$G_1^{(16)}$ の位数 8 の部分群 3 つ、$G_1^{(8)}$ と、

$$\begin{aligned} G_6^{(8)} &:= <(1324),(56)> \\ &= \left\{ \begin{array}{cccc} e, & (12)(34), & (1324), & (1423), \\ (56), & (12)(34)(56), & (1324)(56), & (1423)(56) \end{array} \right\} \\ G_7^{(8)} &:= <(1324),(12)(56)> \\ &= \left\{ \begin{array}{cccc} e, & (12)(34), & (1324), & (1423), \\ (13)(24)(56), & (14)(23)(56), & (12)(56), & (34)(56) \end{array} \right\} \end{aligned}$$

が得られ、これらの群に含まれている互換と4巡回元の個数に注目すれば、$G_1^{(8)}$ から $G_7^{(8)}$ までの7つの群は互いに共役ではないことが分かる。この2つの群と共役な群は、$\mathfrak{S}_6$ 内に90個存在する4巡回元2つにつき1つずつ存在するので、$\mathfrak{S}_6$ 内に $G_6^{(8)}, G_7^{(8)}$ と共役な群はそれぞれ45個ずつ存在する。

3.4 $\mathfrak{S}_6$ の位数4の部分群

H は、$\mathfrak{S}_6$ の位数4の部分群とする。Sylowの定理より、H は $G_1^{(16)}$ と共役な群に含まれることが分かる。逆に、$\mathfrak{S}_6$ の任意の位数4の部分群 H に対して、それと共役な群が $G_1^{(16)}$ に含まれる。よって、共役類の代表元 H として、$G_1^{(16)}$ の位数4の部分群であるものを考えれば十分である。以下、H から $G_1^{(16)}$ への包含写像と $G_1^{(16)}$ から $G_1^{(16)}/V$ への自然な写像の合成写像 ϕ を考える。この写像の核である $H \cap V$ の元の個数について、場合分けをして考えてゆく。

(1) $^{\#}(H \cap V) = 4$ の場合、$G_1^{(4)} := V = H$ となる。

$\mathfrak{S}_4$ 内で V は正規部分群であることに注意すると、数字の選び方から、$\mathfrak{S}_6$ 内には $G_1^{(4)}$ と共役な群は15個存在する。

(2) $^{\#}(H \cap G_1^{(4)}) = 1$ の場合、ϕ は単射となる。

ここで、H も $G_1^{(16)}/G_1^{(4)}$ も共に位数は4であることに注意すると、ϕ は全射にならなければいけない。よって、

$$^{\#}(H \cap G_1^{(4)}) = {}^{\#}(H \cap (12)G_1^{(4)}) = {}^{\#}(H \cap (56)G_1^{(4)}) = {}^{\#}(H \cap (12)(56)G_1^{(4)}) = 1$$

となることが分かった。また、H には $(12)(34)$ は含まれないが、$G_1^{(16)}$ の位数4の元を2乗すると全て $(12)(34)$ となることから、H には位数4の元は含まれないことが分かる。以上のことから H には、(12) か (34) のどちらかと、$(12)(56)$ と $(34)(56)$ のどちらかが含まれる。このことから、$G_1^{(16)}$ の位数4の部分群として、

$$\begin{aligned}
\{e, (12), (12)(56), (56)\} &= <(12), (56)> =: G_2^{(4)} \\
\{e, (12), (34)(56), (12)(34)(56)\} &= <(12), (34)(56)> =: G_3^{(4)} \\
\{e, (34), (12)(56), (12)(34)(56)\} &= <(34), (12)(56)> \\
&= \{(13)(24)\}G_3^{(4)}\{(13)(24)\}^{-1} \\
\{e, (34), (34)(56), (56)\} &= <(34), (56)> \\
&= \{(13)(24)\}G_2^{(4)}\{(13)(24)\}^{-1}
\end{aligned}$$

が得られる。これらの群に含まれている互換の個数に注目すれば、$G_1^{(4)}$ から $G_3^{(4)}$ までの 3 つの群は互いに共役ではないことが分かる。数字の選び方に注意すれば、$G_2^{(4)}$ と共役な群は $\mathfrak{S}_6$ 内に 45 個、$G_3^{(4)}$ と共役な群も $\mathfrak{S}_6$ 内に 45 個存在することが分かる。

(3) ${}^{\#}(H \cap G_1^{(4)}) = 2$ の場合、$G_1^{(16)}$ の元 (34) で共役を取ると、$(12)(34)$ が H に含まれる場合と、$(13)(24)$ が H に含まれる場合の 2 通りを考えれば十分であることが分かるので、この 2 通りについて場合分けをして考えてゆく。

(a) $(13)(24) \in H$ とする。ここで、${}^{\#}(H \cap G_1^{(4)}) = {}^{\#}\operatorname{Ker}\phi = 2$ の場合、${}^{\#}\operatorname{Im}\phi = 2$ となることから、

$$\begin{aligned} &{}^{\#}(H \cap (12)G_1^{(4)}) = 2 \\ &{}^{\#}(H \cap (56)G_1^{(4)}) = 2 \\ &{}^{\#}(H \cap (12)(56)G_1^{(4)}) = 2 \end{aligned}$$

の中のただ一つのみが起こる。更に、H の位数 4 は素数の 2 乗であることから、H はアーベル群である。そのことから、${}^{\#}(H \cap (56)G_1^{(4)}) = 2$ が得られる。この時、$G_1^{(16)}$ の位数 4 の部分群として、

$$\begin{aligned} <(13)(24),(56)> &= <(13)(24),(13)(24)(56)> \\ &= (152643)G_3^{(4)}(152643)^{-1} \\ <(13)(24),(12)(34)(56)> &= <(13)(24),(14)(23)(56)> \\ &= \{e,(13)(24),(12)(34)(56),(14)(23)(56)\} \\ &=: G_4^{(4)} \end{aligned}$$

が得られる。台の交わらない 3 つの互換の積の個数に注目すれば、$G_4^{(4)}$ は、$G_1^{(4)}$ から $G_3^{(4)}$ までの群とは共役ではないことが分かる。この群は、$G_1^{(4)}$ の単位元ではない 2 元に (56) を掛けた形をしているので、$\mathfrak{S}_6$ 内には $G_1^{(4)}$ と共役な群は 15 個存在していることに注意すると、$\mathfrak{S}_6$ 内には $G_4^{(4)}$ と共役な群は 45 個存在する。

(b) $(12)(34) \in H$ の場合、$<(12)(34)>$ は、$G_1^{(16)}$ の正規部分群となることに注意すると、$G_1^{(16)}/<(12)(34)>$ の位数 2 の部分群と、$G_1^{(16)}$ の位数 4 の部分群で $<(12)(34)>$ を含むものが 1 対 1 に対

応する。ここで、$G_1^{(16)}$ の任意の元を 2 乗した元は、$<(12)(34)>$ に含まれることから、$G_1^{(16)}/<(12)(34)>$ の位数 2 の部分群は 7 つ存在する。よって、$G_1^{(16)}$ の位数 4 の部分群として、$G_1^{(4)}$ と、以下の 6 つが見つかる。

$$\begin{aligned}
\{e,(12)(34),(12),(34)\} &= \{(35)(46)\}G_2^{(4)}\{(35)(46)\}^{-1} \\
\{e,(12)(34),(1324),(1423)\} &=: G_5^{(4)} \\
\{e,(12)(34),(56),(12)(34)(56)\} &= \{(15)(26)\}G_3^{(4)}\{(15)(26)\}^{-1} \\
\{e,(12)(34),(13)(24)(56),(14)(23)(56)\} &= (23)G_4^{(4)}(23)^{-1} \\
\{e,(12)(34),(12)(56),(34)(56)\} &=: G_6^{(4)} \\
\{e,(12)(34),(1324)(56),(1423)(56)\} &=: G_7^{(4)}
\end{aligned}$$

$G_5^{(4)}, G_7^{(4)}$ は、位数 4 の元が含まれていることから、$G_1^{(4)}$ から $G_4^{(4)}$ までの群とは共役ではなく、更に $G_7^{(4)}$ の位数 4 の元は、$G_5^{(4)}$ の位数 4 の元に台の交わらない互換を掛けたものであるので、$G_5^{(4)}$ と $G_7^{(4)}$ は共役ではない。$G_6^{(4)}$ は台の交わらない 2 つの互換の積である元の個数に注目すると、$G_1^{(4)}$ 以外の群とは共役ではない。更に、$G_1^{(4)}$ は 4 つの数字のみを入れ替えるが、$G_6^{(4)}$ は 6 つの数字全てを入れ替えるので、$G_1^{(4)}$ と $G_6^{(4)}$ は共役ではないことが分かる。以上より、$G_1^{(4)}$ から $G_7^{(4)}$ までの 7 つの群は互いに共役ではないことが分かった。以下、$G_5^{(4)}$ から $G_7^{(4)}$ の 3 つの群と、$\mathfrak{S}_6$ 内で共役である群の個数について調べてゆく。$G_5^{(4)}$ と $G_7^{(4)}$ について、4 巡回元と、台の交わらない 4 巡回元と互換の積の型の元は、それぞれ $\mathfrak{S}_6$ 内に 90 個ずつ存在し、2 個ずつが群に入るので、$\mathfrak{S}_6$ 内に $G_5^{(4)}, G_7^{(4)}$ と共役な群はそれぞれ 45 個ずつ存在する。最後に $G_6^{(4)}$ について、台の交わらない互換 3 つを決めれば、群が 1 つ見つかることに注意すると、数字の選び方から、$\mathfrak{S}_6$ 内に $G_6^{(4)}$ と共役な群は 15 個存在する。

4 位数が 3^n, 2×3^n の部分群

4.1 $\mathfrak{S}_6$ の位数 3 の部分群

H は、$\mathfrak{S}_6$ の位数 3 の部分群とする。H は巡回群なので、

$$\mathrm{ord}(\sigma)=3,\ H=\{e,\sigma,\sigma^2\}$$

を満たす位数3の元$\sigma \in \mathfrak{S}_6$が存在する。$\mathfrak{S}_6$の位数3の元は$(ijk)$, $(ijk)(lmn)$のいずれかの形をしている。よって、H は、$H_1 = \{e, (123), (132)\}$ または $H_2 = \{e, (123)(456), (132)(465)\}$ のどちらかと共役になる。

(1) H_1 と共役なとき。(ijk) の形の元は 40 個あるので、H_1 と共役な群は $40 \div 2 = 20$ 個ある。

(2) H_2 と共役なとき。$(ijk)(lmn)$ の形の元は 40 個あるので、H_2 と共役な群は $40 \div 2 = 20$ 個ある。

4.2 $\mathfrak{S}_6$ の位数 9 の部分群

H は、$\mathfrak{S}_6$ の位数 9 の部分群とする。$^{\#}\mathfrak{S}_6 = 3^2 \times 80$ なので、H は $\mathfrak{S}_6$ の 3-Sylow 部分群である。Sylow の定理より、H は $< (123), (456) >$ と共役なので、$\mathfrak{S}_6$ の位数 9 の部分群は ${}_6\mathrm{C}_3 \div 2 = 10$ 個ある。

4.3 $\mathfrak{S}_6$ の位数 6 の部分群

H は、$\mathfrak{S}_6$ の位数 6 の部分群とする。

(1) H が巡回群の場合。位数 6 の元は $(ijklmn)$, $(ijk)(lm)$ のいずれかの形をしている。よって、H は、

$$H_1 = \{e, (123456), (135)(246), (14)(25)(36), (153)(264), (165432)\}$$

または

$$H_2 = \{e, (123)(45), (132), (45), (123), (132)(45)\}$$

のどちらかと共役になる。

(a) H_1 と共役なとき。$(ijklmn)$ の形の元は 120 個あるので、H_1 と共役な群は $120 \div 2 = 60$ 個ある。

(b) H_2 と共役なとき。$(ijk)(lm)$ の形の元は 120 個あるので、H_2 と共役な群は $120 \div 2 = 60$ 個ある。

(2) H が巡回群でない場合。このとき、H はアーベル群ではない。位数 3 の元は (ijk), $(ijk)(lmn)$ のいずれかの形をしている。よって、Sylow の定理より $H \ni (ijk)$ または $H \ni (ijk)(lmn)$ のどちらか一方が起こる。

(a) $H \ni (ijk)$ のとき。H を共役でずらして $H \ni (123)$ としてよい。$[H : <(123)>] = 6 \div 3 = 2$ なので $H \rhd <(123)>$ である。${}^{\#}H = 2 \times 3$ であるから Sylow の定理より H は位数 2 の元 σ を含む。$\xi = (123)$ とおく。$\sigma\xi\sigma^{-1} = \xi^l$ (ただし、$l = 0, 1, 2$) と書ける。$l = 0$ なら $\xi = e$ となり矛盾。$l = 1$ なら $\sigma\xi = \xi\sigma$ となり $\mathrm{ord}(\sigma\xi) = 6$ であるから [2]、H が巡回群になり矛盾。よって、$l = 2$ である。このとき、$\sigma\xi\sigma^{-1} = (132)$ であり、$(\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3))$ は $(1, 3, 2)$, $(3, 2, 1)$ または、$(2, 1, 3)$ のいずれかである。

(i) $(\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3)) = (1, 3, 2)$ の場合。σ は (23), $(23)(45)$, $(23)(46)$ または、$(23)(56)$ のいずれかである。このとき、H は、

$$<(123), (23)> = \{e, (123), (132), (23), (13), (12)\}$$

または

$$<(123), (23)(ab)> = \{e, (123), (132), (23)(ab), (13)(ab), (12)(ab)\}$$

(ただし $4 \leq a < b \leq 6$) のいずれかとなる。

(ii) $(\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3)) = (3, 2, 1)$ の場合。σ は (13), $(13)(45)$, $(13)(46)$ または、$(13)(56)$ のいずれかである。このとき、(i) と同じ群になる。

(iii) $(\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3)) = (2, 1, 3)$ の場合。σ は (12), $(12)(45)$, $(12)(46)$ または、$(12)(56)$ のいずれかである。このときも、(i) と同じ群になる。

よって、$<(123), (23)>$ と共役な群が ${}_6\mathrm{C}_3 = 20$ 個、$<(123), (23)(ab)>$ $(4 \leq a < b \leq 6)$ はいずれも共役で、これらと共役な群が ${}_6\mathrm{C}_3 \times 3 = 60$ 個ある。

(b) $H \ni (ijk)(lmn)$ のとき。H を共役でずらして $H \ni (123)(456)$ としてよい。$[H : <(123)(456)>] = 6 \div 3 = 2$ なので $H \rhd <(123)(456)>$ である。${}^{\#}H = 2 \times 3$ であるから Sylow の定理より H は位数 2 の元 σ を含む。$\xi = (123)(456)$ とおく。$\sigma\xi\sigma^{-1} = \xi^l$ (ただし、$l = 0, 1, 2$) と書ける。$l = 0$ なら $\xi = e$ となり

[2] 群の元 g, h が $gh = hg$ であれば、$\mathrm{ord}(gh)$ は $\mathrm{ord}(g)$ と $\mathrm{ord}(h)$ の最小公倍数に一致する。この事実は、証明なしに今後とも使われる。

矛盾。$l = 1$ なら $\sigma\xi = \xi\sigma$ となり $\mathrm{ord}(\sigma\xi) = 6$ であるから H が巡回群になり矛盾。よって、$l = 2$ である。このとき、$\sigma\xi\sigma^{-1} = (132)(465)$ であり、$(\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3), \sigma(4), \sigma(5), \sigma(6))$ は $(1,3,2,4,6,5)$, $(1,3,2,6,5,4)$, $(1,3,2,5,4,6)$, $(3,2,1,4,6,5)$, $(3,2,1,6,5,4)$, $(3,2,1,5,4,6)$, $(2,1,3,4,6,5)$, $(2,1,3,6,5,4)$, $(2,1,3,5,4,6)$, $(4,6,5,1,3,2)$, $(4,6,5,3,2,1)$, $(4,6,5,2,1,3)$, $(6,5,4,1,3,2)$, $(6,5,4,3,2,1)$, $(6,5,4,2,1,3)$, $(5,4,6,1,3,2)$, $(5,4,6,3,2,1)$ または、$(5,4,6,2,1,3)$ のいずれかである。

(i) $(\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3), \sigma(4), \sigma(5), \sigma(6)) = (1,3,2,4,6,5), (3,2,1,6,5,4), (2,1,3,5,4,6)$ の場合。$\sigma = (23)(56), (13)(46), (12)(45)$ である。このとき、

$$H = \{e, (123)(456), (132)(465), (23)(56), (13)(46), (12)(45)\}$$

となる。

(ii) $(\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3), \sigma(4), \sigma(5), \sigma(6)) = (1,3,2,6,5,4), (3,2,1,5,4,6), (2,1,3,4,6,5)$ の場合。$\sigma = (23)(46), (13)(45), (12)(56)$ である。このとき、(i) の群と共役な群になる。

(iii) $(\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3), \sigma(4), \sigma(5), \sigma(6)) = (1,3,2,5,4,6), (3,2,1,4,6,5), (2,1,3,6,5,4)$ の場合。$\sigma = (23)(45), (13)(56), (12)(46)$ である。このとき、(i) の群と共役な群になる。

(iv) $(\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3), \sigma(4), \sigma(5), \sigma(6)) = (4,6,5,1,3,2), (6,5,4,3,2,1), (5,4,6,2,1,3)$ の場合。$\sigma = (14)(26)(35), (16)(25)(34), (15)(24)(36)$ である。このとき、

$$H = \{e, (123)(456), (132)(465), (14)(26)(35), (15)(24)(36), (16)(25)(34)\}$$

となる。

(v) $(\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3), \sigma(4), \sigma(5), \sigma(6)) = (4,6,5,3,2,1), (4,6,5,2,1,3), (6,5,4,1,3,2), (6,5,4,2,1,3), (5,4,6,1,3,2), (5,4,6,3,2,1)$ のとき。$\mathrm{ord}(\sigma) = 6$ となり矛盾。

よって、(i) の群と共役な群が $40 \div 2 \times 3 = 60$ 個、(iv) の群と共役な群が ${}_6\mathrm{C}_3 = 20$ 個ある。

4.4 $\mathfrak{S}_6$ の位数 18 の部分群

H は、$\mathfrak{S}_6$ の位数 18 の部分群とする。$^{\#}H = 3^2 \times 2$ なので、H の 3-Sylow 部分群は $\mathfrak{S}_6$ の 3-Sylow 部分群である。H を共役でずらして $H \supset\ <(123),(456)>$ としてよい。$[H :\ <(123),(456)>] = 18 \div 9 = 2$ なので $H \rhd\ <(123),(456)>$ である。Sylow の定理より、H は位数 2 の元 σ を含み、$H = \ <(123),(456),\sigma>$ となるはずである。σ は $(ij), (ij)(kl), (ij)(kl)(mn)$ のいずれかの形をしている。

(1) $\sigma = (ij)$ の場合。$i < j$ とする。

(a) $i \in \{1,2,3\}$, $j \in \{4,5,6\}$ のとき。$\{1,2,3\}$ と $\{4,5,6\}$ が混ざってしまい矛盾。

(b) $i, j \in \{1,2,3\}$ のとき。H は

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} e, & (123), & (132), & (456), & (123)(456), & (132)(456), & (465), & (123)(465), & (132)(465), \\ (12), & (23), & (13), & (12)(456), & (23)(456), & (13)(456), & (12)(465), & (23)(465), & (13)(465) \end{array}\right\}$$

であり、$H = \mathfrak{S}_3 \times C_3$ である。

(c) $i, j \in \{4,5,6\}$ のとき。(b) の群と共役な群となる。

この場合、(b) の群と共役な群は ${}_6\mathrm{C}_3 \div 2 \times 2 = 20$ 個ある。

(2) $\sigma = (ij)(kl)$ の場合。$i < j$, $k < l$, $i < k$ とする。

(a) $i \in \{1,2,3\}$, $j \in \{4,5,6\}$ のとき。$\{1,2,3\}$ と $\{4,5,6\}$ が混ざってしまい矛盾。

(b) $i, j, k \in \{1,2,3\}$ のとき。$\{1,2,3\}$ と $\{4,5,6\}$ が混ざってしまい矛盾。

(c) $i, j \in \{1,2,3\}$, $k, l \in \{4,5,6\}$ のとき。これは $(\mathfrak{S}_3 \times \mathfrak{S}_3) \cap \mathfrak{A}_6$ であり、H は

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} e, & (123), & (132), & (456), & (123)(456), & (132)(456), & (465), & (123)(465), & (132)(465), \\ (12)(45), & (23)(45), & (13)(45), & (12)(56), & (23)(56), & (13)(56), & (12)(46), & (23)(46), & (13)(46) \end{array}\right\}$$

である。

この場合、(c) と共役な群は ${}_6\mathrm{C}_3 \div 2 = 10$ 個ある。

(3) $\sigma = (ij)(kl)(mn)$ の場合。$\{i, j, k\}$ と $\{l, m, n\}$ が混ざらないようにするために、$i = 1, k = 2, m = 3$ としてよい。このとき、$(ij)(kl)(mn)$ は $(14)(25)(36), (14)(26)(35), (15)(24)(36), (15)(26)(34), (16)(24)(35)$ または、$(16)(25)(34)$ である。

(a) $(ij)(kl)(mn) = (14)(25)(36), (15)(26)(34), (16)(24)(35)$ のとき。$\sigma(123)\sigma^{-1} = (456)$, $\sigma(456)\sigma^{-1} = (123)$ に注意すると、下の H は積で閉じていることがわかり、$\mathfrak{S}_6$ の部分群になる。このとき。H は

$$\left\{\begin{matrix} e, & (123), & (132), & (456), & (123)(456), & (132)(456), & (465), & (123)(465), & (132)(465), \\ (14)(25)(36), & (152634), & (163524), & (142536), & (153426), & (16)(24)(35), & (143625), & (15)(26)(34), & (162435) \end{matrix}\right\}$$

である。

(b) $(ij)(kl)(mn) = (14)(26)(35), (15)(24)(36), (16)(25)(34)$ のとき。(a) の群と共役な群となる。

この場合、(a) と共役な群は ${}_6\mathrm{C}_3 \div 2 \times 2 = 20$ 個ある。

5 位数が 5 の倍数の部分群

5.1 $\mathfrak{S}_6$ の位数 5 の部分群

H は、$\mathfrak{S}_6$ の位数 5 の部分群とする。H は巡回群なのである位数 5 の元 σ によって $H = \{e, \sigma, \sigma^2, \sigma^3, \sigma^4\}$ と表せる。位数 5 の元は $(ijklm)$ の形をしているので、

$$K := \{e, (12345), (13524), (14253), (15432)\}$$

とすると H は K と共役となる。

$(12345) = (23451) = (34512) = (45123) = (51234)$ より位数 5 の元は 144 個存在する。よって位数 5 の部分群は 36 個である。

5.2 $\mathfrak{S}_6$ の位数 10 の部分群

H は、$\mathfrak{S}_6$ の位数 10 の部分群とする。Sylow の定理より、H は位数 5 のある 5-Sylow 部分群 S_5 を含む。共役でずらして考えて $H \ni (12345)$ とし

てよい。この時、$S_5 = <(12345)>$, $H \supset S_5$, ${}^{\#}H = 10$, ${}^{\#}S_5 = 5$ となり、$[H : S_5] = 2$ である。従って $H \rhd S_5$ となる。ここで Sylow の定理より、H は位数が 2 の元 σ を含む。σ は (ij), $(ij)(kl)$,$(ij)(kl)(mn)$ のいずれかの形である。$\xi := (12345)$ とすると, $\sigma\xi\sigma^{-1} \in <\xi>$ である。よって $\sigma\xi\sigma^{-1} = \xi^l$ $(l = 0, 1, 2, 3, 4)$ となる。$\xi = \sigma(\sigma\xi\sigma^{-1})\sigma^{-1} = \sigma\xi^l\sigma^{-1} = (\sigma\xi\sigma^{-1})^l = \xi^{l^2}$ であるので、$l^2 \equiv 1 \pmod 5$ である。これを満たす l は 1 または 4 であるので、場合分けして考える。

$l = 1$ なら $\sigma\xi = \xi\sigma$ となり、$\mathrm{ord}(\sigma\xi) = 10$ となるが、$\mathfrak{S}_6$ には位数 10 の元はないので矛盾する。よって $l = 4$ となる。$\sigma\xi\sigma^{-1} = \xi^4 = (15432)$, $\sigma\xi\sigma^{-1} = (\sigma(1)\sigma(2)\sigma(3)\sigma(4)\sigma(5))$ これを満たす σ は

$$(1)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (25)(34)$$

$$(2)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (15)(24)$$

$$(3)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} = (14)(23)$$

$$(4)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} = (13)(45)$$

$$(5)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} = (12)(35)$$

の 5 つである。$S := <(12345), (25)(34)>$ とおくと、${}^{\#}S = 10$, ${}^{\#}H = 10$, $S \subset H$ である。よって $S = H$ である。$<(12345), (25)(34)>$, $<(12345), (15)(24)>$, $<(12345), (14)(23)>$, $<(12345), (13)(45)>$, $<(12345), (12)(35)>$ はすべて同じ群となる。よって ξ を含む位数 10 の群は H ただ一つである。位数 5 の部分群ごとに位数 10 の群が一つずつ存在するので、位数 10 の群は 36 個である。

5.3 $\mathfrak{S}_6$ の位数 20 の部分群

まず、次を証明する。

補題 5.1 G を群、H を G の部分群としたとき, 自然な全単射

$$\phi\colon G/N_G(H) \longrightarrow \{H \text{ と共役な部分群}\}$$

が存在する。

証明 $g \in G$ に対して、$\phi(gN_G(H)) = gHg^{-1}$ と写像 ϕ を定めたい。まず、ϕ が well-defined であることを示す。$g_1, g_2 \in G$ とする。$g_1N_G(H) = g_2N_G(H)$ ならば $g_1^{-1}g_2 \in N_G(H)$ より、$(g_1^{-1}g_2)H(g_1^{-1}g_2)^{-1} = H$ である。このとき、$g_1Hg_1^{-1} = g_2Hg_2^{-1}$ となるので、well-defined であることは示された。

ϕ が全射であることは明らかである。

最後に ϕ が単射であることを示す。$\phi(g_1N_G(H)) = \phi(g_2N_G(H))$ とすると、$g_1Hg_1^{-1} = g_2Hg_2^{-1}$ よって、$(g_1^{-1}g_2)H(g_1^{-1}g_2)^{-1} = H$ となり $g_1^{-1}g_2 \in N_G(H)$ となって $g_1N_G(H) = g_2N_G(H)$ がわかる。 **証明終**

H は、$\mathfrak{S}_6$ の位数 20 の部分群とする。Sylow の定理より、H は位数 5 の元を含む。H を共役でずらして $H \ni (12345)$ としてよい。Sylow の定理より H の 5-Sylow 部分群の個数 λ は 20 の約数で、5 を法として 1 と合同である。これを満たす λ は 1 のみなので、$<(12345)>$ がただひとつの H の 5-Sylow 部分群、よって H の正規部分群である。

補題 5.1 より、$N_{\mathfrak{S}_6}(S_5)$ の位数は $720 \div 36 = 20$ であり、$H \triangleright S_5$ なので、$H = \{\sigma \in \mathfrak{S}_6 \mid \sigma S_5 \sigma^{-1} = S_5\} = N_{\mathfrak{S}_5}(S_5)$ であり、位数 5 の群に対して、唯一の位数 20 の群が決まることがわかる。位数 5 の群は 36 個あるので位数 20 の群は 36 個である。

5.4 $\mathfrak{S}_6$ の位数 180 の部分群

まず、次を証明する。

補題 5.2 G は有限群、H は G の指数 n の部分群であれば、$\mathrm{Ker}(\phi) \subset H$ をみたす準同型 $\phi\colon G \to \mathfrak{S}_n$ が存在する。

証明 X を G における H の左剰余類の集合とする。$^{\#}X = n$ なので、$\mathfrak{S}_X \simeq \mathfrak{S}_n$ になる。ここで、

$$\mathfrak{S}_X = \{f\colon X \to X \mid f \text{ は全単射}\}$$

であり、$\mathfrak{S}_X$ は写像の合成で群になる。$g \in G$ に対して、$\phi(g)\colon X \to X$ を $aH \mapsto gaH$ で定義する。明らかに $\phi(g)$ の逆写像は $\phi(g^{-1})$ なので、$\phi(g)$ は全単射であり、従って $\phi(g) \subset \mathfrak{S}_X$ である。ここで、$\phi\colon G \to \mathfrak{S}_X$ を $g \mapsto \phi(g)$ で定義する。$g,g' \in G$ に対し、

$$\phi(g)\phi(g')\colon aH \mapsto g'aH \mapsto g(g'aH)$$

$$\phi(gg')\colon aH \mapsto gg'aH$$

であるので、$\phi(g)\phi(g') = \phi(gg')$ が成立する。よって、ϕ は準同型である。$g \in \mathrm{Ker}(\phi)$ とする。すると、$\phi(g)$ が X 上の恒等写像である。このとき、任意の $a \in G$ に対して $\phi(g)\colon aH \mapsto aH$ となる。とくに、$\phi(g)\colon H \mapsto H$ なので $gH = H$ となり、$g \in H$ であることがわかる。つまり、$\mathrm{Ker}(\phi) \subset H$ である。 証明終

ここで、H は $\mathfrak{S}_6$ の位数 180 の部分群 とする。H の指数は、$[\mathfrak{S}_6 : H] = 720/180 = 4$ であるので、補題 5.2 より、$\mathrm{Ker}(\phi) \subset H$ である準同型写像 $\phi\colon \mathfrak{S}_6 \to \mathfrak{S}_4$ が存在する。$\mathrm{Ker}(\phi) \lhd \mathfrak{S}_6$ より $\mathrm{Ker}(\phi)$ の位数は 1, 360, 720 のいずれかである。$\mathrm{Ker}(\phi)$ は H の部分集合なので $\mathrm{Ker}(\phi)$ の位数は H の位数以下である。$^{\#}H = 180$ より $\mathrm{Ker}(\phi)$ の位数は 1 なので、$\mathrm{Ker}(\phi) = \{e\}$ となる。ϕ は単射となるが、これは矛盾である。よって、$\mathfrak{S}_6$ に位数 180 の部分群は存在しない。

5.5 $\mathfrak{S}_6$ の位数 240 の部分群

H は、$\mathfrak{S}_6$ の位数 240 の部分群とする。H の指数は、$[\mathfrak{S}_6 : H] = 720/240 = 3$ である。補題 5.2 より $\mathrm{Ker}(\phi) \subset H$ である準同型写像 $\phi\colon \mathfrak{S}_6 \to \mathfrak{S}_3$ が存在する。$\mathrm{Ker}(\phi) \lhd \mathfrak{S}_6$ より $\mathrm{Ker}(\phi)$ の位数は 1, 360, 720 のいずれかである。 $\mathrm{Ker}(\phi)$ は H の部分集合なので $\mathrm{Ker}(\phi)$ の位数は H の位数以下である。$^{\#}H = 240$ より $\mathrm{Ker}(\phi)$ の位数は 1 なので、$\mathrm{Ker}(\phi) = \{e\}$ となる。ϕ は単射となるが、これは矛盾である。よって、$\mathfrak{S}_6$ に位数 240 の部分群は存在しない。

5.6 $\mathfrak{S}_6$ の位数 90 の部分群

H は、$\mathfrak{S}_6$ の位数 90 の部分群とする。$^{\#}H = 2 \times 3^2 \times 5$ なので、Sylow の定理より H は、位数 5 の部分群 (5-Sylow 部分群) を含む。これを S_5 と

する。S_5 は 5 巡回元で生成されるので、共役でずらして $(12345) \in S_5$ としてよい。また、$(12345) \in \mathfrak{S}_5$ なので、$(12345) \in H \cap \mathfrak{S}_5$ である。ゆえに

$$^{\#}S_5 | ^{\#}(H \cap \mathfrak{S}_5) \quad \text{かつ} \quad ^{\#}(H \cap \mathfrak{S}_5) | GCD(90, 120)$$

であるので、$^{\#}(H \cap \mathfrak{S}_5) = 5,\ 10,\ 15,\ 30$ となる。また、H は位数 9 の部分群 (3-Sylow 部分群) を含んでいて、それを S_3 とすると、S_3 は $\mathfrak{S}_6$ の 3-Sylow 部分群でもある。3.2 で調べたように S_3 は $<(ijk), (lmn)>$ という形をしている。ここで、i, j, k のどれかが 6 ならば $(lmn) \in \mathfrak{S}_5$ であるので、$(lmn) \in H \cap \mathfrak{S}_5$ となる。つまり、$<(lmn)>$ は $H \cap \mathfrak{S}_5$ の部分群であるので、

$$^{\#}<(lmn)> | ^{\#}(H \cap \mathfrak{S}_5)$$

である。よって、$^{\#}(H \cap \mathfrak{S}_5)$ は 5 かつ 3 の倍数でなければならない。つまり $^{\#}(H \cap \mathfrak{S}_5) = 15, 30$ となることがわかる。しかし、$\mathfrak{S}_5$ で位数 15 の部分群と位数 30 の部分群は存在しなかった。 [2] l, m, n のどれかが 6 である場合も同様に考える。よって、$\mathfrak{S}_6$ に位数 90 の部分群は存在しない。

5.7 $\mathfrak{S}_6$ の位数 15 の部分群

H は、$\mathfrak{S}_6$ の位数 15 の部分群とする。$^{\#}H = 3 \times 5$ なので、Sylow の定理より H は部分群 (5-Sylow 部分群) を含む。S_5 を共役でずらして $(12345) \in S_5$ としてよい。Sylow の第 4 定理より H の 5-Sylow 部分群の個数は $\lambda = 5r + 1$ $(r \in \mathbb{Z})$ であるが、λ は 3 の約数なので $r = 0$ となる。よって、S_5 はただ 1 つの 5-Sylow 部分群であり、$S_5 \lhd H$ である。また、H は位数 3 の 3-Sylow 部分群を含んでいて、それを S_3 とする。$\sigma \in S_3$ とすると、$S_3 = <\sigma>$, $\mathrm{ord}(\sigma) = 3$ である。$\tau = (12345)$ とすると

$$\sigma\tau\sigma^{-1} \in <\tau>$$

であるので、

$$\sigma\tau\sigma^{-1} = \tau^k \ (k = 1, 2, 3, 4)$$

となる。

このとき、

$$\tau = \sigma^3\tau\sigma^{-3} = \tau^{k^3}$$

によって、$k^3 \equiv 1 \mod 5$ となる。すると、$k = 1$ となるが、このとき、$\mathrm{ord}(\sigma\tau) = 15$ となる。しかし、$\mathfrak{S}_6$ には位数 15 の元は無いので矛盾である。

5.8 $\mathfrak{S}_6$ の位数 45 の部分群

H は、$\mathfrak{S}_6$ の位数 45 の部分群とする。${}^{\#}H = 3^2 \times 5$ なので、Sylow の定理より H は 5-Sylow 部分群を含む。S_5 を共役でずらして $(12345) \in S_5$ としてよい。また、$(12345) \in \mathfrak{S}_5$ なので、$(12345) \in H \cap \mathfrak{S}_5$ である。ゆえに、

$$^{\#}S_5 | ^{\#}(H \cap \mathfrak{S}_5)$$

かつ

$$^{\#}(H \cap \mathfrak{S}_5) | GCD(45, 120)$$

であるので、${}^{\#}(H \cap \mathfrak{S}_5) = 5,\ 15$ となる。また、H は位数 9 の部分群 S_3 を含んでいて、3.2 で調べたように S_3 は $<(ijk), (lmn)>$ という形をしている。ここで、$i,\ j,\ k$ のうちいずれか 1 つが 6 ならば $(lmn) \in \mathfrak{S}_5$ であるので、$(lmn) \in H \cap \mathfrak{S}_5$ となる。つまり、$<(lmn)>$ は $H \cap \mathfrak{S}_5$ の部分群であるので、

$$^{\#}<(lmn)> | ^{\#}(H \cap \mathfrak{S}_5)$$

である。よって、${}^{\#}(H \cap \mathfrak{S}_5) = 15$ となることがわかる。しかし、$\mathfrak{S}_5$ には位数 15 の部分群は存在しなかった。l, m, n のうちいずれか 1 つが 6 である場合も同様に考える。よって、$\mathfrak{S}_6$ に位数 45 の部分群は存在しない。

5.9 $\mathfrak{S}_6$ の位数 40 の部分群

一般に次のことを示す。

補題 5.3 H を任意の $\mathfrak{S}_6$ の部分群とする。$\mathfrak{S}_5 = \{\tau \in H | \tau(6) = 6\}$ を考える。このとき、全単射 $f\colon H/H \cap \mathfrak{S}_5 \to \{\tau(6) \mid \tau \in H\}$ が存在する。

証明 $\tau \in H$ に対して、$f\colon H/H \cap \mathfrak{S}_5 \to \{\tau(6) \mid \tau \in H\}$ を $\tau \mapsto \tau(6)$ で定義する。

(1) well-defined 性を示す。$\tau^{-1}\sigma \in H \cap \mathfrak{S}_5$ とすると、$\tau^{-1}\sigma(6) = 6$ となる。よって、$\sigma(6) = \tau(6)$ である。

(2) 全単射を示す。全射については、定義から明らかである。単射を示す。$f(\sigma) = f(\tau)$ とする。$\sigma(6) = \tau(6)$ ならば、$\tau^{-1}\sigma(6) = 6$ である。よって、$\tau^{-1}\sigma \in H \cap \mathfrak{S}_5$ であるので、単射は示せた。以上より、写像 f は全単射である。

証明終

次の補題を示す。

補題 5.4 H は $\mathfrak{S}_6$ の部分群とする。$H \ni (12345)$ かつ $H \not\subset \mathfrak{S}_5$ ならば、$i = 1,2, \ldots,6$ のそれぞれに対して $\sigma(6) = i$ をみたす $\sigma \in H$ が存在する。

証明 仮定より H は $\mathfrak{S}_5$ に含まれないので、H のある元 σ で $\sigma(6) \neq 6$ となるものが存在する。$\sigma(6) = i$ とすると $i = 1, 2, 3, 4, 5$ で、$(12345)^l(i)$ は l を動かせば $1, 2, 3, 4, 5$ のどれにも一致させることができる。　証明終

H は、$\mathfrak{S}_6$ の位数 40 の部分群とする。H は 5-Sylow 部分群を含んでいるので、共役でずらして $(12345) \in H$ としてよい。

補題 5.3 と補題 5.4 より、${}^\#(H/H \cap \mathfrak{S}_5) = 6$ となる。しかし、これは ${}^\# H = 40$ に矛盾するので、位数 40 の部分群は存在しない。

5.10 $\mathfrak{S}_6$ の位数 80 の部分群

最初に、次の補題を証明する。

補題 5.5 $\mathfrak{S}_6$ の中で、$<(12345), (ij)> \supset \mathfrak{S}_5$ が成立する。

証明 まず、$1 \leq i < j \leq 5$ の場合に示す。

$(12345)^n = (ijklm)$ となるように、n, k, l, m を選ぶ。($\{1, 2, 3, 4, 5\} = \{i, j, k, l, m\}$ に注意する。) ここで、$(ijklm)(ij)(ijklm)^{-1} = (jk)$ などに注意すると (ij), (jk), (kl), (lm) はすべて $<(12345), (ij)>$ に含まれることがわかる。さらに、$(ik) = (jk)(ij)(jk)^{-1}$ などを用いることで、結局 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ のすべての互換が $<(12345), (ij)>$ に属する。従って、この場合は $<(12345), (ij)> = \mathfrak{S}_5$ となる。

次に、$j = 6$ の場合に示す。$(12345)^n(i6)(12345)^{-n}$を 考えると、$(16)$, (26), (36), (46), (56) が H に含まれることがわかる。$(12) = (16)(26)(16)$ より、$<(12345), (ij)> \supset <(12345), (12)> = \mathfrak{S}_5$ である。　証明終

H は、$\mathfrak{S}_6$ の位数 80 の部分群とする。Sylow の定理より、H は位数 5 の元を含む。H を共役でずらして $H \ni (12345)$ としてよい。H の 2-Sylow 部分群は $\mathfrak{S}_6$ の 2-Sylow 部分群なので、H は $G_1^{(16)}$ と共役な部分群を含む。従って $H \ni (ij)$ $(1 \leq i \leq j \leq 6)$ としてよい。

補題 5.5 によって、位数 80 の部分群は存在しないことがわかった。

5.11 $\mathfrak{S}_6$ の位数 30 の部分群

H は、$\mathfrak{S}_6$ の位数 30 の部分群とする。Sylow の定理より、H はある 5-Sylow 部分群を含む。これを H とする。共役でずらして $H \ni (12345)$ としてよい。

${}^\#(H \cap \mathfrak{S}_5) \mid {}^\# H$ であるので、 ${}^\#(H \cap \mathfrak{S}_5) = 5, 10, 15, 30$ のいずれかが起こる。しかし補題 5.3 と補題 5.4 により、${}^\#(H \cap \mathfrak{S}_5) = 5$ である。Sylow の定理より 5-Sylow 部分群は 1 個または 6 個となるが、$S_5 \not\triangleleft H$ より 6 個となる。3-Sylow 部分群は 1 個または 10 個となるが、補題 5.1 より、

$$\mathfrak{S}_6/N_{\mathfrak{S}_6}(S_3) \longleftrightarrow \{S_3\text{と共役な部分群}\}$$

という一対一対応がある。${}^\#\{S_3\text{と共役な部分群}\} = 10$ であったので、${}^\# N_{\mathfrak{S}_6}(S_3) = 72$ となる。これは、5 で割り切れない。また、$S_3 \triangleleft H \Leftrightarrow H \subset N_{\mathfrak{S}_6}(S_3)$ であることから、$S_3 \not\triangleleft H$ であって、3-Sylow 部分群の個数は 10 個となる。位数 5 の元は $6 \times 4 = 24$ 個であり、位数 3 の元は $10 \times 2 = 20$ 個であるので位数 30 の群は存在しない。

5.12 $\mathfrak{S}_6$ の位数 120 の部分群

H は、$\mathfrak{S}_6$ の位数 120 の部分群で、$H \ni (12345)$ と仮定する。

(1) H は互換を含むと仮定する。このとき、補題 5.5 によって、$H \supset\ <(12345), (ij)>\ \supset \mathfrak{S}_5$, ${}^\# H = 120$, ${}^\# \mathfrak{S}_5 = 120$ である。従って $H = \mathfrak{S}_5$ であって, この群と共役なものは 6 個である。

(2) H は互換を含まないと仮定する。H の 2-Sylow 部分群 S_2 を考える。$H \supset S_2$, ${}^\# S_2 = 8$ である。互換を含まない位数 8 の群は、次のどれかと共役になる。

$$G_3^{(8)} = \left\{ \begin{array}{cccc} e, & (12)(34), & (13)(24), & (14)(23), \\ (12)(56), & (34)(56), & (1324)(56), & (1423)(56) \end{array} \right\}$$

$$G_7^{(8)} = \left\{ \begin{array}{cccc} e, & (1234), & (13)(24), & (1432), \\ (12)(34)(56), & (14)(23)(56), & (24)(56), & (13)(56) \end{array} \right\}$$

$H \supset S_5 =\ <(12345)>$ としてよい。H は互換を含まないので $H \not\supset \mathfrak{S}_5$ である。H は 6 をどの元にも移せるので ${}^\#(H \cap \mathfrak{S}_5) = 20$ である (補題 5.3)。$\mathfrak{S}_6$ の位数 20 の部分群の分類より、$H \cap \mathfrak{S}_5 =$

$<(12345),(2354)> =: N$ としてよい。よって S_2 は 4 巡回元を含むので、$G_3^{(8)}$ のケースは起こらない。$S_2 \ni (2354)$ とすると、$G_7^{(8)}$ と共役な群は

$\{e,(2354),(25)(34),(2453),(23)(54)(16),(24)(53)(16),(25)(16),(34)(16)\}$

である。このとき、$\sigma := (12345)$, $\tau := (2354)$, $\xi := (25)(16)$ とおく。関係式 $\tau\sigma = \sigma^2\tau$, $\tau\xi = \xi\tau^3$, $\xi\sigma\xi = \sigma^4\xi\sigma^4$, $\xi\sigma^2\xi = \sigma^2\xi\sigma^3\tau^2$, $\xi\sigma^3\xi = \sigma^3\xi\sigma^2\tau^2$, $\xi\sigma^4\xi = \sigma\xi\sigma$ を用いることにより

$$N \coprod \xi N \coprod \sigma\xi N \coprod \sigma^2\xi N \coprod \sigma^3\xi N \coprod \sigma^4\xi N$$

は積で閉じていることがわかる。位数は 120 の群となる。$\sigma = (12345)$ を含み H と共役なものは H のみである。$\mathfrak{S}_6$ には 5-Sylow 部分群は 36 個、H には 5-Sylow 部分群は 6 個、従って H の共役な部分群は $36 \div 6 = 6$ 個となる。

5.13 $\mathfrak{S}_6$ の位数 60 の部分群

H は、$\mathfrak{S}_6$ の位数 60 の部分群とする。 $H \ni (12345)$ としてよい。

(1) $H \subset \mathfrak{S}_5$ とする。$\mathfrak{S}_5$ の部分群の分類 [2] によって、$H = \mathfrak{A}_5$ である。$\mathfrak{A}_5$ と共役な部分群は 6 つある。

(2) $H \not\subset \mathfrak{S}_5$ と仮定する。 補題 5.4 より、H は 6 をどの元にも移せるので $^{\#}(H \cap \mathfrak{S}_5) = 10$ である。 $\mathfrak{S}_6$ の位数 10 の部分群の分類により、$H \cap \mathfrak{S}_5 = <(12345),(25)(34)>$ としてよい。

H が互換を含む場合、補題 5.5 によって $H \supset \mathfrak{S}_5$ となり、矛盾する。以下 H は互換を含まないとする。

H の 2-Sylow 部分群 S_2 で $S_2 \ni (25)(34)$ を満たすものをとる。$^{\#}(H \cap \mathfrak{S}_5) = 10$ より、$S_2 \not\subset \mathfrak{S}_5$ かつ $S_2 \not\ni$ 互換 である。これらの条件を満たすためには、S_2 は

(a) $G_7^{(4)} = <(2354)(16)>$

(b) $G_4^{(4)} = <(25)(34),(23)(54)(16)>$

(c) $G_6^{(4)} = <(25)(34),(25)(16)>$

の三つのどれかと共役でないといけない。H は 5-Sylow 部分群を 6 個含む。よって 6 個の文字の 5 つが決まれば 5-Sylow 部分群は決まることに注意する。

(a) の場合について考える。このとき、$H = <(12345), (2354)(16)>$ であり、

$$\begin{aligned}
&(12345)(2354)(16) = (16243) \in H \\
&(12345)^2(16243)^2 = (36)(45) \in H \\
&(163)(16243)(316)^{-1} = (31)(45) \in H \\
&(36)(45)(31)(45) = (163) \in H \\
&(163)(16243)(316)^{-1} = (63241) = (16324) \in H
\end{aligned}$$

これは、6 個の文字の 5 つが決まれば 5-Slyow 部分群が決まることに矛盾する。

(b) の場合を考える。このとき、$H = <(12345), (25)(34), (23)(54)(16)>$ である。ところが、$(12345)(23)(54)(16) = (1624) \in H$ となり、H が 4 巡回元を含むので矛盾する。

(c) の場合を考える。このとき、$H = <(12345), (25)(34), (25)(16)>$ である。$\sigma := (12345)$, $\eta := (25)(34)$, $\xi := (25)(16)$, $N := <\sigma, \eta>$ とおく。$\eta\sigma\eta^{-1} = \sigma^4$ であるので $N \cong D_{10}$ となる。関係式 $\eta\sigma = \sigma^4\eta$, $\eta\xi = \xi\eta$, $\xi\sigma\xi = \sigma^4\xi\sigma^4$, $\xi\sigma^2\xi = \sigma^2\xi\sigma^3\eta$, $\xi\sigma^3\xi = \sigma^3\xi\sigma^2\eta$, $\xi\sigma^4\xi = \sigma\xi\sigma$ を用いることより、

$$N \coprod \xi N \coprod \sigma\xi N \coprod \sigma^2\xi N \coprod \sigma^3\xi N \coprod \sigma^4\xi N$$

は積で閉じていることがわかる。これが位数 60 の群になる。共役なものは 6 個である。

6 その他の位数の部分群

6.1 $\mathfrak{S}_6$ の位数 144 の部分群

H は、$\mathfrak{S}_6$ の位数 144 の部分群とする。144 の素因数分解を考えると、H の 2-Sylow 部分群は $\mathfrak{S}_6$ の 2-Sylow 部分群でもあり、H の 3-Sylow 部分群は $\mathfrak{S}_6$ の 3-Sylow 部分群でもある。これらのことから、H には台の交わ

らない 3 つの互換と、台の交わらない 2 つの 3 巡回元が含まれる。また、H には位数 5 の元は含まれないことが分かる。ここで、H が互換 (ij) を含むならば、(ji) も H に含まれ、更に H が 3 巡回元 (ijk) を含むならば、i,j,k を任意の順番で入れ替えて得られる 3 巡回元も H に含まれることに注意すると、以下の 2 つのどちらかが起こる。

$$\begin{array}{ll} (1) & (ijk),(lmn),(ij),(kl),(mn) \in H \\ (2) & (ijk),(lmn),(il),(jm),(kn) \in H \end{array}$$

この 2 つの場合について場合分けをして考えてゆく。

(1) の場合、$(jk) = (ij)(ijk) \in H$ である。これを用いて、$(jklmn) = (jk)(kl)(lmn) \in H$ となるので、このような $\mathfrak{S}_6$ の位数 144 の部分群は存在しないことが分かる。

次に (2) の場合、$(iljmn) = (il)(jm)(lmn) \in H$ となるので、このような $\mathfrak{S}_6$ の位数 144 の部分群は存在しないことが分かる。

以上より、$\mathfrak{S}_6$ には位数 144 の部分群は存在しないことが分かった。

6.2 $\mathfrak{S}_6$ の位数 48 の部分群

H は、$\mathfrak{S}_6$ の位数 48 の部分群とする。48 の素因数分解を考えると、H の 2-Sylow 部分群の位数は 16 で、3-Sylow 部分群の位数は 3 であることが分かる。ここで、H の 2-Sylow 部分群は $G_1^{(16)}$ と $\mathfrak{S}_6$ 内で共役な群になるが、H を $\mathfrak{S}_6$ 内の共役で動かすことで、$G_1^{(16)}$ が H の 2-Sylow 部分群の 1 つであるとしても一般性を失わない。以下、σ が 3 巡回元の場合と、台の交わらない 3 巡回元の積である場合の 2 通りについて場合分けしてゆく。

(1) $\sigma = (ijk)$ の場合、σ^2 も σ の代わりに H の生成元として良いことに注意すると、$1 \leq i < j < k \leq 6$ であるとして良い。
ここで、$G_1^{(16)}$ の元 (56) で共役を取ることを考えると、$k = 6$ の場合を考えれば、$k = 5$ の場合は考えなくて良いことが分かる。よって、$k = 6$ の場合と $k \leq 4$ の場合の 2 通りについて場合分けしてゆく。ここで、Sylow の定理より 48 の素因数分解を考えると、H には位数 5 の元は含まれないことに注意する。

(a) $k = 6$ の場合、$\sigma = (ij6)$ となる。
$j = 5$ とすると、$(1324)(j5)(i56)$ は H の 5 巡回元となるので、この場合は H は $\mathfrak{S}_6$ の位数 48 の部分群とはならない。よっ

て、$j \leq 4$ として考えてゆく。

$(i,j) = (1,2),(3,4)$ の場合、(ij) は H に含まれる。よって、$(1324)(ij)(ij6)$ は H の 5 巡回元となるので、この場合も H は $\mathfrak{S}_6$ の位数 48 の部分群とはならない。その他の場合でも、$(12)(34)(ij6)$ は H の 5 巡回元となってしまい、H が $\mathfrak{S}_6$ の位数 48 の部分群とはならないため、$k=6$ の場合には $\mathfrak{S}_6$ の位数 48 の部分群は存在しないことが分かる。

(b) $k \leq 4$ の場合、$G_1^{(16)} = < G_1^{(8)}, (56) >$ となることに注意すると、$< G_1^{(16)}, \sigma >$ は $\mathfrak{S}_4 \times \mathfrak{S}_2$ となり、$\mathfrak{S}_6$ の位数 48 の部分群となる。$\mathfrak{S}_6$ 内での数字の選び方から、これと共役な群は 15 個存在する。

(2) $\sigma = (ijk)(lmn)$ の場合、2 乗したり並び替えることで、$i=1,\ 1 < l < m < n \leq 6$ として良い。ここで、Sylow の定理より、3 巡回元、5 巡回元は H に含まれないことに注意する。

まず、$2 \in \{j,k\}$ を仮定すると、$(12) \in H$ より、

$$(lnm) = \{(12)\sigma\}^2 \in H$$

が得られるが、H に 3 巡回元は含まれないので、$2 \in \{j,k\}$ とはならないことが分かった。よって、$l=2$ が得られた。同様に、$\{(34)\sigma\}^2$, $\{(56)\sigma\}^2$ も H の 3 巡回元とならないように数字を選ぶと、σ の候補は、

$$\begin{array}{llll} (135)(246), & (145)(236), & (136)(245), & (146)(235), \\ (153)(246), & (154)(236), & (163)(245), & (164)(235) \end{array}$$

の 8 つに絞られる。ここで、$G_1^{(16)}$ の元 $(12)(34)$, (12) で H の共役を取ることを考えれば、σ は $(135)(246)$, $(153)(246)$ の 2 通りを考えれば十分である。

$\sigma = (153)(246)$ の場合、

$$(13245) = (1324)[\{(153)(246)\}(12)\{(153)(246)\}^{-1}] \in H$$

より、H は $\mathfrak{S}_6$ の位数 48 の部分群とはならない。

以下、$H = < G_1^{(16)}, (135)(246) >$ が $\mathfrak{S}_6$ の位数 48 の部分群となるかどうかを調べる。ここで、$G_1^{(16)}$ は $G_6^{(4)}$ を正規部分群に持つこと、

(135)(246) で $G_6^{(4)}$ の共役を取っても、群は変わらず $G_6^{(4)}$ となることから、

$$N_{\mathfrak{S}_6}(G_6^{(4)}) \supset < G_1^{(16)}, (135)(246) >$$

が得られる。更に、$G_6^{(4)}$ は $\mathfrak{S}_6$ 内に共役な部分群を 15 個持つことから、$\mathfrak{S}_6/N_{\mathfrak{S}_6}(G_6^{(4)})$ の元数は 15 となる。よって、$N_{\mathfrak{S}_6}(G_6^{(4)})$ の位数は 48 であることが得られた。また、$< G_1^{(16)}, (135)(246) >$ の位数は 48 以上であるが、位数 48 の群 $N_{\mathfrak{S}_6}(G_6^{(4)})$ の部分集合であるため、

$$< G_1^{(16)}, (135)(246) > = N_{\mathfrak{S}_6}(G_6^{(4)})$$

が得られた。よって H は $\mathfrak{S}_6$ の位数 48 の部分群であることが分かった。この群は 3 巡回元を含んでいないことから、$\mathfrak{S}_4 \times \mathfrak{S}_2$ とは共役な群ではない。$G_6^{(4)}$ と共役な群 1 つにつき、$N_{\mathfrak{S}_6}(G_6^{(4)})$ と共役な群が 1 つ見つかることから、H と共役な群は $\mathfrak{S}_6$ 内に 15 個存在する。

6.3 $\mathfrak{S}_6$ の位数 12 の部分群

H は、$\mathfrak{S}_6$ の位数 12 の部分群とする。12 の素因数分解を考えると、H の 2-Sylow 部分群の位数は 4 で、3-Sylow 部分群の位数は 3 であることが分かる。ここで、H の 2-Sylow 部分群は、$G_x^{(4)}$ $(x \in \{1,2,3,4,5,6,7\})$ と $\mathfrak{S}_6$ 内で共役な群になるが、H を $\mathfrak{S}_6$ 内の共役で動かすことで、$G_x^{(4)}$ が H の 2-Sylow 部分群の 1 つであるとしても一般性を失わない。更に、H には位数 3 の元 σ が含まれていて、H は $G_x^{(4)}$ と σ で生成される群となる。Sylow の定理から、H の 3-Sylow 部分群の個数 λ は、4 の約数かつ、3 を法として 1 と合同な数である。よって、$\lambda = 1$ または $\lambda = 4$ であるので、この 2 通りで場合分けして考えてゆく。

(1) H の 3-Sylow 部分群が 1 個の場合、$< \sigma >$ は H の正規部分群となる。
　ここで、H の生成元で $< \sigma >$ の共役を取ったものが $< \sigma >$ に等しければ、$< \sigma >$ は H の正規部分群となることに注意する。以下、更に σ が 3 巡回元の場合と、台の交わらない 3 巡回元の積である場合の 2 通りについて場合分けしてゆく。

(a) $\sigma = (ijk)$ の場合、σ^2 も σ の代わりに H の生成元として良いことに注意すると、$1 \leq i < j < k \leq 6$ であるとして良い。

ここで、$\mathfrak{S}_6$ の部分群は自然に $\{1,2,3,4,5,6\}$ に作用するが、それによって軌道分解を考える。$G_x^{(4)}$ が元数が 4 以上の軌道を持つ場合、$<\sigma>$ が H の正規部分群とならないことに注意すると、$x=1,4,5,7$ とはならない。更に、$(12)(34)(56)$ で $<\sigma>$ の共役を取ると (ijk) 以外の文字が表れてしまうので、$x=3$ の場合も $<\sigma>$ は H の正規部分群とはならない。以上より $x=2$ または $x=6$ となり、$(12)(56)\in H$ が得られる。この時、$<\sigma>$ が H の正規部分群となるとすると、

$$(ijk)=(123),(124),(356),(456)$$

の 4 通りが考えられる。ここで、$(12)(34)$ で $<\sigma>$ の共役を取ることを考えると、i,j,k 以外の数字が表れてしまうので、$x=6$ の場合も、$<\sigma>$ は H の正規部分群とはならない。$x=2$ の場合について、$G_1^{(12)}:=<G_2^{(4)},(123)>$ と、$<G_2^{(4)},(124)>$, $<G_2^{(4)},(356)>$, $<G_2^{(4)},(456)>$ の 4 つの群は、全て $\mathfrak{S}_6$ の位数 12 の共役な部分群であり、$\mathfrak{S}_3\times\mathfrak{S}_2$ となる。これと共役な群の個数は 60 である。

(b) $\sigma=(ijk)(lmn)$ の場合、冪をとったり数字を並び替えることで、$i=1,\ 1<l<m<n\le 6$ として良い。

$<\sigma>$ が H の正規部分群となるためには、$G_x^{(4)}$ には互換や 4 巡回元、台の交わらない 4 巡回元と互換の積は含まれないので、$x=2,3,5,7$ とはならない。$x=1,6$ について、$(12)(34)$ で $<\sigma>$ の共役を取ることを考えると、$\sigma=(12k)(34n)$,$(1j2)(34n)$ とならなければいけないが、この時、$(13)(24)$,$(12)(56)$ で $<\sigma>$ の共役を取って出来た群は、それぞれ $<\sigma>$ とは一致しない。よって、$x=1,6$ とはならない。以上より、$x=4$ の場合を考えればよい。

まず、$(13)(24)$ で $<\sigma>$ の共役を取って出来る群は $<\sigma>$ となることから、σ の候補として、$(135)(246)$, $(153)(246)$, $(136)(245)$, $(163)(245)$ の 4 通りに絞り込むことが出来る。ここで、$<G_4^{(4)},\sigma>$ に対して、(24), (56) で共役を取り、σ^2 も H の生成元として良いことに注意すると、$\sigma=(135)(246)$ のみを考えれば十分である。

今、

$$(145236)=\{(12)(34)(56)\}\{(135)(246)\}\in H$$

である。また、(13)(24) の位数は 2、(145236) の位数は 6 である。更に、

$$\{(13)(24)\}(145236) = (12)(36)(45) = (145236)^{-1}\{(13)(24)\}$$

であるから、二面体群の議論により、

$$\begin{aligned} & <(13)(24),(145236)> \\ = \ & \left\{ \{(13)(24)\}^a(145236)^b \;\middle|\; (a,b)\in\{0,1\}\times\{0,1,2,3,4,5\} \right\} \end{aligned}$$

が成り立ち、この群の位数は 12 となる。H はこの群の生成元を含んでいて、逆にこの群は H の生成元を含んでいることから、

$$\begin{aligned} G_2^{(12)} &:= <G_4^{(4)},(135)(246)> \\ &= <(13)(24),(145236)> \end{aligned}$$

となる。6 巡回元を含んでいるので、$G_2^{(12)}$ は、$G_1^{(12)}$ と共役ではない。6 巡回元で生成される巡回群 1 つにつき、$G_2^{(12)}$ と共役な群が 1 つ見つかることに注意すると、$\mathfrak{S}_6$ 内に $G_2^{(12)}$ と共役な群は 60 個存在する。

(2) H の 3-Sylow 部分群が 4 個存在する場合、H には位数 3 の元が 8 つ含まれていることから、H の 2-Sylow 部分群は、正規部分群とならざるを得ない。ここで、σ で $G_x^{(4)}$ の共役を取ったものが $G_x^{(4)}$ と等しければ、$G_x^{(4)}$ は H の正規部分群となることに注意する。以下、更に σ が 3 巡回元の場合と、台の交わらない 3 巡回元の積である場合の 2 通りについて場合分けしてゆく。

(a) $\sigma = (ijk)$ の場合。
　Sylow の定理から、H の 3-Sylow 部分群は全て共役なので、台の交わらない 3 巡回元の積の型をした元は H には含まれないこと。更に、H には位数 5 の元は含まれないことに注意すると、$(ijklm) = (ijk)(klm)$ より、H の 3 巡回元同士は、2 つ以上同じ数字が使われていなければいけない。よって、数字の並び替えを考えれば、$(ijk),(ijl) \in H$ として良い。このことから、

$$\begin{aligned} (jkl) &= (ijk)(ijl)(ijk)^{-1} \in H \\ (ikl) &= (jkl)(ijl) \in H \end{aligned}$$

であるので、H は $\mathfrak{A}_4$ を生成することが分かった。

$$\begin{aligned} G_3^{(12)} &:= \;< G_1^{(4)}, (123) > \\ &= \left\{ \begin{array}{cccc} e, & (12)(34), & (13)(24), & (14)(23), \\ (123), & (124), & (134), & (234), \\ (132), & (142), & (143), & (243) \end{array} \right\} \end{aligned}$$

は、3 巡回元の個数に注目すれば $G_1^{(12)}$, $G_2^{(12)}$ とは共役ではない $\mathfrak{S}_6$ の位数 12 の部分群となり、数字の選び方から、$\mathfrak{S}_6$ 内に $G_3^{(12)}$ と共役な群の個数は 15 個存在する。

(b) $\sigma = (ijk)(lmn)$ の場合

　$G_x^{(4)}$ のうち、6 つの数字を入れ替えない群は、σ で共役を取ると、別の群となってしまい、H の正規部分群とはならない。そのため、$x = 1, 2, 5$ とはならない。また、台の交わらない互換の積に対して σ で共役を取ることを考えると、$\mathfrak{S}_6$ 内の別の元になってしまうことから、台の交わらない互換の積の型の元を 1 つだけ含んでいる $x = 3, 5, 7$ の場合も、$G_x^{(4)}$ は H の正規部分群とはならない。よって、H として、$G_6^{(4)}$ と σ で生成されるもののみを考えればよい。ここで、σ の冪をとったり数字を並び替えることで、$i = 1$, $1 < l < m < n \leq 6$ として良い。また、$1, 2 \in \{i, j, k\}$ を仮定すると、$(12)(34)$ の σ での共役を考えた時に、$G_6^{(4)}$ 内の元とは違う元が表れてしまう。$3, 4 \in \{i, j, k\}$ や、$5, 6 \in \{i, j, k\}$ を仮定しても同様に、$G_6^{(4)}$ が H の正規部分群とならなくなってしまうことに注意すると、

$$\begin{aligned} \sigma &= (135)(246), (136)(245), (145)(236), (146)(235) \\ & (153)(246), (163)(245), (154)(236), (164)(235) \end{aligned}$$

の 8 通りが考えられる。これらは全て、H の 3-Sylow 部分群それぞれの生成元であり、このとき、

$$\begin{aligned} G_4^{(12)} &:= \;< G_6^{(4)}, (135)(246) > \\ &= \left\{ \begin{array}{cccc} e, & (12)(34), & (12)(56), & (34)(56), \\ (135)(246), & (136)(245), & (145)(236), & (146)(235), \\ (153)(264), & (163)(254), & (154)(263), & (164)(253) \end{array} \right\} \end{aligned}$$

は、$\mathfrak{S}_6$ の位数 12 の部分群となる。台の交わらない 3 巡回元の積の型の元の個数に注目すれば、これは $G_1^{(12)}$ から $G_3^{(12)}$ まで

の群とは共役ではないことが分かる。$\mathfrak{S}_6$ 内に $G_6^{(4)}$ と共役な群は 15 個存在するので、$\mathfrak{S}_6$ 内に $G_4^{(12)}$ と共役な群も 15 個存在する。

6.4 $\mathfrak{S}_6$ の位数 24 の部分群

H は、$\mathfrak{S}_6$ の位数 24 の部分群とする。24 の素因数分解を考えると、H の 2-Sylow 部分群の位数は 8 で、3-Sylow 部分群の位数は 3 であることが分かる。ここで、H の 2-Sylow 部分群は、$G_x^{(8)}$ $(x \in \{1,2,3,4,5,6,7\})$ と $\mathfrak{S}_6$ 内で共役な群になるが、H を $\mathfrak{S}_6$ 内の共役で動かすことで、$G_x^{(8)}$ が H の 2-Sylow 部分群の 1 つであるとしても一般性を失わない。更に、H には位数 3 の元 σ が含まれていて、H は $G_x^{(8)}$ と σ で生成される群となる。Sylow の定理から、H の 3-Sylow 部分群の個数 λ_3 は、8 の約数かつ、3 を法として 1 と合同な数である。よって、$\lambda_3 = 1$ または $\lambda_3 = 4$ であるので、この 2 通りで場合分けして考えてゆく。

(1) H の 3-Sylow 部分群が 1 個の場合、$<\sigma>$ は H の正規部分群となる。
ここで、H の生成元で $<\sigma>$ の共役を取ったものが $<\sigma>$ に等しければ、$<\sigma>$ は H の正規部分群となることに注意する。以下、更に σ が 3 巡回元の場合と、台の交わらない 3 巡回元の積である場合の 2 通りについて場合分けしてゆく。

  (a) $\sigma = (ijk)$ とする。ここで、$\mathfrak{S}_6$ の部分群は自然に $\{1,2,3,4,5,6\}$ に作用するが、それによって軌道分解を考える。$H = <G_x^{(8)}, \sigma>$ が元数が 4 以上の軌道を持つ場合、$<\sigma>$ が H の正規部分群とならないことに注意する。よって、$x = 4$ の場合のみを考えればよいが、$x = 4$ で場合も $<\sigma>$ は正規部分群にはならない。よって、H は $\mathfrak{S}_6$ の位数 24 の部分群とはならないことが分かる。

  (b) $\sigma = (ijk)(lmn)$ とする。$(12)(34)$ が H に含まれているので、$<\sigma>$ が H の正規部分群となるように、$\sigma = (12k)(3mn)$ として良い。
  この時、$(13)(24), (12), (1324)$ で $<\sigma>$ の共役を取ることを考えると、別の群が得られてしまうことから、$<\sigma>$ は H の正規部分群とはならない。

以上より、H の 3-Sylow 部分群の個数は 1 個とはならない。

(2) H の 3-Sylow 部分群の個数が 4 個である場合、更に σ が 3 巡回元の場合と、台の交わらない 3 巡回元の積である場合の 2 通りについて場合分けしてゆく。

(a) $\sigma = (ijk)$ の場合、$\mathfrak{S}_6$ の位数 12 の部分群についての議論から、H は $\mathfrak{A}_4$ を含み、H の正規部分群となる。ここで、$\mathfrak{A}_4$ が 1, 2, 3, 4 のみを入れ替えるか、そうでないかについて場合分けをして考えてゆく。

(i) $\mathfrak{A}_4$ が 1, 2, 3, 4 を入れ替える場合、$\mathfrak{A}_4$ は $G_1^{(4)}$ を正規部分群に持つ。

ここで、Sylow の定理から、H の 2-Sylow 部分群は $G_1^{(4)}$ を含むことに注意すると、H の 2-Sylow 部分群は、$G_1^{(8)}$, $G_2^{(8)}$, $G_3^{(8)}$ のどれかであることが分かる。この時、$\mathfrak{S}_6$ の位数 24 の部分群として、

$$\begin{aligned} G_1^{(24)} &:= <G_1^{(8)}, (123)> = \mathfrak{S}_4 \\ G_2^{(24)} &:= <G_2^{(8)}, (123)> = \mathfrak{A}_4 \times \mathfrak{S}_2 \\ G_3^{(24)} &:= <G_3^{(8)}, (123)> = (\mathfrak{S}_4 \times \mathfrak{S}_2) \cap \mathfrak{A}_6 \end{aligned}$$

が得られ、これらは互いに共役ではないことが分かる。数字の選び方に注意すると、これらと共役な群はそれぞれ $\mathfrak{S}_6$ 内に、15 個ずつ存在する。

(ii) $\mathfrak{A}_4$ が 1, 2, 3, 4 以外の数字も入れ替える場合を考える。

ここで、$\mathfrak{S}_6$ の部分群は自然に $\{1,2,3,4,5,6\}$ に作用するが、それによって軌道分解を考える。$x \neq 4$ では、$\{1,2,3,4\}$ が $G_x^{(8)}$ の軌道になり、このケースでは $\mathfrak{A}_4$ は $\{1,2,3,4\}$ の偶置換になる。$x = 4$ の場合も、$\mathfrak{S}_4 \times \mathfrak{S}_2$ に共役になる。

(b) $\sigma = (ijk)(lmn)$ の場合、24 の素因数分解を考えると、Sylow の定理から、H の 2-Sylow 部分群の個数 λ_2 は、3 の約数かつ、2 を法として 1 と合同な数である。よって、$\lambda_2 = 1$ または $\lambda_2 = 3$ であるので、この 2 通りで場合分けして考えてゆく。

(i) H の 2-Sylow 部分群の個数が 1 個である場合、$G_x^{(8)}$ は H の正規部分群となる。

σ で $G_x^{(8)}$ の共役を取ることを考える。ξ を位数 4 の元、ま

たは互換とすると、$\xi, \sigma\xi\sigma^{-1}, \sigma^2\xi\sigma^{-2}$ は互いに異なる元となる。よって、$G_x^{(8)}$ の中に位数 4 の元や互換の個数が 1 個か 2 個であるときは、H の正規部分群とはなり得ない。よって、$G_4^{(8)}$ のみが H の正規部分群となる可能性があるので、$G_4^{(8)}$ は H の正規部分群であるとする。ここで、$G_6^{(4)}$ は $G_4^{(8)}$ の特性部分群なので、$G_6^{(4)}$ は H の正規部分群となる。この時、$\mathfrak{S}_6$ の位数 12 の部分群についての議論から、3-Sylow 部分群 4 つの生成元はそれぞれ、$(135)(246)$, $(136)(245)$, $(145)(236)$, $(146)(235)$ となり、$G_4^{(24)} := < G_4^{(8)}, (135)(246) >$ は $\mathfrak{S}_6$ の位数 24 の部分群となる。これは 3 巡回元が含まれないので、$G_1^{(24)}$ から $G_3^{(24)}$ までの群とは共役ではないことが分かる。この群は、$G_4^{(8)}$ と共役な群 1 つにつき、$G_4^{(24)}$ と共役な群が 1 つ見つかることから、$G_4^{(24)}$ と共役な群は $\mathfrak{S}_6$ 内に 15 個存在する。

(ii) H の 2-Sylow 部分群の個数が 3 個である場合、H の 3-Sylow 部分群の個数は 4 個であるので、位数 24 の有限群の分類 [1] から、H は $\mathfrak{S}_4$ と同型な群であることが分かる。よって H は、$\mathfrak{A}_4$ と同型な位数 12 の正規部分群 N を持つ。また、σ は N に含まれている。ここで、$G_1^{(12)}, G_2^{(12)}$ は $\mathfrak{A}_4$ と同型ではなく、$G_3^{(12)}$ には σ と共役な元は含まれていない。$G_4^{(12)}$ は $\mathfrak{A}_4$ と同型で、σ と共役な元を含んでいるので、$\mathfrak{S}_6$ の位数 12 の部分群で、N になり得るものは $G_4^{(12)}$ のみである。よって、$N = G_4^{(12)}$ が得られ、H の位数 12 の部分群はこれのみであることが分かった。今、$G_4^{(12)}$ は H の正規部分群であり、$G_4^{(12)}$ の特性部分群 $G_6^{(4)}$ は H の正規部分群である。よって、H は $N_{\mathfrak{S}_6}(G_6^{(4)})$ の部分群である。この時、$G_6^{(4)}$ は H の正規部分群でもあり、$H/G_6^{(4)} \subset N_{\mathfrak{S}_6}(G_6^{(4)})/G_6^{(4)}$ が得られる。ここで、$N_{\mathfrak{S}_6}(G_6^{(4)})/G_6^{(4)}$ は位数 12 の群であり、$H/G_6^{(4)}$ は $N_{\mathfrak{S}_6}(G_6^{(4)})/G_6^{(4)}$ の位数 6 の部分群である。$\overline{(146235)}$ は $N_{\mathfrak{S}_6}(G_6^{(4)})/G_6^{(4)}$ の位数 6 の元であり、$\overline{(13)(24)}$ は $N_{\mathfrak{S}_6}(G_6^{(4)})/G_6^{(4)}$ の位数 2 の元である。更に、

$$\overline{\{(13)(24)\}}\ \overline{(146235)} = \overline{(12)(35)(46)} = \overline{(146235)}^{-1}\overline{\{(13)(24)\}}$$

であるから、二面体群の議論により、

$$\begin{aligned} & <\overline{(13)(24)}, \overline{(146235)}> \\ = & \left\{ \overline{\{(13)(24)\}}^a \overline{(146235)}^b \;\middle|\; (a,b) \in \{0,1\} \times \{0,1,2,3,4,5\} \right\} \end{aligned}$$

が成り立ち、

$$N_{\mathfrak{S}_6}(G_6^{(4)})/G_6^{(4)} = <\overline{(13)(24)}, \overline{(145236)}>$$

が得られる。この群は位数 12 の二面体群で、位数 6 の部分群は、

$$\begin{aligned} H_1 &:= <\overline{(145236)}> \\ H_2 &:= <\overline{(145236)}^2, \overline{(13)(24)}> \\ &= <\overline{(135)(246)}, \overline{(13)(24)}> \\ H_3 &:= <\overline{(145236)}^2, \overline{(145236)(13)(24)}> \\ &= <\overline{(135)(246)}, \overline{(16)(25)(34)}> \end{aligned}$$

の 3 つが存在する。この 3 つの群に対応して、$\mathfrak{S}_6$ の位数 24 の部分群が存在する。まず H_1 に対応して、$< G_6^{(4)}, (145236) >$ という $\mathfrak{S}_6$ の位数 24 の部分群が見つかるが、これは、

$$< G_4^{(8)}, (135)(246) > = G_4^{(24)}$$

となる。次に、H_2 に対応して、

$$< G_4^{(12)}, (13)(24) > =: G_5^{(24)}$$

という $\mathfrak{S}_6$ の位数 24 の部分群が、H_3 に対応して、

$$< G_4^{(12)}, (16)(25)(34) > =: G_6^{(24)}$$

という $\mathfrak{S}_6$ の位数 24 の部分群が見つかる。これらの群は、台の交わらない 3 巡回元の積の型の元を含んだ、2-Sylow 部分群の個数が 3 個である群なので、$G_1^{(24)}$ から $G_4^{(24)}$ までの群とは共役ではなく、$G_5^{(24)}$ は $N_{\mathfrak{S}_6}(G_6^{(4)})$ の偶置換全体であるが、$G_6^{(24)}$ には奇置換が含まれているので、$G_5^{(24)}$ と $G_6^{(24)}$ は互いに共役ではない。それぞれの群と $\mathfrak{S}_6$ 内で共役な群の個数は、$N_{\mathfrak{S}_6}(G_6^{(4)})$ と共役な群 1 つにつき、$G_4^{(24)}$, $G_5^{(24)}$, $G_6^{(24)}$ と共役な群がそれぞれ 1 つずつ見つかることから、$G_4^{(24)}$, $G_5^{(24)}$, $G_6^{(24)}$ と共役な群はそれぞれ $\mathfrak{S}_6$ 内に 15 個存在する。

6.5 $\mathfrak{S}_6$ の位数 36 の部分群

H は、$\mathfrak{S}_6$ の位数 36 の部分群とする。H の 2-Sylow 部分群 S_2 の位数は 4 なので、S_2 は $G_1^{(4)}$, $G_2^{(4)}$, $G_3^{(4)}$, $G_4^{(4)}$, $G_5^{(4)}$, $G_6^{(4)}$ または、$G_7^{(4)}$ のいずれかと共役になる。共役で取り替えて、S_2 は $G_1^{(4)}, \dots, G_7^{(4)}$ のどれかであるとしてよい。また、${}^{\#}H = 3^2 \times 4$ なので、H の 3-Sylow 部分群は $\mathfrak{S}_6$ の 3-Sylow 部分群であるから、

$$H \supset <(ijk), (lmn)> = S_3$$

であり、$H = <G_x^{(4)}, (ijk), (lmn)> \quad (x \in \{1, 2, 3, \dots, 7\})$ となるはずである。

(1) $H \not\triangleright S_3$ の場合。H の 3-Sylow 部分群の個数を λ とすると、Sylow の定理より $\lambda = 1, 4$ であるから、仮定より $\lambda = 4$ となる。補題 5.1 より、$H/N_H(S_3)$ と、S_3 と共役な部分群の集合は 1 対 1 に対応する。よって、

$$[H : N_H(S_3)] = {}^{\#}\big(H/N_H(S_3)\big) = \lambda = 4$$

となり、補題 5.2 より $\mathrm{Ker}\,\phi \subset N_H(S_3)$ を満たす準同形写像 $\phi\colon H \to \mathfrak{S}_4$ が存在する。${}^{\#}N_H(S_3) = 9$ なので ${}^{\#}\mathrm{Ker}\,\phi = 1, 3, 9$ である。${}^{\#}\mathrm{Ker}\,\phi = 1$ なら、${}^{\#}\mathrm{Im}\,\phi = {}^{\#}(H/\mathrm{Ker}\,\phi) = 36$ であり ${}^{\#}\mathfrak{S}_4 < {}^{\#}\mathrm{Im}\,\phi$ となり矛盾。${}^{\#}\mathrm{Ker}\,\phi = 9$ なら、$S_3 \triangleleft H$ になり矛盾。よって、${}^{\#}\mathrm{Ker}\,\phi = 3$ であるから、${}^{\#}\mathrm{Im}\,\phi = {}^{\#}(H/\mathrm{Ker}\,\phi) = 36 \div 3 = 12$ なので、$\mathrm{Im}\,\phi = \mathfrak{A}_4$ である。$\mathfrak{A}_4$ の位数 4 の正規部分群を V とすると $\phi^{-1}(V) \triangleleft H$ で、${}^{\#}\phi^{-1}(V) = {}^{\#}H \div {}^{\#}(\mathfrak{A}_4/V) = 36 \div 3 = 12$ なので $\phi^{-1}(V)$ は $G_1^{(12)}$, $G_2^{(12)}$, $G_3^{(12)}$ または、$G_4^{(12)}$ のいずれかと共役である。

(a) $\phi^{-1}(V)$ が $G_1^{(12)}$ と共役の場合。$G_1^{(12)}$ と共役な群は既に見たように $\mathfrak{S}_6$ 内に 60 個あるので、$[\mathfrak{S}_6 : N_{\mathfrak{S}_6}\big(G_1^{(12)}\big)] = 60$ より、${}^{\#}N_{\mathfrak{S}_6}\big(G_1^{(12)}\big) = 720 \div 60 = 12$ である。これは、$G_1^{(12)} = N_{\mathfrak{S}_6}\big(G_1^{(12)}\big) \supset H$ となり矛盾。

(b) $\phi^{-1}(V)$ が $G_2^{(12)}$ と共役の場合。$G_2^{(12)}$ と共役な群は既に見たように $\mathfrak{S}_6$ 内に 60 個あるので、(a) と同様に矛盾。

(c) $\phi^{-1}(V)$ が $G_3^{(12)}$ と共役の場合。i, j, k と l, m, n を取り直して、$(ij)(kl) \in \phi^{-1}(V)$ または $(il)(jm) \in \phi^{-1}(V)$ としてよい。

(i) $(ij)(kl) \in \phi^{-1}(V)$ のとき。

$$(ijk)(lmn)(ij)(kl)\{(ijk)(lmn)\}^{-1} = (im)(jk) \notin \phi^{-1}(V)$$

なので、$\phi^{-1}(V) \ntriangleleft H$ となり矛盾。

(ii) $(il)(jm) \in \phi^{-1}(V)$ のとき。

$$(ijk)(lmn)(il)(jm)\{(ijk)(lmn)\}^{-1} = (jm)(kn) \notin \phi^{-1}(V)$$

なので、$\phi^{-1}(V) \ntriangleleft H$ となり矛盾。

(d) $\phi^{-1}(V)$ が $G_4^{(12)}$ と共役の場合。i, j, k と l, m, n を取り直して、$(ij)(kl) \in \phi^{-1}(V)$ または $(il)(jm) \in \phi^{-1}(V)$ としてよい。

(i) $(ij)(kl) \in \phi^{-1}(V)$ のとき。

$$(ijk)(ij)(kl)(ijk)^{-1} = (il)(jk) \notin \phi^{-1}(V)$$

なので、$\phi^{-1}(V) \ntriangleleft H$ となり矛盾。

(ii) $(il)(jm) \in \phi^{-1}(V)$ のとき。

$$(ijk)(il)(jm)(ijk)^{-1} = (jl)(km) \notin \phi^{-1}(V)$$

なので、$\phi^{-1}(V) \ntriangleleft H$ となり矛盾。

以上より、$H \ntriangleright S_3$ の場合は存在しない。

(2) $H \triangleright S_3$ の場合。$X = \{i, j, k\}$, $Y = \{l, m, n\}$ という 2 つの集合を考える。

$(pq) \in G_x^{(4)} \Rightarrow p$ と q は同じ集合に属する（つまり、$p, q \in X$ or $p, q \in Y$）
$(pq)(rs) \in G_x^{(4)} \Rightarrow p$ と q、r と s は同じ集合に属する
$(pq)(rs)(tu) \in G_x^{(4)} \Rightarrow p$ と q、r と s、t と u は違う集合に属する
$(pqrs) \in G_x^{(4)} \Rightarrow$ 群は存在しない

であるから、S_2 は $G_2^{(4)}$, $G_4^{(4)}$ または、$G_7^{(4)}$ のいずれかになる。

(a) $S_2 = G_2^{(4)}$ のとき。$i = 1$, $j = 2$, $m = 5$, $n = 6$ としてよい。

(i) $k=3, l=4$ とすると、$H=\mathfrak{S}_3\times\mathfrak{S}_3$ であり

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} e, & (123), & (132), & (456), & (123)(456), & (132)(456), & (465), & (123)(465), & (132)(465), \\ (12), & (23), & (13), & (12)(456), & (23)(456), & (13)(456), & (12)(465), & (23)(465), & (13)(465), \\ (56), & (123)(56), & (132)(56), & (46), & (123)(46), & (132)(46), & (45), & (123)(45), & (132)(45), \\ (12)(56), & (23)(56), & (13)(56), & (12)(46), & (23)(46), & (13)(46), & (12)(45), & (23)(45), & (13)(45) \end{array}\right\}$$

となる。

(ii) $k=4, l=3$ とすると、(i) の群と共役な群となる。

この場合、(i) の群と共役な群は ${}_6\mathrm{C}_3 \div 2 = 10$ 個ある。

(b) $S_2 = G_4^{(4)}$ のとき。$i=1,\ j=3,\ l=2,\ m=4$ としてよい。

(i) $k=5, n=6$ とすると、H は

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} e, & (135), & (153), & (246), & (135)(246), & (153)(246), & (264), & (135)(264), & (153)(264), \\ (13)(24), & (35)(24), & (15)(24), & (13)(46), & (35)(46), & (15)(46), & (13)(26), & (35)(26), & (15)(26), \\ (12)(34)(56), & (143652), & (165432), & (123456), & (145236), & (16)(23)(45), & (125634), & (14)(25)(36), & (163254), \\ (14)(23)(56), & (123654), & (165234), & (143256), & (12)(36)(45), & (163452), & (143256), & (125436), & (16)(25)(34) \end{array}\right\}$$

とならざるを得ない。これが積に関して閉じていることを示して、群であることを証明する。$\sigma=(13)(24),\ \tau=(12)(34)(56),\ \xi_1=(135),\ \xi_2=(246)$ とおくと、$H = <\sigma,\tau,\xi_1,\xi_2>$ となる。$N=<\tau,\xi_1,\xi_2>$ とおくと、既に見たようにこれは位数 18 の群であり、$\sigma\notin N,\ H=N\amalg\sigma N$ である。$n_1, n_2\in N$ に対して、

$$(\sigma n_1)n_2 = \sigma(n_1 n_2)\in\sigma N$$

であり、

$$\sigma^{-1}\tau\sigma = (12)(34)(56) = \tau$$
$$\sigma^{-1}\xi_1\sigma = (153) = \xi_1^2$$
$$\sigma^{-1}\xi_2\sigma = (264) = \xi_2^2$$

より、

$$\tau\sigma = \sigma\tau$$
$$\xi_1\sigma = \sigma\xi_1^2$$
$$\xi_2\sigma = \sigma\xi_2^2$$

である。よって、$H=N\amalg\sigma N$ は積で閉じているので群になる。

(ii) $k=6,\, n=5$ とすると、(i) の群と共役な群となる。

この H の 3-Sylow 部分群を S とおくと $H \subset N_{\mathfrak{S}_6}(S)$ であるが、S と共役な群 $S'(\neq S)$ に対しては $H \not\subset N_{\mathfrak{S}_6}(S')$ となる。逆に $N_{\mathfrak{S}_6}(S)$ に含まれる H と共役な群は、H のみであることもわかる。よって、(i) の群は S と 1 対 1 に対応するので、(i) の群と共役な群は ${}_6\mathrm{C}_3 \div 2 = 10$ 個ある。

(c) $S_2 = G_7^{(4)}$ のとき。$i=1,\, j=2,\, l=3,\, m=4$ としてよい。

(i) $k=5,\, n=6$ とすると、$H = N_{\mathfrak{S}_6}(S_3) \cap \mathfrak{A}_6$ となるので、H は

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} e, & (125), & (152), & (346), & (125)(346), & (152)(346), & (364), & (125)(364), & (152)(364), \\ (12)(34), & (25)(34), & (15)(34), & (12)(46), & (25)(46), & (15)(46), & (12)(36), & (25)(36), & (15)(36), \\ (1324)(56), & (2653)(14), & (1654)(23), & (2456)(13), & (1453)(26), & (1623)(45), & (1356)(24), & (1426)(35), & (2354)(16), \\ (1423)(56), & (2654)(13), & (1653)(24), & (1456)(23), & (1326)(45), & (2453)(16), & (2356)(14), & (1354)(26), & (1624)(35) \end{array}\right\}$$

となる。

(ii) $k=6,\, n=5$ とすると、(i) の群と共役な群となる。

この場合、(i) の群は S_3 と 1 対 1 に対応するので、(i) の群と共役な群は ${}_6\mathrm{C}_3 \div 2 = 10$ 個ある。

6.6 $\mathfrak{S}_6$ の位数 72 の部分群

H は、$\mathfrak{S}_6$ の位数 72 の部分群とする。H の 2-Sylow 部分群 S_2 の位数は 8 なので、$S_2 \subset G$ を満たす $\mathfrak{S}_6$ の 2-Sylow 部分群 G が存在する。H と S_2 を共役でずらして、H の 2-Sylow 部分群 S_2 が $S_2 \subset G_1^{(16)}$ を満たすとしてよい。すると、S_2 は $G_1^{(8)}, G_2^{(8)}, G_3^{(8)}, G_4^{(8)}, G_5^{(8)}, G_6^{(8)}$ または、$G_7^{(8)}$ のいずれかになる。また、${}^{\#}H = 3^2 \times 8$ なので、H の 3-Sylow 部分群は $\mathfrak{S}_6$ の 3-Sylow 部分群であるから、

$$H \supset \, <(ijk),(lmn)> = S_3$$

であり、$H = \, <G_x^{(8)}, (ijk), (lmn)> \quad (x \in \{1,2,3,\ldots,7\})$ となるはずである。

(1) $H \ntriangleright S_3$ の場合。H の 3-Sylow 部分群の個数を λ とすると、Sylow の定理より $\lambda = 1, 4$ であるから、仮定より $\lambda = 4$ とな

る。補題 5.1 より、$H/N_H(S_3)$ と、S_3 と共役な部分群の集合は 1 対 1 に対応するので、

$$[H : N_H(S_3)] = {}^{\#}\bigl(H/N_H(S_3)\bigr) = \lambda = 4$$

となり、補題 5.2 より $\operatorname{Ker}\phi \subset N_H(S_3)$ を満たす準同形写像 $\phi\colon H \to \mathfrak{S}_4$ が存在する。${}^{\#}N_H(S_3) = 9$ なので ${}^{\#}\operatorname{Ker}\phi = 1, 3, 9$ である。${}^{\#}\operatorname{Ker}\phi = 1$ なら、${}^{\#}\operatorname{Im}\phi = {}^{\#}(H/\operatorname{Ker}\phi) = 72$ であり ${}^{\#}\mathfrak{S}_4 < {}^{\#}\operatorname{Im}\phi$ となり矛盾。${}^{\#}\operatorname{Ker}\phi = 9$ なら、$S_3 \lhd H$ になり矛盾。よって、${}^{\#}\operatorname{Ker}\phi = 3$ なので、

$$\operatorname{ord}(\sigma) = 3,\ <\sigma> \lhd H$$

を満たす $\sigma \in \mathfrak{S}_6$ が存在する。$L = <\sigma>$ とおくと、既に見たように L と共役な群は $\mathfrak{S}_6$ 内に 20 個あるので、$[\mathfrak{S}_6 : N_{\mathfrak{S}_6}(L)] = 20$ より、${}^{\#}N_{\mathfrak{S}_6}(L) = 720 \div 20 = 36$ である。これは、$N_{\mathfrak{S}_6}(L) = L \lhd H$ となり矛盾。

(2) $H \rhd S_3$ の場合。$H \subset N_{\mathfrak{S}_6}(S_3)$ であるが、

$${}^{\#}N_{\mathfrak{S}_6}(S_3) = {}^{\#}\mathfrak{S}_6 \div [\mathfrak{S}_6 : N_{\mathfrak{S}_6}(S_3)] = 720 \div 10 = 72$$

なので、$H = N_{\mathfrak{S}_6}(S_3)$ である。この群は 3-Sylow 部分群と 1 対 1 に対応するので、この群と共役な群は ${}_6\mathrm{C}_3 \div 2 = 10$ 個ある。

参考文献

[1] 2004 年度藏野ゼミ卒業論文、「位数 30 以下の群の分類」、平成 17 年 2 月 18 日

[2] 2008 年度藏野研究室卒業論文、「$\mathfrak{S}_n$ $(n = 3, 4, 5)$ の部分群の分類」、2009 年 2 月 25 日