2014 年度 修士学位請求論文

$\mathbb{Z}^n$ 次数付環の chamber 分解について

明治大学大学院理工学研究科基礎理工学専攻

越前谷彩香

指導教員 藏野和彦

目次

1 序

この論文では、$\mathbb{Z}^n$ 次数付環 R の chamber 分解の存在について証明を与える．R の 0 でない元の次数を生成元とする錐体を $C(R)$ と表す．このとき R の chamber 分解を次のように定義する．

定義 1.1 有限個の R の chamber $\sigma_1, \cdots, \sigma_l$ が存在し、$C(R) = \bigcup_{i=1}^{l} \sigma_i$ かつ、$i \neq j$ ならば $\sigma_i \cap \sigma_j \subset \partial\sigma_i \cap \partial\sigma_j$ となるとき、この $C(R)$ の表し方を R の chamber 分解という．また chamber ideal が全て異なる chamber 分解を最短な chamber 分解という．

chamber とは、内点の取り方によらずにあるイデアルが定まる n 次元有限生成錐体のことである．詳しくは第 2 章で定義をする．

$n = 2$ のとき、chamber 分解が存在することは [高瀬, (2.6)] により示されている．$R_{\mathbf{0}}$ 上の R の斉次生成元の次数を座標平面上に点としてとり、その点を通り原点を端点とする半直線を考える．このとき隣り合う直線で囲まれた部分が chamber となり、それらによって R が chamber 分解されるのである．

次の定理が一般の n に対する結果であり、この論文における主定理である．

定理 1.2 $R = \bigoplus_{\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^n} R_{\mathbf{a}}$ を $\mathbb{Z}^n$ 次数付ネーター整域、$R_{\mathbf{0}}$ を体、$\{\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^n \mid R_{\mathbf{a}} \neq 0\}$ は $\mathbb{Q}$ ベクトル空間として $\mathbb{Q}^n$ を生成するとする．このとき R は chamber 分解を持つ．また、最短な chamber 分解が一意的に存在する．

第 2 章で chamber 分解の存在について、第 3 章で最短な分解の存在性についての証明を与える．第 4 章で第 3 章に用いる補題の証明、第 5 章では、finite な環拡大における chamber 分解について述べる．

2 chamber 分解の存在

$R = \bigoplus_{\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^n} R_{\mathbf{a}}$ を $\mathbb{Z}^n$ 次数付ネーター整域、$R_{\mathbf{0}}$ を体、$A = \{\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^n \mid R_{\mathbf{a}} \neq 0\}$ とし、A は $\mathbb{Q}$ ベクトル空間として $\mathbb{Q}^n$ を生成するとする．また、$C(R) = \sum_{\mathbf{a} \in A} \mathbb{R}_{\geq 0}\mathbf{a}$ とする．

注意 2.1 R は $R_{\mathbf{0}}$ 上有限生成な環である．従って

$$R = R_{\mathbf{0}}[x_1, \cdots, x_s]$$

と表わせる．ただし x_i は斉次元とし、$\deg x_i = \mathbf{a}_i$（$1 \leq i \leq s$）とする．このとき、$A = \{n_1\mathbf{a}_1 + \cdots + n_s\mathbf{a}_s | 1 \leq i \leq s$ に対し $n_i \in \mathbb{N}_{\geq 0}\}$ であり、$C(R) = \mathbb{R}_{\geq 0}\mathbf{a}_1 + \cdots + \mathbb{R}_{\geq 0}\mathbf{a}_s$ である．よって $C(R)$ は n 次元有限生成錐体である．

定義 2.2 有理数点 $\mathbf{a}$（つまり $\mathbf{a} \in \mathbb{Q}^n$）に対し

$$J_R(\mathbf{a}) = (R_{\mathbf{c}} \mid \mathbf{c} \in \mathbb{R}_{>0}\mathbf{a} \cap \mathbb{Z}^n)R$$

と定める．これは R のイデアルである．

定義 2.3 $\mathbb{R}^n$ の部分集合 σ が次の 2 条件を満たすとき、σ を R の chamber という．

(1) σ は n 次元有限生成錐体.

(2) $\mathrm{Int}(\sigma)$ の $\mathbf{0}$ でない任意の有理数点 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ に対し、$\sqrt{J_R(\mathbf{a})} = \sqrt{J_R(\mathbf{b})}$

ここで $\mathrm{Int}(\sigma)$ は $\mathbb{R}^n$ の通常の位相での σ の内部である．また σ を chamber とするとき、$J_\sigma = \sqrt{J_R(\mathbf{a})}$（ただし $\mathbf{a}$ は $\mathrm{Int}(\sigma)$ の $\mathbf{0}$ でない有理数点）と定め、J_σ を σ の chamber ideal という．

$\{H_1, \cdots, H_l\} = \{H \subset \mathbb{R}^n | H$ は $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_s$の中の一次独立な $n{-}1$ 個のベクトルで張られる超平面 $\}$

とし、$1 \leq i \leq l$ に対し

$$H_i = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | f_i(\mathbf{x}) = 0\}$$

を満たすように $\mathbb{R}$ 線形写像 $f_i \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を定める．また $\epsilon_i \in \{-1, +1\}$ に対し

$$C(\epsilon_1, \cdots, \epsilon_l) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n |\ \text{任意の } i \text{ に対し、} \epsilon_i f_i(\mathbf{x}) > 0\}$$

と定義する．

命題 2.4　上記の記号のもと

$$C(R) = \bigcup_{C(R)\cap C(\epsilon_1,\cdots,\epsilon_l)\neq\emptyset} \overline{C(\epsilon_1,\cdots,\epsilon_l)} \tag{2.1}$$

が成り立つ．ここで $\overline{C(\epsilon_1,\cdots,\epsilon_l)}$ は $C(\epsilon_1,\cdots,\epsilon_l)$ の閉包である．

命題 2.4 を示すために次の補題を証明する．

補題 2.5　(1)　$\mathbf{x}$ の ϵ 近傍 $U_\epsilon(\mathbf{x})$ が $C(R)$ に含まれるような $C(R)$ の元 $\mathbf{x}$ と正の実数 ϵ が存在する．つまり $\mathrm{Int}(C(R))$ は空でない．

(2)　g を n 変数多項式環 $\mathbb{R}[x_1,\cdots,x_n]$ の 0 でない多項式とすると、任意の点 $\mathbf{z}$ と任意の正の実数 ϵ に対し、$\mathbf{z}$ の ϵ 近傍 $U_\epsilon(\mathbf{z})$ は g の零点集合 $V(g)$ に含まれない．

証明　(1) を示す. $\mathbf{a}_{i_1},\cdots,\mathbf{a}_{i_n}$ が $\mathbb{R}$ 上 $\mathbb{R}^n$ を張るとする. 一次変換により、$\mathbf{a}_{i_1},\cdots,\mathbf{a}_{i_n}$ を $\mathbf{e}_1,\cdots,\mathbf{e}_n$ としてよい．このとき $\mathbf{e}_1+\cdots+\mathbf{e}_n$ は $C(R)$ の元であり、十分小さい正の実数 ϵ に対し、$U_\epsilon(\mathbf{e}_1+\cdots+\mathbf{e}_n)$ は $(\mathbb{R}_{\geq 0})^n$ に含まれる．従って $C(R)$ にも含まれるので、$\mathbf{x}$ として $\mathbf{e}_1+\cdots+\mathbf{e}_n$ をとればよい．

次に (2) を n に関する帰納法で示す．平行移動により、$\mathbf{z}=\mathbf{0}$ とする．$g(\mathbf{0})\neq 0$ のときはよい．$g(\mathbf{0})=0$ とする．$n=1$ のとき、$V(g)$ は有限集合であり、任意の正の実数 ϵ に対し $U_\epsilon(\mathbf{0})$ は無限集合であるので、このときは成り立つ．$n>1$ のとき、$g=f_0+f_1x_n+f_2x_n^2+\cdots+f_mx_n^m$（ただし $f_m\neq 0$, $0\leq i\leq m$ に対し $f_i\in\mathbb{R}[x_1,\cdots,x_{n-1}]$）とする．このとき任意の正の実数 ϵ に対し、帰納法の仮定から $U_{\frac{\epsilon}{2}}(\mathbf{0})\subset\mathbb{R}^{n-1}$ は $V(f_m)$ に含まれない．よって $f_m(b_1,\cdots,b_{n-1})\neq 0$ となる $U_{\frac{\epsilon}{2}}(\mathbf{0})$（$\subset\mathbb{R}^{n-1}$）の元 $(b_1,\cdots,b_{n-1})$ が存在する．すると

$$g(b_1,\cdots,b_{n-1},x_n)=f_0(b_1,\cdots,b_{n-1})+f_1(b_1,\cdots,b_{n-1})x_n+\cdots+f_m(b_1,\cdots,b_{n-1})x_n^m$$

であり、これは x_n についての 1 変数多項式なので、帰納法の仮定から $g(b_1,\cdots,b_{n-1},b_n)\neq 0$ となる $U_{\frac{\epsilon}{2}}(0)$（$\subset\mathbb{R}$）の元 b_n が存在する．このとき

$$\begin{aligned} d(\mathbf{0},(b_1,\cdots,b_n)) &\leq d((b_1,\cdots,b_{n-1},0),\mathbf{0})+d((b_1,\cdots,b_{n-1},0),(b_1,\cdots,b_n)) \\ &\leq \frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon \end{aligned}$$

が成り立つ．ここで $d(\mathbf{x},\mathbf{y})$ は $\mathbf{x},\mathbf{y}$ の二点間の距離である．よって $(b_1,\cdots,b_n)$ は $U_\epsilon(\mathbf{0})$ の元である．　**証明終**

命題 2.4 を示す．

証明　$\mathbf{x}$ を $C(R)\cap C(\epsilon_1,\cdots,\epsilon_l)$ の元とする．$C(R)$ は $\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_s$ で生成される n 次元錐体なのでカラテオドリーの定理 ([石田, (1.3.1)]) から、$\mathbf{x}$ が $\mathbb{R}_{\geq 0}\mathbf{a}_{i_1}+\cdots+\mathbb{R}_{\geq 0}\mathbf{a}_{i_n}$ に含まれるような一次独立なベクトル $\mathbf{a}_{i_1},\cdots,\mathbf{a}_{i_n}$（$1\leq i_1<\cdots<i_n\leq s$）が存在する．$\mathbf{y}$ を $C(\epsilon_1,\cdots,\epsilon_l)$ の元とすると、$\mathbf{y}=r_1\mathbf{a}_{i_1}+\cdots+r_n\mathbf{a}_{i_n}$（ただし $1\leq i\leq n$ に対し $r_i\in\mathbb{R}$）と表せる．このとき、$r_j\leq 0$ となる j があるとする．$\mathbf{a}_{i_1},\cdots,\mathbf{a}_{i_{j-1}},\mathbf{a}_{i_{j+1}},\cdots,\mathbf{a}_{i_n}$ が張る超平面を $H_k=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n\mid f_k(\mathbf{x})=0\}$ $(1\leq k\leq l)$ とすると

$$\epsilon_k f_k(\mathbf{y})=\epsilon_k f_k(r_1\mathbf{a}_{i_1}+\cdots+r_n\mathbf{a}_{i_n})=r_j\epsilon_k f_k(\mathbf{a}_{i_j})$$

であり、$\epsilon_k f_k(\mathbf{y})>0, r_j\leq 0$ より $r_j<0,\epsilon_k f_k(\mathbf{a}_{i_j})<0$ である．一方 $\mathbf{x}=r'_1\mathbf{a}_{i_1}+\cdots+r'_n\mathbf{a}_{i_n}$（ただし $1\leq i\leq n$ に対し $r'_i\in\mathbb{R}_{\geq 0}$）と書けるので

$$\epsilon_k f_k(\mathbf{x})=r'_j\epsilon_k f_k(\mathbf{a}_{i_j})<0$$

であるが、これは $\mathbf{x}$ が $C(\epsilon_1,\cdots,\epsilon_l)$ の元であることに矛盾する．従って $1\leq i\leq n$ に対し $r_i>0$ である．故に $C(\epsilon_1,\cdots,\epsilon_l)$ は $\mathbb{R}_{>0}\mathbf{a}_{i_1}+\cdots+\mathbb{R}_{>0}\mathbf{a}_{i_n}$ に含まれるので $C(R)$ に含まれる．有限生成錐体 $C(R)$ は閉集合 [石田, (1.3.3)] なので、$\overline{C(\epsilon_1,\cdots,\epsilon_l)}$ は $C(R)$ に含まれる．

逆を示す．$\mathbf{x}$ を $C(R)$ の元とする．このとき $\epsilon_1,\cdots,\epsilon_l$ をうまく選んで、$\mathbf{x}$ に収束する $C(R)\cap C(\epsilon_1,\cdots,\epsilon_l)$ の点列 $\{\mathbf{y}_n\}$ が存在することを示せばよい．

$B=\mathbb{R}^n\setminus\bigcup_{i=1}^{l}\{\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n\mid f_i(\mathbf{y})=0\}$ とおく．$g=f_1\cdots f_l$ とすると $B^c=\{\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n\mid g(\mathbf{y})=0\}=V(g)$ である．

$\mathbf{x}\in B$ のとき、任意の n に対し $\mathbf{y}_n=\mathbf{x}$ とすればよい．

$\mathbf{x}\notin B$ とする．補題 2.5(1) より $\mathbf{z}$ の ϵ 近傍 $U_\epsilon(\mathbf{z})$ が $C(R)$ に含まれるような $C(R)$ の元 $\mathbf{z}$ と正の実数 ϵ が存在する．もし $C(R)$ が B^c に含まれるとすると、$U_\epsilon(\mathbf{z})$ は $B^c=V(g)$ に含まれるが、これは補題 2.5（2）に矛盾する．よって B^c に含まれない $C(R)$ の元 $\mathbf{y}$ が存在する．すると任意の i に対し $f_i(\mathbf{y})\neq 0$ であるので、$\mathbf{y}\in C(\epsilon_1,\cdots,\epsilon_l)$ となる $\epsilon_1,\cdots,\epsilon_l\in\{-1,+1\}$ が存在する．$\mathbf{a}=\mathbf{x}+t(\mathbf{y}-\mathbf{x})$、ただし $0<t<1$ とおく．$\mathbf{a}\in C(R)$ に注意する．すると $f_i(\mathbf{a})=f_i(\mathbf{x})+tf_i(\mathbf{y}-\mathbf{x})$ となり、これは t についての一次関数であるから、線分上の点において f_i は単調関数である．従って $f_i(\mathbf{x})=0$ のときは、$\epsilon_i f_i(\mathbf{y})>0$ より $\epsilon_i f_i(\mathbf{a})>0$ である．$f_i(\mathbf{x})\neq 0$ のとき、$\epsilon_i f_i(\mathbf{x})>0$ なら $\epsilon_i f_i(\mathbf{a})>0$ である．$\epsilon_i f_i(\mathbf{x})<0$ なら、t を十分小さくとると $\epsilon_i f_i(\mathbf{a})<0$ である．従って $\epsilon'_i\in\{-1,+1\}$ をうまくとると、$\mathbf{x}$ に収束する $C(R)\cap C(\epsilon'_1,\cdots,\epsilon'_l)$ の点列 $\{\mathbf{y}_n\}$ が存在する．よって $\mathbf{x}$ は $\overline{C(\epsilon'_1,\cdots,\epsilon'_l)}$ の元であり、かつ $\mathbf{y}_n\in C(R)\cap C(\epsilon'_1,\cdots,\epsilon'_l)$ より $C(R)\cap C(\epsilon'_1,\cdots,\epsilon'_l)\neq\emptyset$ である．

証明終

命題 2.4 の式 (2.1) が、R の chamber 分解であること (命題 2.8) を示そう.

補題 2.6 $C(\epsilon_1,\cdots,\epsilon_l)\neq\emptyset$ であるとき、次が成り立つ.

(1) $\overline{C(\epsilon_1,\cdots,\epsilon_l)}=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n \mid 1\leq i\leq l$ に対し $\epsilon_i f_i(\mathbf{x})\geq 0\}$

(2) $\mathrm{Int}(\overline{C(\epsilon_1,\cdots,\epsilon_l)})=C(\epsilon_1,\cdots,\epsilon_l)$

証明 (1) を示す. $D(\epsilon_1,\cdots,\epsilon_l)=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n \mid 1\leq i\leq l$ に対し $\epsilon_i f_i(\mathbf{x})\geq 0\}$ とおく. すると $D(\epsilon_1,\cdots,\epsilon_l)$ は閉集合であるので、$\overline{C(\epsilon_1,\cdots,\epsilon_l)}$ は $D(\epsilon_1,\cdots,\epsilon_l)$ に含まれる. 逆を示す. $\mathbf{x}$ を $D(\epsilon_1,\cdots,\epsilon_l)$ の元とする. $\mathbf{y}$ を $C(\epsilon_1,\cdots,\epsilon_l)$ の元とするとき、$\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ を結ぶ線分上の任意の点 $\mathbf{z}$ (ただし $\mathbf{z}\neq\mathbf{x}$) において、任意の i に対し $\epsilon_i f_i(\mathbf{x})\geq 0, \epsilon_i f_i(\mathbf{y})>0$ であるので $\epsilon_i f_i(\mathbf{z})>0$ である. 従って $\mathbf{z}$ は $C(\epsilon_1,\cdots,\epsilon_l)$ の元であるから、$\mathbf{x}$ に収束する $C(\epsilon_1,\cdots,\epsilon_l)$ の点列が存在する. よって $\mathbf{x}$ は $\overline{C(\epsilon_1,\cdots,\epsilon_l)}$ に含まれる.

(2) を示す. $C(\epsilon_1,\cdots,\epsilon_l)$ は開集合であるから、$C(\epsilon_1,\cdots,\epsilon_l)$ は $\mathrm{Int}(D(\epsilon_1,\cdots,\epsilon_l))$ に含まれる. 逆を示す. $C(\epsilon_1,\cdots,\epsilon_l)$ に含まれない $\mathrm{Int}(D(\epsilon_1,\cdots,\epsilon_l))$ の元 $\mathbf{x}$ が存在したとする. すると $\mathbf{x}$ の ϵ 近傍 $U_\epsilon(\mathbf{x})$ が $\mathrm{Int}(D(\epsilon_1,\cdots,\epsilon_l))$ に含まれるような正の実数 ϵ が存在する. このとき、$C(\epsilon_1,\cdots,\epsilon_l)$ の元 $\mathbf{y}$ と $\mathbf{x}$ を結ぶ直線を考える. $\mathbf{x}$ は $C(\epsilon_1,\cdots,\epsilon_l)$ に含まれないので、$\epsilon_i f_i(\mathbf{x})\leq 0$ となる i が存在する. この直線上で f_i は単調関数なので、$\epsilon_i f_i(\mathbf{z})<0$ かつ $U_\epsilon(\mathbf{x})$ に含まれる点 $\mathbf{z}$ が直線上に存在する. しかしこれは $U_\epsilon(\mathbf{x})$ が $D(\epsilon_1,\cdots,\epsilon_l)$ に含まれることに矛盾する. 証明終

補題 2.7 $C(R)\cap C(\epsilon_1,\cdots,\epsilon_l)\neq\emptyset$ であるとき、$\overline{C(\epsilon_1,\cdots,\epsilon_l)}$ は R の chamber である.

証明 任意の i に対し $\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n \mid \epsilon_i f_i(\mathbf{x})\geq 0\}$ が有限生成錐体であれば、[石田, (1.1.2)] によって $\overline{C(\epsilon_1,\cdots,\epsilon_l)}=\bigcap_{i=1}^{l}\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n \mid \epsilon_i f_i(\mathbf{x})\geq 0\}$ は有限生成錐体であることがわかる. 以下で $\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n \mid \epsilon_i f_i(\mathbf{x})\geq 0\}$ が有限生成錐体であることを示そう. $\mathbf{a}_{i_1},\cdots,\mathbf{a}_{i_{n-1}}$ を超平面 H_i を張るベクトルとする. このとき、$\mathbf{a}_{i_1},\cdots,\mathbf{a}_{i_{n-1}},\mathbf{a}_{i_n}$ が一次独立かつ $\epsilon_i f_i(\mathbf{a}_{i_n})>0$ となるよう $\mathbf{a}_{i_n}$ をとる. ($C(R)\cap C(\epsilon_1,\cdots,\epsilon_l)\neq\emptyset$ と仮定しているので、このような $\mathbf{a}_{i_n}$ は存在する.) すると

$$\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n \mid \epsilon_i f_i(\mathbf{x})\geq 0\}=\sum_{j=1}^{n-1}\mathbb{R}_{\geq 0}\mathbf{a}_{i_j}+\sum_{j=1}^{n-1}\mathbb{R}_{\geq 0}(-\mathbf{a}_{i_j})+\mathbb{R}_{\geq 0}\mathbf{a}_{i_n}$$

である. 実際、$1\leq j\leq n-1$ に対し $f_i(\mathbf{a}_{i_j})=0$ かつ $f_i(\mathbf{a}_{i_n})>0$ であるから右辺が左辺に含まれることはよい. 逆に $\epsilon_i f_i(\mathbf{x})\geq 0$ すると、$\mathbf{x}=r_1\mathbf{a}_{i_1}+\cdots+r_n\mathbf{a}_{i_n}(r_1,\cdots,r_n\in\mathbb{R})$

と表したとき、$0 \leq \epsilon_i f_i(\mathbf{x}) = r_n \epsilon_i f_i(\mathbf{a}_{i_n})$ かつ $\epsilon_i f_i(\mathbf{a}_{i_n}) > 0$ より $r_n \geq 0$ である.

次に $C(\epsilon_1, \cdots, \epsilon_l)^{-}$ が n 次元であることを示す. $\mathbf{x}$ を $C(\epsilon_1, \cdots, \epsilon_l)$ の元とすると、$\mathbf{x}$ のある δ 近傍 $U_\delta(\mathbf{x})$ が $C(\epsilon_1, \cdots, \epsilon_l)$ に含まれる. $\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n$ を $\mathbb{R}^n$ の有理基底とするとき、任意の i と十分小さい正の実数 ξ に対し、$\mathbf{x} + \xi \mathbf{x}_i$ は $U_\delta(\mathbf{x})$ に含まれる. よって $\xi \mathbf{x}_i$ が $C(\epsilon_1, \cdots, \epsilon_l) - C(\epsilon_1, \cdots, \epsilon_l)$ に含まれるので、$\dim C(\epsilon_1, \cdots, \epsilon_l)^{-} = n$ である.

次に定義 2.3 の条件 (2) を示す. $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ を $\mathrm{Int}(C(\epsilon_1, \cdots, \epsilon_l)^{-}) = C(\epsilon_1, \cdots, \epsilon_l)$ の $\mathbf{0}$ でない有理数点とする (補題 2.6(2) に注意). このとき $\sqrt{J_R(\mathbf{a})} = \sqrt{J_R(\mathbf{b})}$ を示す. f を $R_{\mathbf{c}}$ に含まれる単項式（ただし $\mathbf{c} \in \mathbb{R}_{>0}\mathbf{a} \cap \mathbb{Z}^n$）とし、$f = x_1^{\alpha_1} \cdots x_s^{\alpha_s}$ とする ($R_{\mathbf{c}}$ の元は、このような単項式の $R_{\mathbf{0}}$ 線形結合であることに注意). $f \in \sqrt{J_R(\mathbf{b})}$ を示したい. $\deg f = \mathbf{c}$ なので、$\mathbf{c} \in \displaystyle\sum_{\alpha_i > 0} \mathbb{R}_{\geq 0}\mathbf{a}_i$ である. カラテオドリーの定理より $\{\mathbf{a}_i \mid \alpha_i > 0\}$ の中から、$\mathbf{c} \in \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \mathbb{R}_{\geq 0}\mathbf{a}_{i_j}$ を満たす一次独立なベクトル $\mathbf{a}_{i_1}, \cdots, \mathbf{a}_{i_n}$ をとることができる. ($\mathbf{c} \in C(\epsilon_1, \cdots, \epsilon_l)$ なので、$\mathbf{c}$ は $\{\mathbf{a}_i \mid \alpha_i > 0\}$ の中の $n-1$ 個以下のベクトルで張られる錐体には入らないことに注意する.) よって番号を付け替えて、$\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n$ は一次独立かつ、$\alpha_1, \cdots, \alpha_n > 0$ としてよい. このとき命題 2.4 の証明から、$C(\epsilon_1, \cdots, \epsilon_l) \subset \mathbb{R}_{>0}\mathbf{a}_1 + \cdots + \mathbb{R}_{>0}\mathbf{a}_n$ である. $\mathbf{b}$ は有理数点なので

$$\mathbf{b} = \frac{q_1}{p_1}\mathbf{a}_1 + \cdots + \frac{q_n}{p_n}\mathbf{a}_n$$

と表せる. ここで $\dfrac{q_1}{p_1}, \cdots, \dfrac{q_n}{p_n}$ は正の有理数である. このとき $p = p_1 \cdots p_n$、各 i に対し $r_i = q_i \displaystyle\prod_{j \neq i} p_j$ とおくと

$$p\mathbf{b} = r_1\mathbf{a}_1 + \cdots + r_n\mathbf{a}_n$$

である. 任意の i に対し $m\alpha_i \geq r_i$ を満たす整数 m をとる (ここで $\alpha_1, \cdots, \alpha_n > 0$ に注意) と

$$\begin{aligned} f^m &= x_1^{m\alpha_1} \cdots x_s^{m\alpha_s} \\ &= (x_1^{r_1} \cdots x_n^{r_n}) x_1^{m\alpha_1 - r_1} \cdots x_n^{m\alpha_n - r_n} x_{n+1}^{m\alpha_{n+1}} \cdots x_s^{m\alpha_s} \end{aligned}$$

であり、$\deg x_1^{r_1} \cdots x_n^{r_n} = r_1\mathbf{a}_1 + \cdots + r_n\mathbf{a}_n = p\mathbf{b}$ なので $x_1^{r_1} \cdots x_n^{r_n}$ は $J_R(\mathbf{b})$ に含まれる. 従って f^m が $J_R(\mathbf{b})$ の元なので、f は $\sqrt{J_R(\mathbf{b})}$ に含まれる. 以上により $J_R(\mathbf{a}) \subset \sqrt{J_R(\mathbf{b})}$ となることがわかった. 立場を入れかえると $J_R(\mathbf{b}) \subset \sqrt{J_R(\mathbf{a})}$ となり、これにより $\sqrt{J_R(\mathbf{a})} = \sqrt{J_R(\mathbf{b})}$ が成り立つ. 証明終

命題 2.8

$$C(R) = \bigcup_{C(R)\cap C(\epsilon_1,\cdots,\epsilon_l)\neq\emptyset} C(\epsilon_1,\cdots,\epsilon_l)^{-}$$

は R の chamber 分解である.

証明　$(\epsilon_1,\cdots,\epsilon_l) \neq (\epsilon'_1,\cdots,\epsilon'_l)$ に対し、$\mathbf{x}$ を $C(\epsilon_1,\cdots,\epsilon_l)^{-} \cap C(\epsilon'_1,\cdots,\epsilon'_l)^{-}$ の元とする．すると $\epsilon_i \neq \epsilon'_i$ となる i に対し $f_i(\mathbf{x}) = 0$ である．$\partial C(\epsilon_1,\cdots,\epsilon_l)^{-} = C(\epsilon_1,\cdots,\epsilon_l)^{-} \setminus \mathrm{Int}(C(\epsilon_1,\cdots,\epsilon_l)^{-})$ であるから、$\mathbf{x}$ は $\partial C(\epsilon_1,\cdots,\epsilon_l)^{-} \cap \partial C(\epsilon'_1,\cdots,\epsilon'_l)^{-}$ の元である.　証明終

3　最短 chamber 分解の存在

次の補題を用いる.

補題 3.1　$\mathbf{a},\mathbf{b}$ を $\mathbf{0}$ でない $C(R)$ の有理数点とする．このとき $\sqrt{J_R(\mathbf{a})}$ が $\sqrt{J_R(\mathbf{b})}$ に含まれるならば、$\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ を結ぶ線分上の $\mathbf{b}$ でない任意の有理数点 $\mathbf{c}$ に対し、$\sqrt{J_R(\mathbf{a})} = \sqrt{J_R(\mathbf{c})}$ が成り立つ.

この補題の証明は次の章で行う．これを認めて、最短な分解の存在と一意性を証明する.

$C(R) = \bigcup_{i=1}^{l} \sigma_i$ を R のある chamber 分解とする (前章で、R は少なくとも一つ chamber 分解を持つことを示した)．このとき R のイデアル I に対し、$C(I) = \bigcup_{J_{\sigma_i}=I} \sigma_i$ と定義する.

注意 3.2　$J_{\sigma_1},\cdots,J_{\sigma_l}$ には、同じイデアルが出てくることはあるかもしれないが、真の包含関係はない.

実際、ある $i \neq j$ に対し J_{σ_i} が J_{σ_j} に真に含まれるとすると、$\mathrm{Int}(\sigma_i)$ の有理数点 $\mathbf{x}$ と $\mathrm{Int}(\sigma_j)$ の有理数点 $\mathbf{y}$ を結ぶ線分上の有理数点 $\mathbf{z}$ に対し、補題 3.1 から

$$\mathbf{z} \neq \mathbf{y} \text{ ならば} \sqrt{J_R(\mathbf{z})} = J_{\sigma_i}$$

が成り立つ．一方、$\mathbf{y}$ のある ϵ 近傍 $U_\epsilon(\mathbf{y})$ は $\mathrm{Int}(\sigma_j)$ に含まれるから、$U_\epsilon(\mathbf{y})$ の点かつ線分上の $\mathbf{y}$ と異なる有理数点 $\mathbf{z}$ に対し、$J_{\sigma_i} = \sqrt{J_R(\mathbf{z})} = J_{\sigma_j}$ となり、J_{σ_i} が J_{σ_j} に真に含まれることに矛盾する.

注意 3.3　各 i に対して、[石田, (1.2.14)] より $\sigma_i = (\mathrm{Int}(\sigma_i))^{-}$ である．従って、$\mathbf{x}$ が σ_i に含まれることと、$\mathbf{x}$ の任意の ϵ 近傍 $U_\epsilon(\mathbf{x})$ と $\mathrm{Int}(\sigma_i)$ が共通部分を持つことが同値である．

補題 3.4　I を R のイデアルとする．$C(R)$ の元 $\mathbf{x}$（$\mathbf{x}$ は有理数点とは仮定しない）に対し「$\mathbf{x}$ の ϵ 近傍 $U_\epsilon(\mathbf{x})$ の任意の有理数点 $\mathbf{a}$ において $\sqrt{J_R(\mathbf{a})} = I$」を満たす正の数 ϵ が存在するならば、$\mathbf{x}$ は $C(I)$ の元である．

証明　$\mathbf{x}$ が $C(R)$ の元なので、$\mathbf{x}$ はある σ_i に含まれる．このとき注意 3.3 より $U_\epsilon(\mathbf{x})$ と $\mathrm{Int}(\sigma_i)$ は共通部分を持つので、$U_\epsilon(\mathbf{x}) \cap \mathrm{Int}(\sigma_i)$ の有理数点 $\mathbf{a}$ において $I = \sqrt{J_R(\mathbf{a})} = J_{\sigma_i}$ である．よって σ_i は $C(I)$ に含まれる．　**証明終**

命題 3.5　I を R のイデアル、$C(I) \neq \emptyset$ と仮定すると次が成り立つ．

(1)　$C(I)$ は錐体である．

(2)　$\mathrm{Int}(C(I))$ の $\mathbf{0}$ でない有理数点 $\mathbf{x}$ に対し、$\sqrt{J_R(\mathbf{x})} = I$ である．

証明　(1) を示す．$\mathbf{x}, \mathbf{y}$ を $C(I)$ の元で $\mathbf{x}$ は σ_i、$\mathbf{y}$ は σ_j に含まれるとする．このとき、$\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ を結ぶ線分上の任意の点 $\mathbf{z}$ が $C(I)$ に含まれることを示せばよい．$i \neq j$ と仮定する．任意の正の実数 ϵ に対し、次を示せばよい．

$U_\delta(\mathbf{z}_\epsilon)$ の $\mathbf{0}$ でない任意の有理数点 $\mathbf{a}$ に対し $\sqrt{J_R(\mathbf{a})} = I$ となるような、$U_\epsilon(\mathbf{z}) \cap C(R)$ の元 $\mathbf{z}_\epsilon$ と正の実数 δ が存在する．

これが示せたら、補題 3.4 より $\mathbf{z}_\epsilon$ は $C(I)$ の元であり、従って $\mathbf{z}$ に収束する $C(I)$ の点列が存在する．よって $\mathbf{z}$ は $C(I)^{-} = C(I)$ に含まれることがわかる．

正の実数 ϵ に対し、$\mathbf{x}$ に十分近い $\mathrm{Int}(\sigma_i)$ の有理点 $\mathbf{x}'$、$\mathbf{y}$ に十分近い $\mathrm{Int}(\sigma_j)$ の点 $\mathbf{y}'$ を、$\mathbf{x}'$ と $\mathbf{y}'$ を結ぶ線分と $\mathbf{z}$ の ϵ 近傍 $U_\epsilon(\mathbf{z})$ が共通部分を持つようにとる．このとき $\mathbf{z}_\epsilon$ を $\mathbf{x}'$ と $\mathbf{y}'$ を結ぶ線分上の $U_\epsilon(\mathbf{z})$ のある点とすると、次の 2 条件を満たすような正の実数 δ, δ' がとれる．

- $U_{\delta'}(\mathbf{y}')$ は $\mathrm{Int}(\sigma_j)$ に含まれる．
- $U_\delta(\mathbf{z}_\epsilon)$ の任意の有理数点 $\mathbf{a}$ に対し、$\mathbf{x}'$ と $\mathbf{a}$ を結ぶ直線と $U_{\delta'}(\mathbf{y}')$ は共通部分をもつ．

$\mathbf{a}$ を $U_\delta(\mathbf{z}_\epsilon)$ 内の任意の有理数点とする．$\mathbf{x}'$ と $\mathbf{a}$ を結ぶ直線上にある $U_{\delta'}(\mathbf{y}')$ 内の有理数点 $\mathbf{b}$ をとると、$\mathbf{b}$ は $\mathrm{Int}(\sigma_j)$ の有理数点なので $\sqrt{J_R(\mathbf{b})} = I$ である．また $\mathbf{x}'$ は $\mathrm{Int}(\sigma_i)$ の有理数点なので $\sqrt{J_R(\mathbf{x}')} = I$ であるので、補題 3.1 より $\sqrt{J_R(\mathbf{a})} = I$ である．

(2) を示す．$\mathrm{Int}(C(I))$ の $\mathbf{0}$ でない有理数点 $\mathbf{x}$ に対し、$\mathbf{x}$ の ϵ 近傍 $U_\epsilon(\mathbf{x})$ が $\mathrm{Int}(C(I))$ に含まれるような正の実数 ϵ が存在する．また $\mathbf{x}$ は $C(I)$ の元なので、$\mathbf{x}$ は σ_{j_1}（ただし $J_{\sigma_{j_1}} = I$）に含まれるとする．このとき注意 3.3 より、$U_\epsilon(\mathbf{x})$ と $\mathrm{Int}(\sigma_{j_1})$ は共通部分を持つので、$U_\epsilon(\mathbf{x}) \cap \mathrm{Int}(\sigma_{j_1})$ に含まれる有理数点 $\mathbf{b}_1$ をとり、$\mathbf{b}_1$ の δ 近傍 $U_\delta(\mathbf{b}_1)$ が $U_\epsilon(\mathbf{x}) \cap \mathrm{Int}(\sigma_{j_1})$ に含まれるよう正の実数 δ をとる．ここで $\mathbf{x} = \frac{1}{2}(\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2)$ となるように $U_\epsilon(\mathbf{x})$ の元 $\mathbf{b}_2$ をとる．$\mathbf{b}_2$ も $C(I)$ の元であるので、$\mathbf{b}_2$ は σ_{j_2}（ただし $J_{\sigma_{j_2}} = I$）に含まれるとする．すると $\mathbf{b}_2$ の δ 近傍 $U_\delta(\mathbf{b}_2)$ は $U_\epsilon(\mathbf{x})$ に含まれて、かつ注意 3.3 より $U_\delta(\mathbf{b}_2)$ と $\mathrm{Int}(\sigma_{j_2})$ は共通部分を持つ．$\mathbf{b}_2'$ をこの共通部分のある有理数点とすると $\sqrt{J_R(\mathbf{b}_2')} = I$ である．$\mathbf{c} = \mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_2'$、$\mathbf{b}_1' = \mathbf{b}_1 + \mathbf{c}$ とおくと $\mathbf{b}_1'$ は $U_\delta(\mathbf{b}_1)$ の元であり、

$$\mathbf{x} = \frac{1}{2}\mathbf{b}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{b}_2 = \frac{1}{2}\mathbf{b}_1' + \frac{1}{2}\mathbf{b}_2'$$

である．$\mathbf{b}_1' = 2\mathbf{x} - \mathbf{b}_2'$ より、$\mathbf{b}_1'$ は $U_\delta(\mathbf{b}_1)$ の有理数点なので $\mathrm{Int}(\sigma_{j_1})$ の有理数点であるから $\sqrt{J_R(\mathbf{b}_1')} = I$ となり、補題 3.1 より $\sqrt{J_R(\mathbf{x})} = I$ である． 証明終

$C(I) = \bigcup_{i=1}^{m} \sigma_i, \sigma_i = \sum_{j=1}^{m_i} \mathbb{R}_{\geq 0}\mathbf{b}_{ij}$ とすると、$C(I)$ は $\{\mathbf{b}_{ij} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq m_i\}$ を生成系とする有限生成錐体である．また各 σ_i は n 次元なので $C(I)$ も n 次元である．従って $C(I)$ は chamber である．

命題 3.6

$$C(R) = \bigcup_{C(I) \neq \emptyset} C(I)$$

は R の chamber 分解である．

証明 I, J をイデアルとし、$I \neq J$ ならば $C(I) \cap C(J)$ は $\partial C(I) \cap \partial C(J)$ に含まれることを示す．$\partial C(I) \cap \partial C(J)$ に含まれない $C(I) \cap C(J)$ の元 $\mathbf{x}$ があるとすると、$\mathbf{x}$ は $\mathrm{Int}(C(I))$ または $\mathrm{Int}(C(J))$ の元である．$\mathbf{x}$ が $\mathrm{Int}(C(I))$ の元とすると、$\mathbf{x}$ のある ϵ 近傍 $U_\epsilon(\mathbf{x})$ は $\mathrm{Int}(C(I))$ に含まれる．よって $U_\epsilon(\mathbf{x})$ の $\mathbf{0}$ でない任意の有理数点 $\mathbf{a}$ において $\sqrt{J_R(\mathbf{a})} = I$ である．また $\mathbf{x}$ は $C(J)$ に含まれるので、$U_\epsilon(\mathbf{x})$ と $\mathrm{Int}(C(J))$ は共通部分を持ち、この共通部分の有理数点 $\mathbf{a}$ において、$\sqrt{J_R(\mathbf{a})} = J$ となり、I と J が異なることに矛盾する． 証明終

以上により、R には chamber ideal が全て異なる分解が少なくとも一つ存在することがわかった．また次の一意性が成り立つ．

定理 3.7 chamber ideal が全て異なる分解は一意的に存在する．

証明　存在性は命題 3.6 でわかっている．2 通りの分解があったとする．$C(R) = \bigcup C(I) = \bigcup C'(I)$ とし、$C(I)$ と $C'(I)$ は chamber ideal が I である chamber とする．まず $\mathrm{Int}(C(I))$ が $C'(I)$ に含まれることを示す．$\mathbf{x}$ を $\mathrm{Int}(C(I))$ の元とすると、$\mathbf{x}$ のある ϵ 近傍 $U_\epsilon(\mathbf{x})$ が $\mathrm{Int}(C(I))$ に含まれる．よって $U_\epsilon(\mathbf{x})$ の $\mathbf{0}$ でない任意の有理数点 $\mathbf{a}$ に対し、$\sqrt{J_R(\mathbf{a})} = I$ である．$\mathbf{x}$ は $C(R) = \bigcup C'(I)$ の元であるので、補題 3.4 より $\mathbf{x}$ は $C'(I)$ の元である．$C'(I)$ は閉集合より、$C(I) = (\mathrm{Int}C(I))^{-}$ は $C'(I)$ に含まれる．同様にして $C(I) \subset C'(I)$ が示され、$C(I) = C'(I)$ がわかった．　**証明終**

命題 3.6 と定理 3.7 により、任意の chamber 分解に対して、chamber ideal が同じである chamber を一つにまとめると、chamber ideal が全て異なる唯一の chamber 分解が得られることがわかった．これを最短 chamber 分解と呼ぶことにする．つまり、任意の chamber 分解は最短 chamber 分解の各 chamber を分割して得られるわけである．

4　補題 3.1 の証明

この章では、前章で用いた補題 3.1 の証明を行う．

次に注意する．

注意 4.1　$R = \bigoplus_{\mathbf{a}\in\mathbb{Z}^n} R_\mathbf{a}$ を $\mathbb{Z}^n$ 次数付環とするとき、次が成り立つことは、証明なしに使う．

(1)　T を $\mathbb{Z}^n$ の部分群とするとき、R がネーター環ならば $\bigoplus_{\mathbf{a}\in T} R_\mathbf{a}$ も次数付ネーター環である．

(2)　$n = 2$、$\mathbf{b}$ を $\mathbf{0}$ でない $\mathbb{Z}^2$ のベクトルとするとき、R がネーター環ならば $\bigoplus_{(\mathbf{a},\mathbf{b})\geq 0} R_\mathbf{a}$ も次数付ネーター環である．

(3)　次は同値である．

　(i)　R はネーター環である．

　(ii)　$R_\mathbf{0}$ はネーター環かつ、R は $R_\mathbf{0}$ 上有限生成な環である．

補題 3.1 の証明をはじめる．$\mathbf{a}, \mathbf{b}$ は補題 3.1 の条件を満たすものとする．$\mathbf{a} = \mathbf{c}$ なら明らかなので、$\mathbf{a} \neq \mathbf{c}$ とする．$\mathbf{c} = s\mathbf{a} + t\mathbf{b}$（ただし s, t は有理数で $0 < s < 1, 0 < t < 1, s + t = 1$）としてよい．$\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ が一次独立でないときは、補題 3.1 は簡単に示すことができる．以下、$\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ は一次独立とする．$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ を自然数倍して、$\mathbf{a}, \mathbf{b}$ は整数点、$S = \mathbb{Z}\mathbf{a} + \mathbb{Z}\mathbf{b}$ としたとき $\mathbf{c} \in S$ としてよい．このとき $\mathbf{c}$ は $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ を結ぶ線分上にはな

く、$\mathbf{c} = s\mathbf{a} + t\mathbf{b}$($s, t$ は自然数) を満たす．$R' = \bigoplus_{\mathbf{d} \in S} R_{\mathbf{d}}$ とおくと、$\mathbb{Z}^2 \cong S \subset \mathbb{Z}^n$ なので注意 4.1 より、R' はネーター環であり $R_{\mathbf{0}}$ 上有限生成な環である．

主張 4.2　R' において補題 3.1 が成り立つならば、R においても補題 3.1 が成り立つ．

証明　まず $\mathbf{d}, \mathbf{e}$ を S の元とするとき、$\sqrt{J_{R'}(\mathbf{d})}$ が $\sqrt{J_{R'}(\mathbf{e})}$ に含まれることと、$\sqrt{J_R(\mathbf{d})}$ が $\sqrt{J_R(\mathbf{e})}$ が含まれることが同値であることを示そう．

$\sqrt{J_{R'}(\mathbf{d})}$ が $\sqrt{J_{R'}(\mathbf{e})}$ に含まれるとする．x を $R_{\mathbf{f}}$ の元（ただし $\mathbf{f}$ は $\mathbb{R}_{>0}\mathbf{d} \cap \mathbb{Z}^n$ の元）とする．$\mathbf{f} = a\mathbf{d}$ と表すと、$\mathbf{d}, \mathbf{f}$ が整数点であるから a は正の有理数である．よって $m\mathbf{f} = ma\mathbf{d}$ が S の元となるような整数 m が存在する．従って、x^m は $J_{R'}(\mathbf{d})$ の元であり、仮定から $\sqrt{J_{R'}(\mathbf{e})}$ に含まれる．故に x は $\sqrt{J_R(\mathbf{e})}$ に含まれる．

逆を示す．$\sqrt{J_R(\mathbf{d})} \cap R' = \sqrt{J_{R'}(\mathbf{d})}$ となることを示せばよい．右辺が左辺に含まれることはよい．$J_R(\mathbf{d}) = (\alpha_1, \cdots, \alpha_h)R$ とし、α_i は $\deg \alpha_i = a_i\mathbf{d}$（$1 \leq i \leq h$）を満たす斉次元とする．$\mathbf{d}$ は整数点なので a_i は有理数である．よって $\deg \alpha_i^m$ が $\mathbb{R}_{>0}\mathbf{d} \cap S$ に含まれるような整数 m が存在する．このとき α_i^m は R' の元である．ここで x を $\sqrt{J_R(\mathbf{d})} \cap R'$ の斉次元とすると、ある整数 n が存在して、x^n が $(\alpha_1^m, \cdots, \alpha_h^m)R$ に含まれるので、$x^n = \sum_{i=1}^h \alpha_i^m x_i$（ただし x_i は斉次元）と表せる．$\deg x^n, \deg \alpha_i^m$ は S の元なので x_i は R' の元としてよい．従って x^n は $J_{R'}(\mathbf{d})$ に含まれるから、x は $\sqrt{J_{R'}(\mathbf{d})}$ の元である．

よって $\sqrt{J_{R'}(\mathbf{a})} = \sqrt{J_{R'}(\mathbf{c})}$ ならば $\sqrt{J_R(\mathbf{a})} = \sqrt{J_R(\mathbf{c})}$ となるので、R' において補題 3.1 が成り立つならば、R においても補題 3.1 が成り立つ．　**証明終**

従って、R を $\mathbb{Z}^2$ 次数付ネーター環としてよい．基底を取り替えて、$\mathbb{R}_{\geq 0}\mathbf{a}$ と $\mathbb{R}_{\geq 0}\mathbf{b}$ のなす角を $90°$ 未満とし、$\mathbf{a} = (0, y_1), \mathbf{b} = (x_2, y_2)$ (ただし $y_1, x_2, y_2 > 0$) とする．

主張 4.3　$J_R(\mathbf{a})J_R(\mathbf{b})$ は $\sqrt{J_R(\mathbf{c})}$ に含まれる．

証明　x を $J_R(\mathbf{a})$ の斉次元、y を $J_R(\mathbf{b})$ の斉次元、$\deg x = r_1\mathbf{a}$、$\deg y = r_2\mathbf{b}$（ただし r_1, r_2 は自然数）とする．$\mathbf{c} = s\mathbf{a} + t\mathbf{b}$ であったので

$$\deg(x^{sr_2}y^{tr_1}) = r_1r_2(s\mathbf{a} + t\mathbf{b}) = r_1r_2\mathbf{c}$$

より、$x^{sr_2}y^{tr_1}$ は $J_R(\mathbf{c})$ に含まれる．よって $m = \max(sr_2, tr_1)$ とすると $(xy)^m$ は $J_R(\mathbf{c})$ に含まれるので xy は $\sqrt{J_R(\mathbf{c})}$ の元である．　**証明終**

主張 4.3 より、$\sqrt{J_R(\mathbf{a})}$ は $\sqrt{J_R(\mathbf{c})}$ に含まれる．

逆に $\sqrt{J_R(\mathbf{c})}$ が $\sqrt{J_R(\mathbf{a})}$ に含まれることを示したい．$J_R(\mathbf{a}) = R$ のときはよい．

$J_R(\mathbf{a}) \neq R$ のときを考える．R の $R_{\mathbf{0}}$ 上の斉次生成元の次数を $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_s$ とする．$\mathbf{a}$ がある半直線 $\mathbb{R}_{\geq 0}\mathbf{a}_i$ 上にあるとき、$J_R(\mathbf{a}) \neq R$ より $\mathbb{R}_{\geq 0}(-\mathbf{a}_i)$ は $C(R)$ に含まれない．従って $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_s$ は $\mathbb{R}^2$ のある半平面上に存在する．まず $\mathbb{R}\mathbf{a}_{i_1} \neq \mathbb{R}\mathbf{a}_{i_2}$ かつ、$1 \leq k \leq s$ に対し $\mathbf{a}_k$ は $\mathbb{R}_{\geq 0}\mathbf{a}_{i_1} + \mathbb{R}_{\geq 0}\mathbf{a}_{i_2}$ の内点ではないとき、$\mathbb{R}_{\geq 0}\mathbf{a}_{i_1} + \mathbb{R}_{\geq 0}\mathbf{a}_{i_2}$ は chamber になる ([高瀬]) ことに注意する．この方法で $C(R)$ を chamber 分解する．$\mathbf{a}$ が chamber の内点でないとする．このとき $\mathbf{d}$ を、$\mathbf{a}$ のすぐ右の chamber の内点であり、$\mathbb{R}\mathbf{d}$ は $\mathbb{R}\mathbf{c}$ より傾きが大きい有理数点とする．$\mathbf{a}_k = (p_k, q_k)$（$1 \leq k \leq s$）とするとき、$R$ のイデアル I_1, I_2, I_3 を次のように定義する．

- I_1 は、$p_k \leq 0$ を満たす $\mathbf{a}_k$ を次数に持つ生成元で生成されるイデアル．
- I_2 は、$p_k \geq 0$ を満たす $\mathbf{a}_k$ を次数に持つ生成元で生成されるイデアル．
- I_3 は、$p_k > 0$ を満たす $\mathbf{a}_k$ を次数に持つ生成元で生成されるイデアル．

すると、[高瀬, (2.6)] より $\sqrt{I_1 \cap I_2} = \sqrt{J_R(\mathbf{a})}$、$\sqrt{I_1 \cap I_3} = \sqrt{J_R(\mathbf{d})}$ である．よって $\sqrt{J_R(\mathbf{d})}$ は $\sqrt{J_R(\mathbf{a})}$ に含まれる．また主張 4.3 より $\sqrt{J_R(\mathbf{a})J_R(\mathbf{c})} \subset \sqrt{J_R(\mathbf{d})}$ であるので、$\sqrt{J_R(\mathbf{a})} = \sqrt{J_R(\mathbf{d})}$ が成り立つ．従って $\mathbf{a}$ を $\mathbf{d}$ だと思うことにより、$\mathbf{a}$ は chamber $\mathbb{R}_{\geq 0}\mathbf{a}_{i_1} + \mathbb{R}_{\geq 0}\mathbf{a}_{i_2}$ の内点 (ただし $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_s$ は $\mathbb{R}_{\geq 0}\mathbf{a}_{i_1} + \mathbb{R}_{\geq 0}\mathbf{a}_{i_2}$ の内点でない) としてよい．

改めて、$\mathbf{a} = (0, y_1)$、$\mathbf{b} = (x_2, y_2)$(ただし $y_1, x_2, y_2 > 0$)、$\mathbf{c} = s\mathbf{a} + t\mathbf{b}$($s, t$ は自然数)、$\mathbf{a}$ は chamber $\mathbb{R}\mathbf{a}_{i_1} + \mathbb{R}\mathbf{a}_{i_2}$ の内点と仮定して証明を進める．R を直線 $\mathbb{R}\mathbf{c}$ 上に制限した環は依然として $\mathbb{Z}^2$ 次数付ネーター環なので $R_{\mathbf{0}}$ 上有限生成である．この $R_{\mathbf{0}}$ 上の斉次生成元を $x_1, \cdots, x_q$ とし、次を満たすものとする．

- $1 \leq i \leq q$ に対し $\deg x_i$ は直線 $\mathbb{R}_{>0}\mathbf{c}$ 上の整数点．
- $0 < |\deg x_1| \leq \cdots \leq |\deg x_q|$

ここで $|\deg x_i|$ は原点と $\deg x_i$ の距離である. このとき、任意の i に対し x_i が $\sqrt{J_R(\mathbf{a})}$ に含まれることを示す.

$J_R(\mathbf{b})$ が斉次元 $b_1, \cdots, b_h$（ただし $\deg b_1, \cdots, \deg b_h \in \mathbb{R}_{>0}\mathbf{b} \cap \mathbb{Z}^2$）で生成されるとする．$\mathbf{b}$ は整数点なので $\deg b_i = c_i\mathbf{b}$（c_i は有理数）と表せる．よって $\deg b_1^{p_1} = \cdots = \deg b_h^{p_h}$ となる自然数 $p_1, \cdots, p_h$ が存在し、$\sqrt{J_R(\mathbf{b})} = \sqrt{(b_1^{p_1}, \cdots, b_h^{p_h})}$ となる．従って、各 b_i をベキで取り替えることにより、次を満たすとしてよい．

- $\sqrt{J_R(\mathbf{b})} = \sqrt{(b_1, \cdots, b_h)}$
- $\deg b_1 = \cdots = \deg b_h = c\mathbf{b}$ (ただし c はある正の有理数)

- $\deg b_i$ の x 座標を d_1、$\deg x_q$ の x 座標を d_2 としたとき、$d_2 < d_1$ となる.

$\mathbf{f} = (1,0)$ とすると、仮定より内積 $(\mathbf{a}_{i_1}, \mathbf{f})$ と $(\mathbf{a}_{i_2}, \mathbf{f})$ のうち片方は正、もう片方は負である. 以下 $(\mathbf{a}_{i_1}, \mathbf{f}) > 0$ とし、$\mathbf{a}_{i_1} = (\alpha, \beta)$ とする ($\alpha, \beta > 0$ としてよい). ここで $\bigoplus_{(\mathbf{e},\mathbf{f}) \geq 0} R_{\mathbf{e}}$ を考える. これは注意 4.1 より $R_{\mathbf{0}}$ 上有限生成なので、その斉次生成元を $c_1, \cdots, c_k, d_1, \cdots, d_{k'}$ とし、$\deg c_i = (\alpha_i, \beta_i), \deg d_j = (\alpha'_j, \beta'_j)$ は次を満たすものとする.

- $1 \leq i \leq k$ に対し、$\beta_i > \frac{\beta}{\alpha}\alpha_i$
- $1 \leq j \leq k'$ に対し、$\beta'_j \leq \frac{\beta}{\alpha}\alpha'_j$

すると $\deg c_1, \cdots, \deg c_k$ は $\mathrm{Int}(\mathbb{R}_{\geq 0}\mathbf{a}_{i_1} + \mathbb{R}_{\geq 0}\mathbf{a}_{i_2})$ に含まれることに注意する. $\sqrt{J_R(\mathbf{a})}$ は $\sqrt{J_R(\mathbf{b})}$ に含まれるので、$\mathbf{a}$ を含む chamber の内点 $\mathrm{Int}(\mathbb{R}_{\geq 0}\mathbf{a}_{i_1} + \mathbb{R}_{\geq 0}\mathbf{a}_{i_2})$ の整数点を次数にもつ斉次元は $R/(b_1, \cdots, b_h)$ のベキ零元である. よって $c_1^m, \cdots, c_k^m \in (b_1, \cdots, b_h)$ となる自然数 m が存在する. $\max\{\beta_i - \frac{\beta}{\alpha}\alpha_i \mid 1 \leq i \leq k\} = \beta_u - \frac{\beta}{\alpha}\alpha_u$ とおき、$N = \{(x,y) \mid x \geq 0, y \geq \frac{\beta}{\alpha}x + km(\beta_u - \frac{\beta}{\alpha}\alpha_u)\}$ とおく.

主張 4.4 $\mathbf{e} \in N$ ならば、$R_{\mathbf{e}} \subset (b_1, \cdots, b_h)$ である.

証明 $\mathbf{e} = (x,y) \in N$ とする. $\xi = c_1^{s_1} \cdots c_k^{s_k} d_1^{t_1} \cdots d_{k'}^{t_{k'}}$ を $R_{\mathbf{e}}$ に含まれる単項式とする. もし $\xi \notin (b_1, \cdots, b_h)$ なら、任意の i に対し $s_i < m$ である.

$$x = s_1\alpha_1 + \cdots + s_k\alpha_k + t_1\alpha'_1 + \cdots + t_{k'}\alpha'_{k'}$$
$$y = s_1\beta_1 + \cdots + s_k\beta_k + t_1\beta'_1 + \cdots + t_{k'}\beta'_{k'}$$

であるので

$$\begin{aligned}
y - \frac{\beta}{\alpha}x &= s_1\beta_1 + \cdots + t_{k'}\beta'_{k'} - \frac{\beta}{\alpha}(s_1\alpha_1 + \cdots + t_{k'}\alpha'_{k'}) \\
&= s_1(\beta_1 - \frac{\beta}{\alpha}\alpha_1) + \cdots + s_k(\beta_k - \frac{\beta}{\alpha}\alpha_k) + t_1(\beta'_1 - \frac{\beta}{\alpha}\alpha'_1) + \cdots + t_{k'}(\beta'_{k'} - \frac{\beta}{\alpha}\alpha'_{k'}) \\
&\leq s_1(\beta_1 - \frac{\beta}{\alpha}\alpha_1) + \cdots + s_k(\beta_k - \frac{\beta}{\alpha}\alpha_k) \\
&< m\Big\{(\beta_1 - \frac{\beta}{\alpha}\alpha_1) + \cdots + (\beta_k - \frac{\beta}{\alpha}\alpha_k)\Big\} \\
&\leq mk(\beta_u - \frac{\beta}{\alpha}\alpha_u)
\end{aligned}$$

となり、$\mathbf{e} \in N$ であることに矛盾する. よって $s_i \geq m$ となる i が存在するので、$\xi \in (b_1, \cdots, b_h)$ である. 従って $R_{\mathbf{e}} \subset (b_1, \cdots, b_h)$ である. 証明終

R を直線 $\mathbb{R}\mathbf{a}$ 上に制限した環はネーター次数付環であるので、この環の $R_{\mathbf{0}}$ 上の斉次生成元 $a_1, \cdots, a_p$ がとれる．このとき次を満たす自然数 $k_1, \cdots, k_p$ がとれる．

- $\deg a_1^{k_1} = \cdots = \deg a_p^{k_p}$
- $1 \leq i \leq q, 1 \leq j \leq p$ に対し、$\deg x_i a_j^{k_j}$ が N に含まれる．

主張 4.4 より $x_i a_j^{k_j}$ が $(b_1, \cdots, b_h)$ に含まれるので、$x_i a_j^{k_j} = \sum_{u=1}^{h} b_u c_{iju}$（ただし c_{iju} は 0 または $\deg(x_i a_j^{k_j}) = \deg(b_u c_{iju})$ を満たす斉次元とする）と表せる．$c_{iju} \neq 0$ としよう．すると $\deg c_{iju} = \deg x_i + \deg a_j^{k_j} - \deg b_u$ である．$\deg x_i a_j^{k_j}$ と $\deg c_{iju}$ を結ぶ線分の長さを η $(= |\deg b_u|)$ とおく．またこの線分と直線 $\mathbb{R}\mathbf{a}$ との交点を $\mathbf{e}$（$\in \mathbb{Q}^2$）とおき、$\mathbf{e}$ と $\deg c_{iju}$ を結ぶ線分の長さを $\delta_i \eta$ とおく．すると $d_2 < d_1$ より $0 < \delta_i < 1$ であり、$\deg c_{iju}, \deg x_i a_j^{k_j} \in \mathbb{Z}^2$ かつ $\mathbf{e} \in \mathbb{Q}^2$ より δ_i は有理数である．さらに $\mathbf{e}$ と $\deg a_j^{k_j}$ を結ぶ線分の長さを φ_i とおくと、次を満たす自然数 v_i がとれる．

- $v_i \delta_i$ は自然数.
- $|\deg(a_1^{k_1} \cdots a_p^{k_p})| < v_i \varphi_i$

このとき、$(x_i a_j^{k_j})^{v_i} = (\sum_{u=1}^{h} b_u c_{iju})^{v_i} = \sum M C_M$（ただし M は $b_1, \cdots, b_h$ についての v_i 次斉次単項式）とおく．$M = M_1 M_2$ とおく. ただし M_1 は $b_1, \cdots, b_h$ についての $v_i \delta_i$ 次、M_2 は $v_i(1-\delta_i)$ 次単項式とする．すると $(x_i a_j^{k_j})^{v_i} = \sum M_2 (M_1 C_M)$ であり、$\deg M_1 C_M$ は直線 $\mathbb{R}\mathbf{a}$ 上の点である．よって $M_1 C_M$ は $a_1^{m_1} \cdots a_p^{m_p}$ の形の単項式の $R_{\mathbf{0}}$ 線型結合として表せる．ここで $m_1, \cdots, m_p$ は非負整数である．$1 \leq i \leq p$ に対し $m_i = w_i k_i + q_i, 0 \leq q_i < k_i$ とすると、$|\deg(a_1^{q_1} \cdots a_p^{q_p})| < |\deg(a_1^{k_1} \cdots a_p^{k_p})| < v_i \varphi_i$ である．また

$$|\deg M_1 C_M| = |\deg(a_1^{m_1} \cdots a_p^{m_p})| = |\deg(a_1^{w_1 k_1} \cdots a_p^{w_p k_p})| + |\deg(a_1^{q_1} \cdots a_p^{q_p})|$$

かつ $|\deg M_1 C_M| = |\deg a_j^{k_j v_i}| + v_i \varphi_i$ であるので、$|\deg(a_1^{w_1 k_1} \cdots a_p^{w_p k_p})| > |\deg a_j^{k_j v_i}|$ である．よって $w_1 + \cdots + w_p > v_i$ である．故に $M_1 C_M$ は $(a_1^{k_1}, \cdots, a_p^{k_p})^{v_i+1}$ の元なので、$(x_i a_j^{k_j})^{v_i} = \sum M_2 (M_1 C_M)$ も $(a_1^{k_1}, \cdots, a_p^{k_p})^{v_i+1}$ の元である．ここで V は R を含む DVR、v をその正規化された加法付値とし、$\epsilon = \min\{v(a_1^{k_1}), \cdots, v(a_p^{k_p})\}$ とおく．$\epsilon = v(a_j^{k_j})$ とすると $v((x_i a_j^{k_j})^{v_i}) \geq \epsilon(v_i + 1)$ であるから $v(x_i^{v_i}) \geq \epsilon$ である．よって $x_i^{v_i}$ は $(a_1^{k_1}, \cdots, a_p^{k_p})V$ の元である．これは R を含む任意の DVR に対して成り立つので、$x_i^{v_i}$ は $(a_1^{k_1}, \cdots, a_p^{k_p})$ の整閉包に含まれる [SH, (6.8.2)]．よって $x_i^{v_i}$ は $\sqrt{(a_1^{k_1}, \cdots, a_p^{k_p})}$ の元なので $\sqrt{J_R(\mathbf{a})}$ の元である． **証明終**

ここで証明の最後に用いた事実 [SH, (6.8.2)] の証明を記す．

定理 4.5　R をネーター整域、I を R のイデアルとすると

$$\bar{I} = \big(\bigcap_V IV\big) \cap R$$

が成り立つ．ただし $\bar{I}$ はイデアル I の整閉包であり、上の共通部分の V は R と R の商体 $Q(R)$ の間の DVR を全てわたるものである．

証明　$IV = \bar{I}V = \bar{I}\bar{V}$ であるので、$\bar{I}$ が右辺に含まれることはよい．逆を示す．r を 0 でない $(\cap IV) \cap R$ の元とする．$S = R[\frac{I}{r}]$ とおくと、S の商体 $Q(S)$ は $Q(R)$ と等しい．$K = Q(S) = Q(R)$ とおく．$S \subset V \subset K$ となる任意の V (V は DVR) に対し、r は IV に含まれるから $\frac{I}{r}V = V$ である．もし S が $\frac{I}{r}S$ を真に含んでいるとすると、$\frac{I}{r}S$ は S のある極大イデアルに含まれる．その極大イデアルを m とすると、$S \subset V \subset K$ となる DVR で $m_V \cap S = m$ を満たす V が存在する．ここで m_V は V の極大イデアルである．このとき $\frac{I}{r}S \subset m$ を V に拡大すると $\frac{I}{r}V \subset mV \subset m_V$ となり、$\frac{I}{r}V = V$ であることに矛盾する．よって $\frac{I}{r}S = S$ である．従って $1 \in \frac{I}{r}S$ より

$$\begin{aligned}1 &= \frac{b}{r}(r_0 + r_1\frac{b_1}{r} + \cdots + r_{n-1}\frac{b_{n-1}}{r^{n-1}}) \quad (\text{ただし } b \in I, b_i \in I^i, r_i \in R)\\ &= \frac{br_0}{r} + \frac{r_1b_1b}{r^2} + \cdots + \frac{r_{n-1}b_{n-1}b}{r^n}\\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{r^i}\end{aligned}$$

ただし $a_1 = br_0 \in I, a_2 = r_1b_1b \in I^2, \cdots, a_n = r_{n-1}b_{n-1}b \in I^n$ である．よって $r^n - r^{n-1}a_1 - \cdots - ra_{n-1} - a_n = 0$ となるから、r は I 上整である．　証明終

5　応用

$R = \bigoplus_{\mathbf{a}\in\mathbb{Z}^n} R_{\mathbf{a}}, S = \bigoplus_{\mathbf{a}\in\mathbb{Z}^n} S_{\mathbf{a}}$ を $\mathbb{Z}^n$ 次数付ネーター整域、$R_{\mathbf{0}}, S_{\mathbf{0}}$ を体、$\{\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^n \mid S_{\mathbf{a}} \neq 0\}$ は $\mathbb{Q}$ ベクトル空間として $\mathbb{Q}^n$ を生成するとする．また $R \subset S$ であり、R から S への自然な射が finite 射であるとする．

命題 5.1　$C(R) = C(S)$ が成り立つ．

証明　$R_{\mathbf{a}} \subset S_{\mathbf{a}}$ より左辺が右辺に含まれることはよい．逆を示す．x を S の $\deg x = \mathbf{a}$ の斉次元 $(x \neq 0)$ とする．x は R 上整なので

$$x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_m = 0$$

を満たす R の元 $a_1, \cdots, a_m$ が存在する．この式の両辺の $m\mathbf{a}$ 次を取り出すことで、$a_i \neq 0$ となる a_i は $\deg a_i = i\mathbf{a}$ の斉次元としてよい．$x \neq 0$ なので $a_1, \cdots, a_m$ の中に少なくとも 0 でないものがある．$a_i \neq 0$ とすると $i\mathbf{a} \in C(R)$ なので、$C(S) \subset C(R)$ である．　証明終

命題 5.2　$\mathbf{a} \in \mathbb{Q}^n$ とするとき、次が成り立つ．

(1)　$\sqrt{J_R(\mathbf{a})S} = \sqrt{J_S(\mathbf{a})}$

(2)　$\sqrt{J_S(\mathbf{a})} \cap R = \sqrt{J_R(\mathbf{a})}$

証明　(1) を示す．$J_R(\mathbf{a})S \subset J_S(\mathbf{a})$ なので左辺が右辺に含まれることはよい．逆を示す．x を $J_S(\mathbf{a})$ の $\mathbf{d}$ 次斉次元 ($\mathbf{d} \in \mathbb{R}_{>0}\mathbf{a} \cap \mathbb{Z}^n$) とする．$S$ は R 上整なので

$$x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m = 0$$

を満たす R の斉次元 $a_1, \cdots, a_m$ が存在する．ただし $a_i \neq 0$ なら $\deg a_i = i\mathbf{d}$ としてよい．よって $\deg a_i = i\mathbf{d} \in \mathbb{R}_{>0}\mathbf{a} \cap \mathbb{Z}^n$ なので $a_i \in J_R(\mathbf{a})$ である．故に $x^m = -(a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m) \in J_R(\mathbf{a})S$ より $x \in \sqrt{J_R(\mathbf{a})S}$ である．

(2) を示す．$J_R(\mathbf{a}) \subset J_S(\mathbf{a})$ なので右辺が左辺に含まれることはよい．逆を示す．$J_R(\mathbf{a})$ の任意の極小素イデアル P に対し、$\sqrt{J_S(\mathbf{a})} \cap R \subset P$ となることを示せばよい．$J_R(\mathbf{a})$ の極小素イデアル P に対し $R \subset S$ は整拡大なので、$Q \cap R = P$ を満たす S の素イデアル Q が存在する．x を $J_S(\mathbf{a})$ の元とすると、(1) の証明より $x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m = 0$ としたとき $a_i \in J_R(\mathbf{a})$ であったから、$a_i \in P \subset Q$ である．よって x^m が Q に含まれるから、$J_S(\mathbf{a}) \subset Q$ である．故に $\sqrt{J_S(\mathbf{a})} \cap R \subset Q \cap R = P$ となる．　証明終

この命題 5.2 から、次が成り立つ．

系 5.3　$\mathbf{0}$ でない有理数点 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ に対し、$\sqrt{J_R(\mathbf{a})} = \sqrt{J_R(\mathbf{b})}$ であることと $\sqrt{J_S(\mathbf{a})} = \sqrt{J_S(\mathbf{b})}$ であることは同値である．

以上より次が成り立つ．

命題 5.4　R の chamber は S の chamber である．逆も正しい．

証明　系 5.3 より明らかである．　証明終

従って、$R \subset S$ の間の包含射が finite 射であるなら、R と S は同じ chamber 分解を持つことがわかった．

このことから、S が $K[x_1,\cdots,x_d]$ 上有限生成な加群 (ただし $K=S_{\mathbf{0}}$) となるような代数的独立な S の元 $x_1,\cdots,x_d$ が、斉次元でとれるとは限らないということが示せる.

例 5.5 K を体とし、$S=K[X,Y,Z,W]/(XW-YZ)$ とおく. $\deg X=(3,0), \deg Y=(2,1), \deg Z=(1,2), \deg W=(0,3)$ として S を $\mathbb{Z}^2$ 次数付環とする. このとき、$\dim K[X,Y,Z,W]=4,\ \mathrm{ht}(XW-YZ)=1$ なので、$\dim S=3$ である. ネーターの正規化定理より、S が $K[t_1,t_2,t_3]$ 上有限生成となるような代数的独立な S の元 t_1,t_2,t_3 が存在する. このとき、t_1,t_2,t_3 のうち少なくとも 1 つは非斉次である.

証明 $\mathbf{a}_1=(3,0), \mathbf{a}_2=(2,1), \mathbf{a}_3=(1,2), \mathbf{a}_4=(0,3)$ とし、$\sigma_1=\mathbb{R}_{\geq 0}\mathbf{a}_1+\mathbb{R}_{\geq 0}\mathbf{a}_2, \sigma_2=\mathbb{R}_{\geq 0}\mathbf{a}_2+\mathbb{R}_{\geq 0}\mathbf{a}_3, \sigma_3=\mathbb{R}_{\geq 0}\mathbf{a}_3+\mathbb{R}_{\geq 0}\mathbf{a}_4$ とおく. このとき $C(S)=\cup_{i=1}^3\sigma_i$ が S の最短 chamber 分解になることを示す. chamber 分解になることはよい. chamber ideal が全て異なることを示せばよい. $J_{\sigma_1}=J_{\sigma_2}$ と仮定する. $J_{\sigma_1}=\sqrt{(X)\cap(Y,Z,W)}$ であり、$(X)\cap(Y,Z,W)\subset(X,Z)$ である. $S/(X,Z)\cong K[Y,W]$ より (X,Z) は素イデアルなので、$J_{\sigma_1}\subset(X,Z)$ である. よって $J_{\sigma_2}\subset(X,Z)$ となる. しかし $YW\in\sqrt{(X,Y)\cap(Z,W)}=J_{\sigma_2}$ であるが、$YW\notin(X,Z)$ なので $J_{\sigma_1}=J_{\sigma_2}$ であることに矛盾する. 故に $J_{\sigma_1}\neq J_{\sigma_2}$ となり、同様に $J_{\sigma_2}\neq J_{\sigma_3}$ である. また補題 3.1 より $J_{\sigma_1}\neq J_{\sigma_3}$ も成り立つ. よって chamber ideal が全て異なるから、S は $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ による chamber 分解が最短である. t_1,t_2,t_3 を斉次元とすると、$K[t_1,t_2,t_3]$ は $\mathbb{Z}^2$ 次数付き環になり、命題 5.4 より $K[t_1,t_2,t_3]$ もこの 3 つの chamber による chamber 分解が最短である. しかし $K[t_1,t_2,t_3]$ は 2 つの chamber による chamber 分解を持つから、$K[t_1,t_2,t_3]$ と S の chamber 分解が一致することに矛盾する. **証明終**

次の環は、様々な研究者によって深く研究されているが、これらは斉次なネーターの正規化を持つ例になっている.

例 5.6 K を体、$S=K[X,Y,Z]$ を多項式環、n_1,n_2,n_3 をどの二つも互いに素な自然数とし

$$\begin{array}{rccc} \varphi\colon & S & \longrightarrow & K[T] \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & X & \longmapsto & T^{n_1} \\ & Y & \longmapsto & T^{n_2} \\ & Z & \longmapsto & T^{n_3} \end{array}$$

とするとき $P=\mathrm{Ker}(\varphi)$ とする. このとき、$R'_S(P)=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}P^{(n)}t^n$ と定義する. ここで $P^{(n)}$ は P の n 階シンボリック冪であり、$n<0$ のとき $P^{(n)}=S$ とする. このとき次が成り立つ. ([和田, (3.5)])

$R'_S(P)$ をネーター、$f \in P^{(k)}, g \in P^{(l)}$ を Huneke の判定法を満たす斉次多項式とする. このとき $T = K[X, t^{-1}, ft^k, gt^l]$ とおくと、$T \subset R'_S(P)$ かつ $R'_S(P)$ は有限生成 T 加群であり、T は 4 変数多項式環と同型である.

謝辞

本論文を作成するにあたり、指導教官の藏野和彦教授から、丁寧かつ熱心なご指導を賜りました. ここに感謝の意を表します. また多くのご協力、ご指摘を下さいました諸先輩方や同期、後輩の皆様に感謝いたします.

参考文献

[高瀬]　高瀬友樹 『多重次数付環の様々なイデアルとその局所コホモロジーについて』 明治大学大学院理工学研究科修士論文, 2014

[石田]　石田正典 『トーリック多様体入門-扇の代数幾何-』 朝倉書店, 2000

[SH]　I.Swanson and C.Huneke. *Integral Closure of Ideals, Rings, and Modules.* Cambridge University Press, 2006

[和田]　和田昂之 『スペースモノミアル曲線の定義イデアルのシンボリック冪のグレブナー基底』 明治大学大学院理工学研究科修士論文, 2014