2013年度 修士学位請求論文

スペースモノミアル曲線の定義イデアルのシンボリック冪のグレブナー基底

和田 昂之
明治大学大学院 理工学研究科 基礎理工学専攻 数学系
指導教員 藏野 和彦 教授

目 次

1 序 **2**

2 定義 **2**

3 準備 **2**

4 主定理 **7**

謝辞 **15**

1 序

この論文では $(t^{n_1}, t^{n_2}, t^{n_3})$ というモノミアル曲線の定義イデアル P のシンボリック幂 $P^{(n)}$ に対して、ある条件の下でグレブナー基底を求めることが目的である。この論文の主定理により、同じ条件のもとでシンボリックリース環 $R_s(P)$ の SAGBI 基底を求めることができる。

2 定義

K を体、n_1, n_2, n_3 はどの二つも互いに素な自然数とし、

$$\varphi : S = K[X,Y,Z] \longrightarrow K[T],\ X \mapsto T^{n_1},\ Y \mapsto T^{n_2},\ Z \mapsto T^{n_3}$$

を考え、$P(n_1, n_2, n_3) = \mathrm{Ker}(\varphi)$ とおく。混乱の恐れがないときは単に $P(n_1, n_2, n_3)$ を P と表す。
X, Y, Z にそれぞれ重さを n_1, n_2, n_3 と与えることにより P は斉次イデアルとなる。以下、次数といえば X, Y, Z に重さ n_1, n_2, n_3 を与えたものとする。たとえば X^3Y^2Z の次数は $3n_1 + 2n_2 + n_3$ である。

自然数 n に対して P の n 階シンボリック幂を

$$P^{(n)} := P^n S_P = \{a \in S \mid \text{ある } b \in S \backslash P \text{ に対して } ab \in P^n\}$$

と定義し、P のシンボリック Rees 環 を

$$R_s(P) := \bigoplus_{n \geq 0} P^{(n)} t^n \subset S[t]$$

と定義する。また $R'_s(P) := R_s(P)[t^{-1}]$ と定義する。$n < 0$ のとき $P^{(n)} = S$ とおけば、

$$R'_s(P) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} P^{(n)} t^n$$

と表すことができる。

3 準備

シンボリック幂は次の性質をみたす。

補題 3.1. 任意の整数 n, m に対して

(1) $P^n \subset P^{(n)}$

(2) $P^{(n)} \cdot P^{(m)} \subset P^{(n+m)}$

である。

(1) で等号が成り立たない例としては、下の例でみるように $P = P(3,4,5)$, $n = 2$ のときがある。

例 3.2. $P = P(3,4,5)$ とする。

$$P = (XZ - Y^2, YZ - X^3, Z^2 - X^2Y)$$

であり、P の生成元の次数はそれぞれ 8, 9, 10 である。ここで

$$(YZ - X^3)^2 - (XZ - Y^2)(Z^2 - X^2Y) \in P^2$$

である。しかし一方で

$$\begin{aligned}
& (YZ - X^3)^2 - (XZ - Y^2)(Z^2 - X^2Y) \\
= \ & Y^2Z^2 - 2X^3YZ + X^6 + XZ^3 - X^3YZ - Y^2Z^2 + X^2Y^3 \\
= \ & -3X^3YZ + X^6 + XZ^3 + X^2Y^3 \\
= \ & X(-3X^2YZ + X^5 + Z^3 + XY^3)
\end{aligned}$$

であり、$d = -3X^2YZ + X^5 + Z^3 + XY^3$ とおくと $X \notin P$, $Xd \in P^2$ より $d \in P^{(2)}$ である。d の次数は 15 であるが、P^2 の 0 でない元の次数の最小は 16 であるので $d \notin P^2$ である。

$R_s(P)$ は $S[t]$ の部分環であり、また任意の自然数 n に対して $P^{(n)}$ は S のイデアルである。$R_s(P)$ は n_1, n_2, n_3 の値によって Noether 環であったりなかったりする (Goto-Nishida-Watanabe [2]) が、次が成り立つ。

命題 3.3. 次の 5 条件は同値である。

A-1. $R_s(P)$ は Noether 環。

A-2. $R'_s(P)$ は Noether 環。

A-3. $R_s(P)$ は有限生成 S-代数。

A-4. $R_s(P)$ は有限生成 K-代数。

A-5. ある自然数 k, l と斉次多項式 $f \in P^{(k)}$, $g \in P^{(l)}$ があり、

$$\ell(S/(X,f,g)) = k \cdot l \cdot \ell(S/(P+(X)))$$

が成り立つ。

上の A-5 は Huneke の判定法と呼ばれており、これを満たす例は数多く知られている。

例 3.4. Huneke の判定法を満たす例を与える。
$P = P(3,4,5)$ のとき、$f = XZ - Y^2 \in P$, $g = -3X^2YZ + X^5 + Z^3 + XY^3 \in P^{(2)}$ とおく。ここで、$k = 1$, $l = 2$ とすると、

$$\begin{aligned} &\ell(S/(X,f,g)) = \ell(S/(X,Y^2,Z^3)) = 6 \\ &k \cdot l \cdot \ell(S/((X)+P)) = 2 \cdot \ell(S/(X,Y^2,YZ,Z^2)) = 6 \end{aligned}$$

であるので、Huneke の判定法を満たす。したがって $R_s(P)$ は Noether 環である。

以下、命題 3.3 を示す。

証明. ここで A-1, A-2, A-3, A-4 の同値性と A-5⇒A-2 を示す。A-5 ⇒ A-2 に関しては (Huneke [4]) 参照。
A-3 ⇔ A-4 を示す。$K \subset S \subset R_s(P)$ という包含関係があり、S は有限生成 K-代数であるので、A-3 を仮定すれば $R_s(P)$ は有限生成 K-代数になる。逆に A-4 を仮定しても、$R_s(P)$ が有限生成 S-代数であることがしたがう。
次に A-3⇒A-1 を示す。$R_s(P)$ は有限生成 S-代数であり、S は Noether 環であるので Hilbert の基底定理により $R_s(P)$ は Noether 環である。
次に A-1⇒A-2 を示す。$R'_s(P) = R_s(P)[t^{-1}]$ であるので Hilbert の基底定理により $R'_s(P)$ は Noether 環である。
次に A-2⇒A-1 を示す。一般に、$R = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} R_n$ を次数環とするとき、R が Noether 環であるならば $\bigoplus_{n \geq 0} R_n$ も Noether 環であることを示す。
まず、任意の n に対し R_n は R_0-加群である。ここで R_n の部分 R_0-加群の上昇列

$$M_0 \subset M_1 \subset M_2 \subset \cdots$$

をとれば、R のイデアルの上昇列

$$M_0R \subset M_1R \subset M_2R \subset \cdots$$

が得られるが、この上昇列は R が Noether 環であるのでいずれ止まる。ここでイデアルの上昇列と R_n との共通部分をとれば、任意の i に対し、$M_iR \cap R_n = M_i$ が成り立つので、R_n の部分 R_0 加群の上昇列もいずれ止まることがわかる。従って、$n=0$ とすると R_0 が Noether 環であることがわかり、さらに任意の n に対し R_n は有限生成 R_0-加群であることもわかる。次に $m = \bigoplus_{n>0} R_n$ とおく。mR は R のイデアルなので mR の生成元を有限個でとることができる。その生成元を $x_1, \cdots, x_r$ とする。ここで $x_1, \cdots, x_r$ は斉次元でとることができ、$\deg x_i = d_i$ とおけば $i = 1, 2, \cdots, r$ に対し $d_i > 0$ としてよい。ここで $d = \max\{d_1, \cdots, d_r\}$ とし、$R_1, R_2, \cdots, R_d$ の R_0-加群としての生成元と $x_1, \cdots, x_r$ を合わせたものを新しく $\{y_1, y_2, \cdots, y_s\}$ とおく。このとき、$\bigoplus_{n\geq 0} R_n = R_0[y_1, y_2, \cdots, y_s]$ であることを示そう。任意の自然数 n に対し、$R_n \subset R_0[y_1, y_2, \cdots, y_s]$ が成り立つことを n に関する帰納法で示す。
$n \leq d$ のときは明らかである。$n > d$ とする。$f \in R_n$ をとると $f \in m$ であるので $f = a_1y_1 + \cdots + a_sy_s$, $a_i \in R_{n-\deg y_i}$ とかける。ここで、$n - \deg y_i > 0$ であることに注意する。$a_i \in R_0[y_1, y_2, \cdots, y_s]$ であるので $f \in R_0[y_1, y_2, \cdots, y_s]$ も成り立つ。したがって $R'_s(P)$ が Noether 環であるならば $R_s(P)$ も Noether 環である。

A-5 $\Rightarrow$ A-2 を示す。次の補題を示せばよい。

補題 3.5. $P = P(n_1, n_2, n_3)$ とし、$R'_S(P)$ は Noether 環、$f \in P^{(k)}, g \in P^{(l)}$ は Huneke の判定法を満たすとする。このとき

$$T := K[X, t^{-1}, ft^k, gt^l] \subset R'_S(P) \subset K[X, Y, Z, t^{\pm 1}]$$

の包含関係があり、$R'_s(P)$ は T-加群として有限生成である。

以下、２段階に分けて補題を証明する。

Step 1. P は３次元の環から１次元の環への全射準同型写像の核であるので、$\mathrm{ht}(P) = 2$ である。$\varphi(X) \neq 0$ であるので $P + (X)$ は、$\mathrm{ht}(P + (X)) = 3$ を満たすイデアルである。よって $S/P + (X)$ は、0 次元の Noether 環であるので Artin 環である。したがって、$\ell(S/(X, f, g)) = k \cdot l \cdot \ell(S/(P + (X)))$ は有限であり、X, f, g は S のパラメーターなので K 上代数的独立であることがわかる ([5] の定理 14.5)。また $K[X, f, g, t^{-1}] \subset T = K[X, t^{-1}, ft^k, gt^l] \subset K[X, Y, Z, t^{\pm 1}]$ であり、

$$\mathrm{tr.deg}_K K[X, f, g, t^{-1}] = \mathrm{tr.deg}_K K[X, Y, Z, t^{\pm 1}] = 4$$

なので $\mathrm{tr.deg}_K T = 4$ である。したがって T は K 上 4 変数多項式環と同型であることに注意する。
ここで S' を $S' = K[X, f, g]$ とおくと、S は S' 上有限生成加群である。なぜならば $\ell(S/(X, f, g))$ が有限であるので、ある自然数 n_0 があり、n_0 より大きい任意の自然数 n に対して $S_n = (X, f, g)_n$ が成り立つ。ここで $S_0, S_1, \cdots, S_{n_0}$ で S' 上生成される S の S'-部分加群を S'' とおくと、$S = S''$ であることを以下で示す。そのために、任意の n に対して $S_n \subset S''_n$ であることを、n に関する帰納法で示す。
$n = n_0$ までは明らかに成り立つ。$n \geq n_0$ として $n-1$ まで正しいとする。S_n から勝手に多項式 h をとると、S の斉次多項式 w_1, w_2, w_3 があって

$$h = w_1 X + w_2 f + w_3 g$$

とかける。ここで、$\deg(w_1 X) = \deg(w_2 f) = \deg(w_3 g) = n$ としてよい。このとき w_1, w_2, w_3 の次数は n より真に小さいので、帰納法の仮定により w_1, w_2, w_3 は S'' の元である。従って $w_1 X + w_2 f + w_3 g$ は S'' の元である。よって $S \subset S''$ が従う。逆の包含関係は明らかである。
よって S は有限生成 S' 加群であるので、Y, Z は S' 上整である。$S' \subset T$ なので Y, Z は T 上でも整である。

Step 2. $T' := T[Y, Z]$ とし、T' の部分環 T'' を $T'' := K[X, Y, Z, t^{-kl}, (ft^k)^l, (gt^l)^k]$ と定義する。$P^{(kl)}$ は S のイデアルなので有限生成であり、A-5 の条件から

$$P^{((n+1)kl)} = (f^l, g^k) P^{(nkl)}$$

が任意の自然数 n に対して成り立つことがわかる (Huneke [4]) ので、$\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} P^{(nkl)} t^{nkl}$ は T'' 上有限生成加群であることがわかる。
　ここで補題を示す。

補題 3.6. $R = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} R_n$ を次数付き整域とし、$R^{(m)} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} R_{mn}$ とおく。このとき次の 3 条件は同値である。

B-1. ある自然数 m に対し、$R^{(m)}$ は Noether 環である。

B-2. 任意の自然数 m に対し、$R^{(m)}$ は Noether 環である。

B-3. R は Noether 環である。

証明. B-2 $\Rightarrow$ B-1 は明らかである。
B-1 $\Rightarrow$ B-3 を示す。自然数 i を固定し、$\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} R_{mn+i}$ を考える。$\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} R_{mn+i} = M^{(m,i)}$ とおけば、$M^{(m,i)}$ は $R^{(m)}$ 加群である。$M^{(m,i)} \neq (0)$ であれば、斉次元 $0 \neq a \in M^{(m,i)}$ をとり $a^{m-1}M^{(m,i)}$ を考えれば a は非零因子であるので $M^{(m,i)} \simeq a^{m-1}M^{(m,i)}$ となる。$a^{m-1}M^{(m,i)}$ は $R^{(m)}$ のイデアルとなるので $R^{(m)}$-加群として有限生成である。よって $M^{(m,i)}$ は $R^{(m)}$ 上有限生成加群である。
これを $i = 1, 2, \cdots, m-1$ に対して繰り返せば、R が $R^{(m)}$ 上有限生成加群であることが従うので R は Noether 環である。
B-3 $\Rightarrow$ B-2 を示す。m を任意の自然数とする。$R^{(m)}$ の勝手なイデアルの増大列をとり、$R^{(m)}$ から R への自然な単射に対する拡大イデアルを考えれば、R が Noether 環であるので拡大イデアルの上昇列はいずれ止まる。よって拡大イデアルの制限をとれば $R^{(m)}$ のイデアルの上昇列も止まるので、$R^{(m)}$ は Noether 環である。ここで $R^{(m)}$ の任意のイデアル I に対して、$IR \cap R^{(m)} = I$ が成り立つことを使っている。

□

補題により $R'_s(P)$ は Noether 環であり、$R'_s(P)$ は T'' 上有限生成加群であることもわかる。よって $R'_s(P)$ は有限生成 T-加群である。

□

4 主定理

$K[X, Y, Z, t^{\pm 1}]$ の単項式に、次のように順序を定義する。

定義 4.1.

$$t^a X^b Y^c Z^d > t^{a'} X^{b'} Y^{c'} Z^{d'} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{(i) } a + bn_1 + cn_2 + dn_3 > a + b'n_1 + c'n_2 + d'n_3 \\ \text{または} \\ \text{(ii) 上の式で等号成立ならば、} (a, b, c, d) <_{\text{lex}} (a', b', c', d') \end{cases}$$

以下、この順序を $S, T, R_s(P)$ に制限して考える。この順序を S に制限したものは、項順序であることに注意する。
この論文の主定理は次である。

定理 4.2. 次の 4 条件を仮定する。

C-1. $f \in P^{(k)}$, $g \in P^{(l)}$ は斉次多項式で Huneke の判定法の条件を満たす。

C-2. $R'_s(P)$ は Cohen-Macaulay。

C-3. $f \equiv Y^\beta \ mod(X)$ を満たす自然数 β が存在する。

C-4. 任意の自然数 n に対し、$in_<((X,f,g)+P^{(n)}) = in_<(X,f,g) + in_<(P^{(n)})$ が成り立つ。

このとき、ある自然数 $s, k_1, \cdots, k_s$ と多項式 $\xi_1 \in P^{(k_1)}, \cdots, \xi_s \in P^{(k_s)}$ があり、任意の自然数 n に対して

$$in_<(P^{(n)}) = \left(\{ in_<(\xi_1^{\alpha_1} \cdots \xi_s^{\alpha_s}) | \alpha_1, \cdots, \alpha_s \geq 0, \sum_{i=1}^s k_i\alpha_i = n \} \right)$$

が成り立つ。つまり、$G_n = \{\xi_1^{\alpha_1} \cdots \xi_s^{\alpha_s} | \alpha_1, \cdots \alpha_s \geq 0, \sum_{i=1}^s k_i\alpha_i = n\}$ とおくと、任意の自然数 n に対して、G_n は $P^{(n)}$ のグレブナー基底となる。[1]

証明. C-3 の条件と f が斉次多項式であることにより、$f = Xf' + Y^\beta$ を満たす $deg(f) - n_1$ 次斉次多項式 f' が存在する。ここで、順序の付け方により、Y^β は Xf' のどの項よりも上位にあることに注意する。よって $in_<(f) = Y^\beta$ である。ここで、$g \equiv cZ^\gamma \ mod(X, Y)$ とおく。$(c \in K, \gamma \geq 0)$。g は斉次式と仮定しているので、このように書けることに注意する。このとき $c \neq 0$ である。なぜならば、もし $c = 0$ であれば $(X,f,g) \subset (X,Y)$ となり、これは $\ell(S/(X,f,g))$ が有限であることに矛盾する。よって $c \neq 0$ である。c^{-1} をかけておいて、$in_<(g) = Z^\gamma$ としてよい。
T は 4 変数多項式環と同型であり、T の単項式は

$$X^a(t^{-1})^b(ft^k)^c(gt^l)^d = X^a f^c g^d t^{ck+dl-b}$$

の形をしている。$S[t^{\pm 1}]$ 内での先頭項は

$$\begin{aligned} in_<(X^a(t^{-1})^b(ft^k)^c(gt^l)^d) &= X^a \cdot in_<(f)^c \cdot in_<(g)^d \cdot t^{ck+dl-b} \\ &= X^a Y^{c\beta} Z^{d\gamma} t^{ck+dl-b} \end{aligned}$$

である。ここで $(a,b,c,d) \neq (a',b',c',d')$ であるならば $in_<(X^a(t^{-1})^b(ft^k)^c(gt^l)^d) \neq in_<(X^{a'}(t^{-1})^{b'}(ft^k)^{c'}(gt^l)^{d'})$ であることに注意する。
$R'_s(P)$ は S の次数による次数付けと、t の次数による次数付けにより $\mathbb{Z}^2$-型の次数環である。$R'_s(P)$ が Cohen-Macaulay であり、T は多項式環であり、$R'_s(P)$ は有限

[1] 定義により、任意の n に対して G_n は有限集合である。また、この定理は $\xi_1 t^{k_1}, \cdots, \xi_s t^{k_s}$ が $R_s(P)$ の SAGBI 基底であることを主張している。

生成 T-加群であるので、$R'_s(P)$ は T 上の $\mathbb{Z}^2$-次数加群として自由加群である。ここで

$$\begin{aligned} &\mathrm{rank}_T R'_s(P) = \mathrm{rank}_{T[t]} R'_s(P)[t] = \mathrm{rank}_{K[X,f,g]} S \\ = \ &\ell_S(S/(X,f,g)) = \ell_S(S/(X,Y^\beta,Z^\gamma)) = \beta\gamma \end{aligned}$$

である。一つ目の等号は T の商体と $T[t]$ の商体が一致することから従う。
四つ目の等号を示す。一般に、K-上の多項式環 R とそのイデアル I, R 内の単項式順序 $>$ に対して、$in_<(I)$ に入らない単項式全体の集合を $\{M_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ とおくと、$\{M_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ は R/I の K-基底となる。まずこれを示す。$\{M_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ が R/I で K 上一次独立であることは、$0 \neq \sum\limits_{\lambda\in\Lambda} c_\lambda M_\lambda \in I, (c_\lambda \in K)$ であるならば、先頭項をとると、ある $\mu \in \Lambda$ があって、$in_<(\sum\limits_{\lambda\in\Lambda} c_\lambda M_\lambda) = M_\mu$ となるが、$M_\mu \notin in_<(I)$ であるので矛盾する。したがって、$\{M_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ は K 上一次独立である。次に、$\{M_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ は R/I を生成することを示す。多項式 $f \in R$ に対し、$in_<(f) \in in_<(I)$ であれば、ある多項式 $h \in I$ があって $in_<(f) > in_<(f-h)$ と項順序を低くすることができる。$in_<(f) \notin in_<(I)$ であれば、$in_<(f) = c_\lambda M_\lambda$ を満たす $\lambda \in \Lambda$ が存在する。よって、$in_<(f) > in_<(f - c_\lambda M_\lambda)$ であるので、$in_<(f)$ の項順序をより低くすることができる。つまり、任意の多項式は I の元と $\{M_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ の K-線形結合で書けることがわかった。特に、$\dim_K R/I < \infty$ であれば、$\dim_K R/I = \dim_K R/in_<(I)$ が成り立つ。ところで、$in_<(X) = X$, $in_<(f) = Y^\beta$, $in_<(g) = Z^\gamma$ はどの二つも互いに素であるので、X, f, g は (X, f, g) のグレブナー基底となっている。したがって、$in_<(X, f, g) = (X, Y^\beta, Z^\gamma)$ である。よって、四つ目の等号が従う。このことより、$R'_s(P)$ の T-加群としての斉次な基底

$$\{h_i t^{m_i} | i = 1, 2, \cdots, \beta\gamma\}$$

をとることができる。ただし、$h_1, \cdots, h_{\beta\gamma} \in S$ である。ここで次の順で主定理の証明を行う。

主張 1. m_i $(i = 1, 2, \cdots, \beta\gamma)$ はすべて非負整数となる。

主張 2. $h_1, h_2, \cdots, h_{\beta\gamma}$ をうまくとれば

$$\{in_<(h_1), in_<(h_2), \cdots, in_<(h_{\beta\gamma})\} = \{Y^p Z^q | p = 0, 1, \cdots, \beta-1; q = 0, 1, \cdots, \gamma-1\}$$

となるようにとれる。

主張 3. このとき任意の n に対して、

$$\{in_<(\eta) \mid 0 \neq \eta \in P^{(n)}\} = \{in_<(f^u g^v h_i) \mid u, v \in \mathbb{N}_0; i = 1, 2, \cdots, \beta\gamma; ku+lv+m_i \geq n\}$$

が成り立つ。

主張 4. 集合

$$\{f^u g^{\lceil \frac{n-ku-m_i}{l} \rceil} h_i \mid i = 1, 2, \cdots, \beta\gamma; u = 0, 1, \cdots, \lceil \frac{n-m_i}{k} \rceil\}$$

は $P^{(n)}$ のグレブナー基底である。(ただし、$\lceil \alpha \rceil$ は α 以上の最小の整数である。)

主張 5. $m_1 = m_2 = \cdots = m_i = 0,\ 0 < m_{i+1} \leq \cdots \leq m_{\beta\gamma}$ とする。

$$\left\{ \begin{array}{c} f \in P^{(1)}, f \in P^{(2)}, \cdots, f \in P^{(k)} \\ g \in P^{(1)}, g \in P^{(2)}, \cdots, g \in P^{(l)} \\ h_{i+1} \in P^{(1)}, h_{i+1} \in P^{(2)}, \cdots, h_{i+1} \in P^{(m_{i+1})} \\ \vdots \\ h_{\beta\gamma} \in P^{(1)}, h_{\beta\gamma} \in P^{(2)}, \cdots, h_{\beta\gamma} \in P^{(m_{\beta\gamma})} \end{array} \right\}$$

は**定理 4.2** の $\xi_1 \in P^{(k_1)}, \cdots, \xi_s \in P^{(k_s)}$ の条件を満たす。

主張 1 を示す。$m_i < 0$ となる i が存在するとする。この i に対して

$$h_i = u_1 h_1 t^{m_1} + \cdots + u_{\beta\gamma} h_{\beta\gamma} t^{m_{\beta\gamma}}$$

を満たす $u_1, \cdots, u_{\beta\gamma} \in T$ が一意に存在する。ここで $t^{-1} \in T$ であるので、両辺に t^{m_i} をかければ

$$h_i t^{m_i} = u_1 t^{m_i} h_1 t^{m_1} + \cdots + u_{\beta\gamma} t^{m_i} h_{\beta\gamma} t^{m_{\beta\gamma}}$$

となり、$R'_s(P)$ が T-自由加群であるので $u_j = 0\ (j \neq i)$, $u_i t^{m_i} = 1$ となる。t^{-1} は T の単元ではないので矛盾する。したがって、任意の i に対して $m_i \geq 0$ である。

次に主張 2 を示す。$R'_s(P)$ は T-自由加群なので、

$$\{R'_s(P) \text{ の } T\text{-加群としての生成系}\} = \{R'_s(P)/(X, t^{-1}, ft^k, gt^l) \text{ の } K\text{-基底}\}$$

である。$R'_s(P)/(X, t^{-1}, ft^k, gt^l)$ の K-基底を調べる。

$R'_s(P)$ の t に関する次数が n の部分は $P^{(n)}$ であり、$R'_s(P)$ のイデアル (X, t^{-1}, ft^k, gt^l)

の t に関する次数が n の部分は $XP^{(n)}+P^{(n+1)}+fP^{(n-k)}+gP^{(n-l)}$ である。よって、$R'_s(P)/(X,t^{-1},ft^k,gt^l)$ の t に関する次数が n の部分を W_n とすると、

$$W_n=\frac{P^{(n)}}{XP^{(n)}+P^{(n+1)}+fP^{(n-k)}+gP^{(n-l)}}$$

である。

ここで $f\in P^{(k)}$ と $g\in P^{(l)}$ が Huneke の判定法をみたすとき、次が成り立つことが知られている。(Goto-Nishida-Shimoda [1])

1. $(f,g)\supseteq P^{(k+l-1)}$

2. $(f,g)\not\supseteq P^{(k+l-2)}$

3. $n\leq k+l$ ならば $(f,g)\cap P^{(n)}=fP^{(n-k)}+gP^{(n-l)}$ が成り立つ。

   さらに $R'_s(P)$ が Cohen Macaulay ならば

4. 任意の自然数 n に対し、$(f,g)\cap P^{(n)}=fP^{(n-k)}+gP^{(n-l)}$ が成り立つ。

5. 任意の自然数 n に対し、$S/((f,g)+P^{(n)})$ は Cohen-Macaulay。

$n<0$ ならば $W_n=S/S=0$ であることに注意する。$n\geq k+l-1$ ならば $P^{(n)}=(f,g)\cap P^{(n)}=fP^{(n-k)}+gP^{(n-l)}$ より $W_n=0$ である。よって、$0\leq n<k+l-1$ の範囲で W_n を調べる。

任意の自然数 n に対し

$$0\to\frac{(f,g)+P^{(n)}}{(f,g)+P^{(n+1)}}\to\frac{S}{(f,g)+P^{(n+1)}}\to\frac{S}{(f,g)+P^{(n)}}\to 0$$

は完全列であり、$\dfrac{(f,g)+P^{(n)}}{(f,g)+P^{(n+1)}}$ は modular law により $P^{(n)}/((f,g)\cap P^{(n)}+P^{(n+1)})$ と同型である。

ここで $M'=\dfrac{(f,g)+P^{(n)}}{(f,g)+P^{(n+1)}}$, $M=\dfrac{S}{(f,g)+P^{(n+1)}}$, $M''=\dfrac{S}{(f,g)+P^{(n)}}$ とおく。

$$0\to M'\to M\to M''\to 0$$

に S 上 $S/(X)$ をテンソルすると、新たに完全列

$$\cdots\to\mathrm{Tor}_1^S(M'',S/(X))\to M'\otimes_S S/(X)\to M\otimes_S S/(X)\to M''\otimes_S S/(X)\to 0$$

が得られる。ここで $\mathrm{Tor}_1^S(M'', S/(X))$ をみる。$S/(X)$ の射影分解は $0 \to S \xrightarrow{\psi} S$, $\psi(a) = Xa$ であり、X が M''-正則であるので $M'' \otimes_S S \xrightarrow{1_{M''} \otimes \psi} M'' \otimes_S S$ は単射である。よって、$\mathrm{Tor}_1^S(M'', S/(X)) = \ker(1_{M''} \otimes \psi)/0 = 0$ である。したがって、完全列

$$0 \to \frac{P^{(n)}}{XP^{(n)} + (f,g) \cap P^{(n)} + P^{(n+1)}} \to \frac{S}{(X,f,g) + P^{(n+1)}} \to \frac{S}{(X,f,g) + P^{(n)}} \to 0$$

が得られる。$\dfrac{S}{(X,f,g) + P^{(n+1)}} \to \dfrac{S}{(X,f,g) + P^{(n)}}$ の核をみれば、$W_n = \dfrac{(X,f,g) + P^{(n)}}{(X,f,g) + P^{(n+1)}}$ となる。よって $\dfrac{(X,f,g) + P^{(n)}}{(X,f,g) + P^{(n+1)}}$ を調べる。

$$S \supset (X,f,g){+}P \supset (X,f,g){+}P^{(2)} \supset \cdots \supset (X,f,g){+}P^{(n)} \supset (X,f,g){+}P^{(n+1)} \supset \cdots$$

という減少列があり、それぞれの先頭項をとった

$$S \supset in_<((X,f,g) + P) \supset in_<((X,f,g) + P^{(2)}) \supset \cdots \supset in_<((X,f,g) + P^{(n)}) \supset \cdots$$

という減少列を考える。上の二つの減少列は $(f,g) \supseteq P^{(k+l-1)}$ であるので $n = k+l-1$ 以降は減少は止まることに注意する。W_n の K-ベクトル空間としての次元を δ_n で表すと、$\dfrac{in_<((X,f,g) + P^{(n)})}{in_<((X,f,g) + P^{(n+1)})}$ の K-ベクトル空間としての次元も δ_n である。ここで $n = k+l-2$ の部分を見てみると

$$in_<((X,f,g){+}P^{(k+l-2)}) = in_<((X,f,g)){+}in_<(P^{(k+l-2)}) = (X, Y^\beta, Z^\gamma){+}in_<(P^{(k+l-2)})$$

$$in_<((X,f,g) + P^{(k+l-1)}) = in_<((X,f,g)) = (X, Y^\beta, Z^\gamma)$$

であるので、$in_<(h_1), \cdots, in_<(h_{\delta_{k+l-2}})$ が $\dfrac{in_<((X,f,g) + P^{(k+l-2)})}{in_<((X,f,g) + P^{(k+l-1)})}$ の K-基底となるようなある多項式 $h_1, \cdots, h_{\delta_{k+l-2}} \in P^{(k+l-2)}$ がある。ここで、C-4 によって $h_i, \cdots, h_{\delta_{k+l-2}}$ が $P^{(k+l-2)}$ からとれることがわかる。この多項式 $h_1, \cdots, h_{\delta_{k+l-2}}$ が $\dfrac{(X,f,g) + P^{(k+l-2)}}{(X,f,g) + P^{(k+l-1)}}$ の K-基底であることを示す。

番号を並び変えて $in_<(h_1) > \cdots > in_<(h_{\delta_{k+l-2}})$ としてよい。まず、$h_1, \cdots, h_{\delta_{k+l-2}}$ が一次独立であることを示す。$\dfrac{(X,f,g) + P^{(k+l-2)}}{(X,f,g) + P^{(k+l-1)}}$ 内で

$$c_1 h_1 + \cdots + c_{\delta_{k+l-2}} h_{\delta_{k+l-2}} = 0$$

ならば (ただし、$c_1, \cdots, c_{k+l-2} \in K$)、

$$c_1 h_1 + \cdots + c_{\delta_{k+l-2}} h_{\delta_{k+l-2}} \in (X,f,g) + P^{(k+l-1)}$$

であるので、

$$in_<(c_1h_1 + \cdots + c_{\delta_{k+l-2}}h_{\delta_{k+l-2}}) \in in_<((X,f,g) + P^{(k+l-1)})$$

である。

ここで $c_1 \neq 0$ であれば $in_<(c_1h_1 + \cdots + c_{\delta_{k+l-2}}h_{\delta_{k+l-2}}) = in_<(c_1h_1) = in_<(h_1)$ であるが、これは $in_<(h_1) \notin in_<((X,f,g) + P^{(k+l-1)})$ に矛盾する。よって $c_1 = 0$ である。同様に $c_2 = c_3 = \cdots = c_{\delta_{k+l-2}} = 0$ である。

次に、$h_1, \cdots, h_{\delta_{k+l-2}}$ が $\dfrac{(X,f,g) + P^{(k+l-2)}}{(X,f,g) + P^{(k+l-1)}}$ を生成することを示す。$0 \neq h \in (X,f,g) + P^{(k+l-2)}$ をとると、

$$in_<(h) = c_1 in_<(h_1) + \cdots + c_{\delta_{k+l-2}} in_<(h_{\delta_{k+l-2}}) + in_<(w)$$

をみたす $w \in (X,f,g) + P^{(k+l-1)}$ がある。$h \in Kh_1 + \cdots + Kh_{k+l-2} + (X,f,g) + P^{(k+l-2)}$ を示したい。$in_<(h) \in in_<((X,f,g) + P^{(k+l-1)})$ の場合は h を $(X,f,g) + P^{(k+l-1)}$ の元でとりかえて $in_<(h)$ をより低くできる。$in_<(h) = in_<(h_i)$ をみたす i が存在する場合には、$h - c_ih_i \neq 0$ であれば $in_<(h - c_ih_i) < in_<(h_i)$ であるので、やはり $in_<(h)$ をより低くできる。よって、$h_1, h_2, \cdots, h_{\delta_{k+l-2}}$ は $\dfrac{(X,f,g) + P^{(k+l-2)}}{(X,f,g) + P^{(k+l-1)}}$ を生成する。このとき明らかに $in_<(h_1), in_<(h_2), \cdots, in_<(h_{\delta_{k+l-2}})$ の一つ一つの元は、Y^pZ^q $(p < \beta,\ q < \gamma)$ の形をしている。この操作を繰り返せばよい。

主張 3 を示す。$R'_s(P)$ の元は $X^a(t^{-1})^b(ft^k)^c(gt^l)^dh_it^{m_i}$ の K-線形結合で書ける。よって

$$in_<(X^a(t^{-1})^b(ft^k)^c(gt^l)^dh_it^{m_i}) = in_<(X^af^cg^dh_i)t^{kc+ld-b+m_i} = X^aY^{\beta c}Z^{\gamma d} \cdot in_<(h_i) \cdot t^{kc+ld-b+m_i}$$

となる。ここで、$X^aY^{\beta c}Z^{\gamma d} \cdot in_<(h_i) \cdot t^{kc+ld-b+m_i}$ は (a,b,c,d,i) が異なればすべて異なることに注意する。ゆえに

$$\begin{aligned}
& \{in_<(\eta) \mid 0 \neq \eta \in P^{(n)}\} \\
= \ & \{in_<(X^af^cg^dh_i) \mid i = 1,2,\cdots,\beta\gamma; a,b,c,d \text{ は } kc + ld - b + m_i = n \text{ を満たす非負整数}\} \\
= \ & \{in_<(X^af^cg^dh_i) \mid i = 1,2,\cdots,\beta\gamma; a,c,d \text{ は } kc + ld + m_i \geq n \text{ を満たす非負整数}\}
\end{aligned}$$

である。よって、単項式イデアル $\{in_<(\eta) \mid 0 \neq \eta \in P^{(n)}\}$ の生成元を求めれば、$P^{(n)}$ のグレブナー基底が求まる。$\eta \in P^{(n)}$ をとり、$in_<(\eta) = in_<(f^ug^vh_i)$ とする。$ku + lv + m_i \geq n$ に注意すると、$lv \geq n - (ku + m_i)$ であるので $in_<(f^ug^{\lceil \frac{n-(ku+m_i)}{l} \rceil}h_i)$

は $in_<(f^u g^v h_i)$ を割り切る。$u \geq \lceil \frac{n-m_i}{k} \rceil$ ならば、$ku \geq n-m_i$ であり、$in_<(f^u h_i) \in \{in_<(\eta) \mid 0 \neq \eta \in P^{(n)}\}$ である。よって、$in_<(f^{\lceil \frac{n-m_i}{k} \rceil} h_i) \in \{in_<(\eta) \mid \eta \in P^{(n)}\}$ であり、u の範囲は、$u = 0, 1, \cdots, \lceil \frac{n-m_i}{k} \rceil$ としてよい。以上で主張 4 が示された。

最後に主張 5 を示す。主張 5 の状況で、

$$G = \left\{ \begin{array}{c} f \in P^{(1)}, f \in P^{(2)}, \cdots, f \in P^{(k)} \\ g \in P^{(1)}, g \in P^{(2)}, \cdots, g \in P^{(l)} \\ h_{i+1} \in P^{(1)}, h_{i+1} \in P^{(2)}, \cdots, h_{i+1} \in P^{(m_{i+1})} \\ \vdots \\ h_{\beta\gamma} \in P^{(1)}, h_{\beta\gamma} \in P^{(2)}, \cdots, h_{\beta\gamma} \in P^{(m_{\beta\gamma})} \end{array} \right\}$$

とおく。各 n に対して、G_n を定理のように定める。$in_<(P^{(n)})$ の単項式 $in_<(X^a f^c g^d h_i)$ をとり、$X^a f^c g^d h_i$ をみる。

$$X^a (ft^k)^c (gt^l)^d h_i t^{m_i} = X^a (ft^k) \cdots (ft^k)(gt^l) \cdots (gt^l)(h_i t^{m_i})$$

である。このとき、右辺の t に関する次数は $kc+ld+m_i$ である。今、$kc+ld+m_i \geq n$ である。ここで、t の次数が n となるように $t^{n-(kc+lb-m_i)}$ をかけて整理すると、多項式

$$X^a (ft^{k_1}) \cdots (ft^{k_c})(gt^{l_1}) \cdots (gt^{l_d}) h_i t^m$$

が得られる。ただし $0 \leq k_1 \leq \cdots \leq k_c \leq k$, $0 \leq l_1 \leq \cdots \leq l_d \leq l$, $0 \leq m \leq m_i$, $\sum_{i=1}^{c} k_i + \sum_{j=1}^{d} l_j + m = n$ とする。ここで、自然数 u, v $(0 \leq u \leq c,\ 0 \leq v \leq d)$ を、$0 = k_u < k_{u+1}$, $0 = l_v < l_{v+1}$ となるようにとる。ここで場合分けをする。

Case 1. $0 < m \leq m_i$ のとき。

$$X^a (ft^{k_1}) \cdots (ft^{k_c})(gt^{l_1}) \cdots (gt^{l_d}) h_i t^m = X^a f^u g^v (ft^{k_{u+1}}) \cdots (ft^{k_c})(gt^{l_{v+1}}) \cdots (gt^{l_d}) h_i t^m$$

であり、$(ft^{k_{u+1}}) \cdots (ft^{k_c})(gt^{l_{v+1}}) \cdots (gt^{l_d}) h_i t^m$ の部分は、G の元の積で t に関する次数が n である。よって t^n を除いて先頭項をとれば

$$in_<(X^a f^c g^d h_i) = in_<(X^a f^u g^v) \cdot in_<(f^{c-u} \cdot g^{d-v} h_i)$$

となる。従って、$f^{c-u} g^{d-v} h_i$ は G_n の元になる。

Case 2. $0 = k_u < k_{u+1}$, $0 = l_v < l_{v+1}$, $m = 0$ のとき。

$X^a f^u g^v h_i (ft^{k_{u+1}}) \cdots (ft^{k_c})(gt^{l_{v+1}}) \cdots (gt^{l_d})$ の $(ft^{k_{u+1}}) \cdots (ft^{k_c})(gt^{l_{v+1}}) \cdots (gt^{l_d})$ の部分が G の元で t に関する次数が n である。これから t^n を除いたものは G_n の元になっている。よって G_n は $P^{(n)}$ のグレブナー基底であることがわかった。

□

例 4.3. ここで、定理の仮定が成り立つ例を紹介する。

- C-1 が $k = 1$, $l = 2$ で成り立つならば、直ちに残りの C-2, C-3, C-4 が示される。したがって $(n_1, n_2, n_3) = (3, 4, 5)$ のときは定理が使える。

- C-1 が $k = 1$ で成り立ち、かつ C-2 が成り立つならば、残りの C-3, C-4 が示される。例として、$(n_1, n_2, n_3) = (5, 62, 111)$ はこの仮定をみたす。

- C-1, C-2 がともに成り立つが、C-3 が成り立たない例が存在する。例えば、$(n_1, n_2, n_3) = (7, 9, 31)$ のとき、$k = 7$, $l = 10$ で C-1 が成り立つ。さらに体 K の標数が 0 であれば仮定 C-2 が成り立つことが Gongyo-Okawa-Sannai-Takagi [3] の結果よりわかっている。しかし、Mathematica で計算すると、C-3 が成立しないことが確かめられる。

- 体 K の標数が 0 であれば, $(n_1, n_2, n_3) = (25, 29, 72)$ のとき、仮定 C-1 は成り立たない。(Goto-Nishida-Watanabe [2], 1994)

謝辞

本論文を作成にあたり、最後まで優しくご指導下さった藏野和彦教授をはじめ、六年間常に熱心な授業をして下さった明治大学数学科の教員の皆様に深く感謝致します。

参考文献

[1] S. Goto, K. Nishida and Y. Shimoda, *The Gorensteinness of symbolic Rees algebras for space curves*, J. Math. Soc. Japan 43 (1991), no. 3, 465–481.

[2] S. Goto, K.Nishida and K.-i. Watanabe, *Non-Cohen-Macaulay symbolic blow-ups for space monomial curves and counterexamples to Cowsik's question*, Proc. Amer. Math. Soc. 120 (1994), no. 2, 383–392.

[3] Y. Gongyo, S. Okawa, A. Sannai and S. Takagi, *characterization of varieties of Fano type via singularities of Cox rings*, to appear in Journal Algebraic Geometry.

[4] C. Huneke, *On the finite generation of symbolic blow-ups*, Math. Z. 179 (1982), no. 4, 465–472.

[5] 松村英之, 可換環論, 共立出版 (1980).