2013 年度 修士学位請求論文

多重次数付環の様々なイデアルとその局所コホモロジーについて

明治大学大学院 理工学研究科 基礎理工学専攻

高瀬　友樹

指導教員 藏野和彦

目次

1 Introduction

この論文では、非負整数の組によって次数付けされた $\mathbb{N}_0^2$ 次数環 R のイデアルや、その局所コホモロジーの性質についての研究結果をまとめる. $\mathbb{N}_0^2$ 次数環の斉次元の次数は平面上の第 1 象限に分布しているが、この中で原点を端点に持つ傾き $\dfrac{q}{p}$ の開半直線をとり、この直線と格子点との交点の座標を次数に持つ斉次元で生成されたイデアル”$J_R(p,q)$”の性質について第 2 章で述べていく.

A, B を体 K 上有限生成な $\mathbb{N}_0^2$ 次数付環とする. ただし $A_0 = B_0 = K$ とする. $C = A \otimes_K B$ は $\mathbb{N}_0^2$ 次数付環である. また、M と N をそれぞれ有限生成 $\mathbb{Z}$ 次数付 A 加群、有限生成 $\mathbb{Z}$ 次数付 B 加群とすると、$M \otimes_K N$ は自然に $\mathbb{Z}^2$ 次数付 C 加群となる. $M \otimes_K N$ の $J_C(p,q)$ に関する局所コホモロジー加群の計算公式は、次のようになる.

定理 1.1 C-加群 $M \otimes_K N$ の $J_C(p,q)$ に関する局所コホモロジー加群 $H^i_{J_C(p,q)}(M \otimes_K N)$ は次のように記述できる.

$$H^i_{J_C(p,q)}(M\otimes_K N) \cong \begin{cases} \dfrac{\left(H^0_{A_+}(M)\otimes_K N\right)\oplus\left(M\otimes_K H^0_{B_+}(N)\right)}{H^0_{A_+}(M)\otimes_K H^0_{B_+}(N)} & (i=0) \\[2ex] \dfrac{D_{A_+}(M)\otimes_K D_{B_+}(N)}{\left(M/H^0_{A_+}(M)\right)\otimes_K\left(N/H^0_{B_+}(N)\right)} & (i=1) \\[2ex] \left(D_{A_+}(M)\otimes_K H^2_{B_+}(N)\right)\oplus\left(H^2_{A_+}(M)\otimes_K D_{B_+}(N)\right) & (i=2) \\[2ex] \left(D_{A_+}(M)\otimes_K H^i_{B_+}(N)\right)\oplus\left(H^i_{A_+}(M)\otimes_K D_{B_+}(N)\right) & (i>2) \\ \quad\oplus\left(\displaystyle\bigoplus_{\substack{p+q=i+1\\ p,q\geq 2}} H^p_{A_+}(M)\otimes_K H^q_{B_+}(N)\right) & \end{cases}$$

この公式の証明を第 3 章で与える. また、$M \otimes N$ の $J_C(1,1)$ に関する局所コホモロジー加群の計算公式をダイアゴナルに制限することで、M と N の Segre 積 $M\#N = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} (M_n \otimes N_n)$ における $A\#B$ の斉次極大イデアル $\mathfrak{m}$ に関する局所コホモロジーについて次の結果が得られる.

系 1.2 $H^i_{\mathfrak{m}}(M\#N)$ は次のように記述できる.

$$
H^i_{\mathfrak{m}}(M\#N) \cong \begin{cases}
\dfrac{\Big(H^0_{A_+}(M)\#N\Big) \oplus \Big(M\#H^0_{B_+}(N)\Big)}{H^0_{A_+}(M)\#H^0_{B_+}(N)} & (i=0) \\[2ex]
\dfrac{D_{A_+}(M)\#D_{B_+}(N)}{\Big(M/H^0_{A_+}(M)\Big)\#\Big(N/H^0_{B_+}(N)\Big)} & (i=1) \\[2ex]
\Big(D_{A_+}(M)\#H^2_{B_+}(N)\Big) \oplus \Big(H^2_{A_+}(M)\#D_{B_+}(N)\Big) & (i=2) \\[2ex]
\Big(D_{A_+}(M)\#H^i_{B_+}(N)\Big) \oplus \Big(H^i_{A_+}(M)\#D_{B_+}(N)\Big) & (i>2) \\
\qquad \oplus \left(\displaystyle\bigoplus_{\substack{p+q=i+1 \\ p,q\geq 2}} H^p_{A_+}(M)\#H^q_{B_+}(N) \right)
\end{cases}
$$

$H^0_{A_+}(M) = H^1_{A_+}(M) = 0$, $H^0_{B_+}(N) = H^1_{B_+}(N) = 0$ を仮定した場合、この公式は Goto-Watanabe [2, THEOREM(4.1.5)] で書かれており、これにより Segre 積の様々な性質を知ることができる.

2 $\mathbb{N}_0^2$ 次数環のイデアル $J_R(p,q)$

$\mathbb{N}$ を自然数全体の集合とし、$\mathbb{N}_0$ を非負整数全体の集合とする．

定義 2.1 環 R に加法群としての直和分解 $R = \bigoplus_{(i,j)\in\mathbb{N}_0^2} R_{(i,j)}$ が与えられており、$R_{(i,j)}R_{(k,l)} \subset R_{(i+k,j+l)}$ が満たされているとき、R を $\mathbb{N}_0^2$ 次数付環という．

定義 2.2 $R = \bigoplus_{(i,j)\in\mathbb{N}_0^2} R_{(i,j)}$ を $\mathbb{N}_0^2$ 次数付環とする．$(p,q) \neq (0,0)$ に対し、

$$J_R(p,q) = \left(\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} R_{(np,nq)}\right) \cdot R$$

と定める．$J_R(p,q)$ は R のイデアルである．

注意 2.3 $R = \bigoplus_{(i,j)\in\mathbb{N}_0^2} R_{(i,j)}$ を $\mathbb{N}_0^2$ 次数付ネーター環とする．このとき、$\mathbb{Z}$ 型の次数付ネーター環の場合と同様に、$R_{(0,0)}$ はネーター環で、R は $R_{(0,0)}$ 上有限生成な環であることが証明できる．

命題 2.4 R, S は $\mathbb{N}_0^2$ 次数付ネーター環とする．また、次数付環の間の次数を保つ環準同型写像 $f : R \to S$ は finite 射であるとする．このとき、

$$\sqrt{J_R(p,q)\cdot S} = \sqrt{J_S(p,q)}$$

が成り立つ．

命題 2.4 は次の補題により証明される．

補題 2.5 (1) $A = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}_0} A_n$, $B = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}_0} B_n$ を $\mathbb{N}_0$ 次数付環とする．また、$\mathbb{N}_0$ 次数付環の間の次数を保つ環準同型写像 $g : A \to B$ は finite 射であるとする．このとき、

$$\sqrt{A_+B} = \sqrt{B_+}$$

が成り立つ．

(2) 命題 2.4 の仮定のもと、$R' = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}_0} R_{(np,nq)}$ と $S' = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}_0} S_{(np,nq)}$ をそれぞれ R, S の部分環とする．このとき、S' は有限生成 R' 加群である．

証明 まずは (1) を示す．$\sqrt{A_+B} \subset \sqrt{B_+}$ は明らかである．$\sqrt{A_+B} \supset \sqrt{B_+}$ を示す．$B = Ab_1 + \cdots + Ab_t$ とする．$1 \leq i \leq t$ に対し、b_i は斉次元としてよい．$\deg b_i = d_i$ と

する．任意に斉次元 $b \in B_+$ をとり、$b \in \sqrt{A_+B}$ を示せば十分である．$\deg b = d$ とする．$k \in \mathbb{N}$ を、任意の $1 \leq i \leq t$ に対し $kd > d_i$ をみたすものとする．$b^k = \sum_{j=1}^{t} a_i b_i$ とおく．ただし $a_i \in A$ は斉次元で、任意の i に対して $\deg(b^k) = \deg(a_i b_i)$ としてよい．このとき、$\deg a_i = \deg b^k - \deg b_i = kd - d_i > 0$ である．したがって、$a_i \in A_+$ となり、$b^k \in A_+B$ となる．よって、$b \in \sqrt{A_+B}$ である．

次に (2) を示す．命題 2.4 の仮定より S は有限生成 R 加群であるから、S はネーター R 加群である．従って、S の部分 R 加群 RS' は有限生成である．よって、$RS' = Rs_1 + \cdots + Rs_k$ とおく．ただし $1 \leq i \leq k$ に対し、$s_i \in S'$ は斉次元とし、$\deg s_i = (n_i p, n_i q)$ とする．このとき、$S' = R's_1 + \cdots + R's_k$ を示そう．$S' \subset R's_1 + \cdots + R's_k$ を示せば十分である．さらに、斉次元 $s \in S'$ について、$s \in R's_1 + \cdots + R's_k$ を示せば十分である．$\deg s = (np, nq)$ とする．$s = \sum_{i=1}^{k} r_i s_i$ とおく．ただし、各 i について r_i は斉次元であり、任意の i について $\deg s = \deg r_i s_i$ としてよい．この式の両辺の次数を比較すると、$\deg r_i = \deg s - \deg s_i = ((n - n_i)p, (n - n_i)q)$ である．従って、$r_i \in R'$ となり、$s \in R's_1 + \cdots + R's_k$ である． 証明終

命題 2.4 を示す．

証明 $R' = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} R_{(np,nq)}$, $S' = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} S_{(np,nq)}$ を $\mathbb{N}_0$ 次数付環とすると、補題 2.5 より $\sqrt{R'_+S'} = \sqrt{S'_+}$ が得られる．このとき, $\sqrt{(\sqrt{R'_+S'}) \cdot S} = \sqrt{(\sqrt{S'_+}) \cdot S}$ である．$\sqrt{(\sqrt{R'_+S'}) \cdot S} = \sqrt{R'_+S} = \sqrt{J_R(p,q) \cdot S}$, $\sqrt{(\sqrt{S'_+}) \cdot S} = \sqrt{S'_+S} = \sqrt{J_S(p,q)}$ より、求めるべき等式が得られる． 証明終

以後、R はネーター $\mathbb{N}_0^2$ 次数付環とする．このとき、注意 2.3 より R はネーター環 $R_{(0,0)}$ 上環として有限生成な $\mathbb{N}_0^2$ 次数付環である．従って

$$R = R_{(0,0)}[x_1, \cdots, x_l, y_1, \cdots, y_m, z_1, \cdots, z_n]$$

とおく．ただし、$x_1, \cdots, x_l, y_1, \cdots, y_m, z_1, \cdots, z_n$ は斉次元とし、$\deg x_i = (p_i, q_i)$, $\deg y_j = (p'_j, q'_j)$, $\deg z_k = (p''_k, q''_k)$ $(1 \leq i \leq l, 1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq n)$ とする．また、次が成り立つものとする．

- (p_i, q_i) について、$\dfrac{q_i}{p_i} > \dfrac{q}{p}$ または $p_i = 0$.
- (p'_j, q'_j) について、$\dfrac{q'_j}{p'_j} < \dfrac{q}{p}$.
- (p''_k, q''_k) について、$\dfrac{q''_k}{p''_k} = \dfrac{q}{p}$.

このとき、次が成立する.

命題 2.6 I_1 を $x_1, \cdots, x_l, z_1, \cdots, z_n$ で生成される R のイデアル、I_2 を $y_1, \cdots, y_m, z_1, \cdots, z_n$ で生成される R のイデアルとする. このとき、

$$\sqrt{J_R(p,q)} = \sqrt{I_1 \cap I_2}$$

が成り立つ.

証明 $\sqrt{J_R(p,q)} \subset \sqrt{I_1 \cap I_2}$ を示すためには、$J_R(p,q) \subset \sqrt{I_1 \cap I_2}$ を示せば良い. 特に $h = {x_1}^{\alpha_1} \cdots {x_l}^{\alpha_l} {y_1}^{\beta_1} \cdots {y_m}^{\beta_m} {z_1}^{\gamma_1} \cdots {z_n}^{\gamma_n}$ という形で表わされる元で、次数が (kp, kq) のものが $\sqrt{I_1 \cap I_2}$ に属していることを示せば十分である. 実は $h \in I_1 \cap I_2$ である. もし $h \notin I_1 \cap I_2, h \neq 0$ とすれば、h は ${x_1}^{\alpha_1} \cdots {x_l}^{\alpha_l}$ または ${y_1}^{\beta_1} \cdots {y_m}^{\beta_m}$ と書き表せる. このとき、簡単な議論により、$\deg h = (kp, kq)$ であることに矛盾が生じる. よって $h \in I_1 \cap I_2$ となる.

$\sqrt{J_R(p,q)} \supset \sqrt{I_1 \cap I_2}$ を示そう. $I_1 I_2 \subset \sqrt{J_R(p,q)}$ を示せば十分である. $x_i y_j \in \sqrt{J_R(p,q)}$ を示す. ただし $1 \leq i \leq l$, $1 \leq j \leq m$ である. このとき、x_i, y_j の次数 (p_i, q_i) と (p'_j, q'_j) は $\mathbb{Q}$ 上一次独立である. よって、ある自然数 α, β, γ を用いて、$\alpha(p_i, q_i) + \beta(p'_j, q'_j) = \gamma(p,q)$ と表わせる. 従って、$\deg({x_i}^{\alpha} {y_j}^{\beta}) = (\gamma p, \gamma q)$ であるから、$(x_i y_j)^{\alpha+\beta} \in J_R(p,q)$ となる. **証明終**

局所コホモロジー加群はイデアルの根基に依存しない。よって命題 2.6 より次が成り立つ.

系 2.7 M を R 加群とする. このとき、任意の非負整数 i について

$$H^i_{J_R(p,q)}(M) \cong H^i_{I_1 \cap I_2}(M)$$

である.

注意 2.8 今、生成元 $z_1, \cdots, z_n$ が無い場合を考える. すなわち、R が $R_{(0,0)}$ 上 $x_1, \cdots, x_l, y_1, \cdots, y_m$ で生成されているときである. このとき、$I_1 = (x_1, \cdots, x_l)$, $I_2 = (y_1, \cdots, y_m)$ である. ここで、

$$r_1 = \min\left\{\frac{q_i}{p_i}\middle| 1 \leq i \leq l\right\}, \quad r_2 = \max\left\{\frac{q'_j}{p'_j}\middle| 1 \leq j \leq m\right\}$$

とおく. このとき、系 2.7 により、$r_2 < \dfrac{q}{p} < r_1$ をみたすいかなる $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ に対しても、局所コホモロジー $H^i_{J_R(p,q)}(M)$ は $H^i_{I_1 \cap I_2}(M)$ に一致することがわかる.

3 局所コホモロジーの計算公式

以下この章では、$A = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}_0} A_i$ を体 K 上 A_1 の元で有限生成される $\mathbb{N}_0$ 次数環とする．同様に $B = \bigoplus_{j \in \mathbb{N}_0} B_j$ を体 K 上 B_1 の元で有限生成される $\mathbb{N}_0$ 次数環とする．ただし $K = A_0 = B_0$ とする．

A と B の K 上のテンソル積 $A \otimes_K B$ は、K-代数の構造をもつ．また、次の同型

$$
\begin{aligned}
A \otimes_K B &= \left(\bigoplus_{i \in \mathbb{N}_0} A_i \right) \otimes_K \left(\bigoplus_{j \in \mathbb{N}_0} B_j \right) \\
&\cong \bigoplus_{(i,j) \in \mathbb{N}_0^2} A_i \otimes_K B_j
\end{aligned}
$$

により、$A_i \otimes_K B_j$ の元を次数 (i, j) の斉次元とする $\mathbb{N}_0^2$ 次数環となる．

以後、$A \otimes_K B$ を $C = \bigoplus_{(i,j) \in {\mathbb{N}_0}^2} C_{(i,j)}$ とおく．ただし $C_{(i,j)} = A_i \otimes_K B_j$ である．A, B はそれぞれ K 上 A_1, B_1 の元で生成される有限生成な環であるから、C は $C_{(1,0)}$, $C_{(0,1)}$ の元によって K 上生成される有限生成な環となる．

A と B の斉次極大イデアルをそれぞれ A_+ と B_+ で表わし、$A_+ = (a_1, \cdots, a_m)$, $B_+ = (b_1, \cdots, b_n)$ とおく．ただし $a_1, \cdots, a_m \in A_1$, $b_1, \cdots, b_n \in B_1$ とする．A から C への自然な射を考え、A_+ の C への拡大イデアルを A_+C とおく．同様に、B_+ の C への拡大イデアルを B_+C とおく．先述したとおり、C は $C_{(1,0)}$, $C_{(0,1)}$ の元によって生成されており、特に、A_+C の生成元と B_+C の生成元で K 上生成されるとしてよい．よって命題 2.6 より、任意の $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ に対し、

$$
\sqrt{J_C(p,q)} = \sqrt{A_+C \cap B_+C}
$$

が成り立つ．

系 2.7 と注 2.8 により次が得られる．

命題 3.1 M を C 加群とする．また、$(p, q) \in \mathbb{N}^2$ とする．このとき、任意の非負整数 i について

$$
H^i_{J_C(p,q)}(M) \cong H^i_{A_+C \cap B_+C}(M) \cong H^i_{A_+C \cdot B_+C}(M)
$$

である．

あとで使うために negative connected sequence とそれに関する定理をひとつ紹介しよ

う．定理の証明等の詳しい内容については、 [1, Chapter 1, Chapter 12] を参照して頂きたい．

以後、R, S を可換環とし、$\mathscr{C}(R)$, $\mathscr{C}(S)$ をそれぞれ R 加群と S 加群の圏とする．

定義 3.2 $\mathscr{C}(R)$ から $\mathscr{C}(S)$ の共変関手の列 $(T^i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ が次の 2 条件を満たすとき、negative connected sequence であるという．

(1) $\mathscr{C}(R)$ 内の任意の短完全列 $0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$ に対し、$\mathscr{C}(S)$ 内の連結射

$$T^i(N) \to T^{i+1}(L) \quad (i \geq 0)$$

が定義され、

$$\begin{array}{cccccc} 0 \longrightarrow & T^0(L) & \xrightarrow{T^0(f)} & T^0(M) & \xrightarrow{T^0(g)} & T^0(N) \\ \longrightarrow & T^1(L) & \xrightarrow{T^1(f)} & T^1(M) & \xrightarrow{T^1(g)} & T^1(N) \\ \longrightarrow & \cdots & & & & \\ \longrightarrow & T^i(L) & \xrightarrow{T^i(f)} & T^i(M) & \xrightarrow{T^i(g)} & T^i(N) \\ \longrightarrow & T^{i+1}(L) & \longrightarrow & \cdots & & \end{array}$$

は複体をなす．

(2)

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L \arrow[r] \arrow[d, "\lambda"'] & M \arrow[r] \arrow[d, "\mu"'] & N \arrow[r] \arrow[d, "\nu"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & L' \arrow[r] & M' \arrow[r] & N' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

は $\mathscr{C}(R)$ 内の可換図とし、上下の水平列は完全であるとする．このとき、

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & T^i(L) \arrow[r] \arrow[d, "T^i(\lambda)"'] & T^i(M) \arrow[r] \arrow[d, "T^i(\mu)"'] & T^i(N) \arrow[r] \arrow[d, "T^i(\nu)"'] & T^{i+1}(L) \arrow[r] \arrow[d, "T^{i+1}(\lambda)"'] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & T^i(L') \arrow[r] & T^i(M') \arrow[r] & T^i(N') \arrow[r] & T^{i+1}(L') \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

は可換となる．ただし上下の水平列は (1) で得られる複体である．

特に、(1) で構成された複体が長完全列をなすとき、$(T^i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ は negative strongly connected sequence という．

定義 3.3 $(T^i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ と $(U^i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ を $\mathscr{C}(R)$ から $\mathscr{C}(S)$ への negative connected sequence とする．各 $i \in \mathbb{N}_0$ について、$\psi^i : T^i \to U^i$ は関手の自然変換であり、$0 \to L \to M \to N \to 0$

を $\mathscr{C}(R)$ の完全列としたとき、任意の $i \in \mathbb{N}_0$ について

$$\begin{array}{ccc} T^i(N) & \longrightarrow & T^{i+1}(L) \\ {\scriptstyle \psi_N^i}\big\downarrow & & {\scriptstyle \psi_L^{i+1}}\big\downarrow \\ U^i(N) & \longrightarrow & U^{i+1}(L) \end{array}$$

は可換であるとする．このとき、

$$\Psi = (\psi^i)_{i\in\mathbb{N}_0} : (T^i)_{i\in\mathbb{N}_0} \longrightarrow (U^i)_{i\in\mathbb{N}_0}$$

は negative connected sequence の射であるという．特に、任意の $i \in \mathbb{N}_0$ について ψ^i が同型な自然変換となるとき、Ψ は同型であるという．

例 3.4 R をネーター環とし、I を R のイデアルとする． $\left(H_I^i(-)\right)_{i\in\mathbb{N}_0}$ や $\left(\varinjlim_{l\in\mathbb{N}_0} \mathrm{Ext}_R^i\left((R/I)^l, -\right)\right)_{i\in\mathbb{N}_0}$, $\left(\varinjlim_{l\in\mathbb{N}_0} \mathrm{Ext}_R^i\left(I^l, -\right)\right)_{i\in\mathbb{N}_0}$ は negative strongly connected sequence である．また、M を R 加群とする．任意の $i \geq 0$ に対し、

$$H_I^i(M) \cong \varinjlim_{l\in\mathbb{N}_0} \mathrm{Ext}_R^i\left((R/I)^l, M\right)$$

であることはよく知られているが、$\left(H_I^i(-)\right)_{i\in\mathbb{N}_0}$ と $\left(\varinjlim_{l\in\mathbb{N}_0} \mathrm{Ext}_R^i\left((R/I)^l, -\right)\right)_{i\in\mathbb{N}_0}$ の間には同型な negative strongly connected sequence の射が存在している．

定理 3.5 $(T^i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ と $(U^i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ を $\mathscr{C}(R)$ から $\mathscr{C}(S)$ への negative connected sequence とする．

(1) $\psi^0 : T^0 \to U^0$ は関手の自然変換とする．また、次の 2 条件を満たすとする．
- (a) $(T^i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ は negative strongly connected sequence である．
- (b) 任意の $i \in \mathbb{N}$ と任意の入射 R 加群 E について、$T^i(E) = 0$ である．

このとき、$(\psi^i)_{i\in\mathbb{N}_0} : (T^i)_{i\in\mathbb{N}_0} \to (U^i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ が negative connected sequence の射となるような自然変換 $\psi^i : T^i \to U^i$ $(i = 1, 2, \cdots)$ の族が一意的に存在する．

(2) $\psi^0 : T^0 \to U^0$ は関手の同型な自然変換とする．また、次の条件を満たすとする．
- (a) $(T^i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ は negative strongly connected sequence である．
- (b) $(U^i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ は negative strongly connected sequence である．
- (c) 任意の $i \in \mathbb{N}$ と任意の入射 R 加群 E について、$T^i(E) = U^i(E) = 0$ である．

このとき、$(\psi^i)_{i\in\mathbb{N}_0} : (T^i)_{i\in\mathbb{N}_0} \to (U^i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ が同型な negative connected sequence の射となるような自然変換 $\psi^i : T^i \to U^i$ $(i = 1, 2, \cdots)$ の族が一意的に存在する.

注意 3.6 R, S を次数付環とし、${}^*\mathscr{C}(R)$, ${}^*\mathscr{C}(S)$ をそれぞれ次数付 R 加群と次数付 S 加群の圏とする. ${}^*\mathscr{C}(R)$ と ${}^*\mathscr{C}(S)$ に制限しても、上と同様な negative connected sequence の議論ができる.

定義 3.7 $\mathcal{C}(a_1, \cdots, a_m; A)^\bullet$ を A の $a_1, \cdots, a_m$ に関する Čech 複体、$\mathcal{C}(b_1, \cdots, b_n; B)^\bullet$ を B の $b_1, \cdots, b_n$ に関する Čech 複体とする.

$a \in \mathcal{C}(a_1, \cdots, a_m; A)^p$, $b \in \mathcal{C}(b_1, \cdots, b_n; B)^q$ に対し、

$$d(a \otimes b) = d'a \otimes b + (-1)^p a \otimes d''b$$

と定義する. ただし、d', d'' はそれぞれ $\mathcal{C}(a_1, \cdots, a_m; A)^\bullet$ と $\mathcal{C}(b_1, \cdots, b_n; B)^\bullet$ の微分作用素である.

$$\mathcal{Q}^i = \bigoplus_{p+q=i} \mathcal{C}(a_1, \cdots, a_m; A)^p \otimes_K \mathcal{C}(b_1, \cdots, b_n; B)^q$$

とおくと、$\mathcal{Q}^\bullet$ は d を微分作用素として持つ $\mathscr{C}(C)$ 上の複体となる.

補題 3.8 $\mathscr{C}(C)$ 上の複体の同型

$$\mathcal{Q}^\bullet \cong \mathcal{C}(a_1 \otimes 1, \cdots, a_m \otimes 1, 1 \otimes b_1, \cdots 1 \otimes b_n; C)^\bullet$$

が存在する. ただし、$\mathcal{C}(a_1 \otimes 1, \cdots, a_m \otimes 1, 1 \otimes b_1, \cdots 1 \otimes b_n; C)^\bullet$ は C の $a_1 \otimes 1, \cdots, a_m \otimes 1$, $1 \otimes b_1, \cdots$, $1 \otimes b_n$ に関する Čech 複体である.

証明 $\mathcal{Q}^i$ の直和因子 $A_{a_{s_1} \cdots a_{s_p}} \otimes_K B_{b_{t_1} \cdots b_{t_q}}$ と $\mathcal{C}(a_1 \otimes 1, \cdots, a_m \otimes 1, 1 \otimes b_1, \cdots 1 \otimes b_n; C)^\bullet$ の直和因子 $C_{(a_{s_1} \otimes 1) \cdots (a_{s_p} \otimes 1)(1 \otimes b_{t_1}) \cdots (1 \otimes b_{t_q})}$ について、

$$\begin{aligned}
A_{a_{s_1} \cdots a_{s_p}} \otimes_K B_{b_{t_1} \cdots b_{t_q}} &\cong A_{a_{s_1} \cdots a_{s_p}} \otimes_K (B \otimes_B B_{b_{t_1} \cdots b_{t_q}}) \\
&\cong (A_{a_{s_1} \cdots a_{s_p}} \otimes_K B) \otimes_B B_{b_{t_1} \cdots b_{t_q}} \\
&\cong (A_{a_{s_1} \cdots a_{s_p}} \otimes_K B)_{b_{t_1} \cdots b_{t_q}} \\
&\cong ((A_{a_{s_1} \cdots a_{s_p}} \otimes_A A) \otimes_K B)_{b_{t_1} \cdots b_{t_q}} \\
&\cong (A_{a_{s_1} \cdots a_{s_p}} \otimes_A (A \otimes_K B))_{b_{t_1} \cdots b_{t_q}} \\
&\cong ((A \otimes_K B)_{a_{s_1} \cdots a_{s_p}})_{b_{t_1} \cdots b_{t_q}} \\
&\cong C_{(a_{s_1} \otimes 1) \cdots (a_{s_p} \otimes 1)(1 \otimes b_{t_1}) \cdots (1 \otimes b_{t_q})}
\end{aligned}$$

という同型が存在する.

$$\frac{a}{(a_{s_1} \cdots a_{s_p})^u} \in A_{a_{s_1} \cdots a_{s_p}} \text{ と } \frac{b}{(b_{t_1} \cdots b_{t_q})^v} \in B_{b_{t_1} \cdots b_{t_q}}$$

のテンソル積に対し、

$$\frac{(a_{s_1}\cdots a_{s_p})^v a\otimes(b_{t_1}\cdots b_{t_q})^u b}{((a_{s_1}\otimes 1)\cdots(a_{s_p}\otimes 1)(1\otimes b_{t_1})\cdots(1\otimes b_{t_q}))^{u+v}}\in C_{(a_{s_1}\otimes 1)\cdots(a_{s_p}\otimes 1)(1\otimes b_{t_1})\cdots(1\otimes b_{t_q})}$$

が対応している.

また、ダイヤグラム

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{Q}^i & \longrightarrow & \mathcal{Q}^{i+1} \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{C}(a_1\otimes 1,\cdots,1\otimes b_n;C)^i & \longrightarrow & \mathcal{C}(a_1\otimes 1,\cdots,1\otimes b_n;C)^{i+1}
\end{array}$$

の可換性は $\mathcal{Q}^\bullet$ と Čech 複体の微分作用素の定義より明らかである. **証明終**

C 加群と C 線型写像の列

$$\mathcal{S}^\bullet : 0 \longrightarrow \mathcal{S}^0 \xrightarrow{\eta^0} \mathcal{S}^1 \xrightarrow{\eta^1} \cdots \xrightarrow{\eta^{n+m-2}} \mathcal{S}^{n+m-1} \xrightarrow{\eta^{n+m-1}} \mathcal{S}^{n+m} \longrightarrow 0$$

を次のように定義する.

- $\mathcal{S}^0=\mathcal{C}(a_1,\cdots,a_m;A)^0\otimes_K\mathcal{C}(b_1,\cdots,b_n;B)^0$
- $1\le i\le n+m$ について

  $$\mathcal{S}^i=\big(\mathcal{C}(a_1,\cdots,a_m;A)^i\otimes_K\mathcal{C}(b_1,\cdots,b_n;B)^0\big)\oplus\big(\mathcal{C}(a_1,\cdots,a_m;A)^0\otimes_K\mathcal{C}(b_1,\cdots,b_n;B)^i\big)$$

  ただし、$i>m$ のとき $\mathcal{C}(a_1,\cdots,a_m;A)^i=0$、$i>n$ のとき $\mathcal{C}(b_1,\cdots,b_n;B)^i=0$ とする.
- $a\in\mathcal{C}(a_1,\cdots,a_m;A)^0$, $b\in\mathcal{C}(b_1,\cdots,b_n;B)^0$ とする.
  また、$i\ge 1$ とし、$a'\in\mathcal{C}(a_1,\cdots,a_m;A)^i$, $b'\in\mathcal{C}(b_1,\cdots,b_n;B)^i$ とする.
  * $a\otimes b\in\mathcal{S}^0$ に対して

  $$\eta^0(a\otimes b)=d'a\otimes b+a\otimes d''b$$

  * $a'\otimes b+a\otimes b'\in\mathcal{S}^i$ に対して

  $$\eta^i(a'\otimes b+a\otimes b')=d'a'\otimes b+a\otimes d''b'$$

  と定める. ただし、d', d'' はそれぞれ $\mathcal{C}(a_1,\cdots,a_m;A)^\bullet$, $\mathcal{C}(b_1,\cdots,b_n;B)^\bullet$ の微分作用素とする.

同じく C 加群と C 線型写像の列

$$\mathcal{T}^\bullet : 0 \longrightarrow \mathcal{T}^0 \xrightarrow{\theta^0} \mathcal{T}^1 \xrightarrow{\theta^1} \cdots \xrightarrow{\theta^{n+m-2}} \mathcal{T}^{n+m-1} \xrightarrow{\theta^{n+m-1}} \mathcal{T}^{n+m} \longrightarrow 0$$

を次のように定義する.

- $\mathcal{T}^0 = \mathcal{T}^1 = 0,\ \theta^0 = 0,\ \theta^1 = 0$
- $i \geq 2$ について
$$\mathcal{T}^i = \bigoplus_{\substack{p+q=i \\ p,q\geq 1}} (\mathcal{C}(a_1, \cdots, a_m; A)^p \otimes_K \mathcal{C}(b_1, \cdots, b_n; B)^q)$$
- $a' \in \mathcal{C}(a_1, \cdots, a_m; A)^p,\ b' \in \mathcal{C}(b_1, \cdots, b_n; B)^q$ とする. $i \geq 2$ に対し、$\mathcal{T}^i$ の直和因子の元 $a' \otimes b' \in \mathcal{C}(a_1, \cdots, a_m; A)^p \otimes_K \mathcal{C}(b_1, \cdots, b_n; B)^q$ について
$$\theta^i(a' \otimes b') = d'a' \otimes b' + (-1)^p a' \otimes d''b'$$
と定める. ただし、d', d'' はそれぞれ $\mathcal{C}(a_1, \cdots, a_m; A)^\bullet, \mathcal{C}(b_1, \cdots, b_n; B)^\bullet$ の微分作用素とする.

$\mathcal{S}^\bullet$、$\mathcal{T}^\bullet$ はそれぞれ $\mathscr{C}(C)$ 上の複体であり、特に $\mathcal{T}^\bullet$ は $\mathcal{Q}^\bullet$ の部分複体である. さらに、自然な単射と全射によって定義される列

$$0 \longrightarrow \mathcal{T}^\bullet \longrightarrow \mathcal{Q}^\bullet \longrightarrow \mathcal{S}^\bullet \longrightarrow 0$$

は複体の完全列をなす.

命題 3.9 $\mathscr{C}(C)$ から自身への negative connected sequence の同型射

$$\left(\varinjlim_{l\in\mathbb{N}} \mathrm{Ext}^i_C \left((A_+C \cdot B_+C)^l, - \right) \right)_{i\in\mathbb{N}_0} \longrightarrow \left(H^i \left((\{2\}\mathcal{T}^\bullet)^\bullet \otimes_C - \right) \right)_{i\in\mathbb{N}_0}$$

が存在する. ただし、$(\{2\}\mathcal{T}^\bullet)^\bullet$ は $\mathcal{T}^\bullet$ の 2-shift、すなわち $(\{2\}\mathcal{T}^\bullet)^i = \mathcal{T}^{i+2}$ とする.

証明 定理 3.5 を適用することで同型の存在を示したい. そのためには次を示せばよい.

(1) 関手の同型な自然変換 $\psi : \varinjlim_{l\in\mathbb{N}} \mathrm{Ext}^0_C \left((A_+C \cdot B_+C)^l, - \right) \to H^0 \left((\{2\}\mathcal{T}^\bullet)^\bullet \otimes_C - \right)$ が存在する.

(2) $\left(\varinjlim_{l\in\mathbb{N}} \mathrm{Ext}^i_C \left((A_+C \cdot B_+C)^l, - \right) \right)_{i\in\mathbb{N}_0}$ は negative strongly connected sequence である.

(3) $\left(H^i\left((\{2\}\mathcal{T}^\bullet)^\bullet \otimes_C -\right)\right)_{i\in\mathbb{N}_0}$ は negative strongly connected sequence である.

(4) 任意の $i\in\mathbb{N}$ と任意の入射 C 加群 E に対して、

$$\varinjlim_{l\in\mathbb{N}} \operatorname{Ext}^i_C\left((A_+C\cdots B_+C)^l, E\right) = H^i\left((\{2\}\mathcal{T}^\bullet)^\bullet \otimes_C E\right) = 0$$

である.

まず (1) を示す. $\{a_i\otimes b_j \in C | 1\le i\le m, 1\le j\le n\}$ に関する C 加群 M の Čech 複体を $\mathcal{C}(\underline{a_i\otimes b_j}; M)^\bullet$ で表わす. $\mathcal{C}(\underline{a_i\otimes b_j}; M)^\bullet$ の 1 番目の微分作用素を

$$\hat{d}:\mathcal{C}(\underline{a_i\otimes b_j}; M)^1 \to \mathcal{C}(\underline{a_i\otimes b_j}; M)^2$$

とおき、$\hat{d}$ の核を $K(M)$ で表わす. $K(-)$ は関手となり、同型な自然変換

$$\varinjlim_{l\in\mathbb{N}} \operatorname{Ext}^0_C\left((A_+C\cdot B_+C)^l, -\right) \to K(-)$$

が存在する. [1, Proposition 5.1.23]
よって、同型な自然変換

$$K(-)\to \phi : H^0\left((\{2\}\mathcal{T}^\bullet)^\bullet \otimes_C -\right)$$

が存在することを示せばよい.
M を C 加群とする.

$$\begin{aligned}\mathcal{C}(\underline{a_i\otimes b_j}; M)^1 &= \bigoplus_{i,j} M_{a_i\otimes b_j}\\ &\cong \bigoplus_{i,j}(A_{a_i}\otimes_K B_{b_j})\otimes_C M\\ &= (\{2\}\mathcal{T}^\bullet)^0\otimes_C M\end{aligned}$$

による自然な C 同型を

$$f:\mathcal{C}(\underline{a_i\otimes b_j}; M)^1 \to (\{2\}\mathcal{T}^\bullet)^0\otimes_C M$$

とおく.

この f が $K(M)\cong \operatorname{Ker}\left((\{2\}\theta^\bullet)^0\otimes 1\right)$ を誘導することを示す. $(\{2\}\mathcal{T}^\bullet)^1\otimes_C M$ の直和因子 $(A_{a_ia_r}\otimes_K B_{b_j})\otimes_C M$ は $\mathcal{C}(\underline{a_i\otimes b_j}; M)^1$ の直和因子 $M_{(a_i\otimes b_j)(a_r\otimes b_j)}$ と同型である. 同様に、$(A_{a_i}\otimes_K B_{b_jb_s})\otimes_C M$ は $M_{(a_i\otimes b_j)(a_i\otimes b_s)}$ と同型である. $\pi:\mathcal{C}(\underline{a_i\otimes b_j}; M)^2 \to (\{2\}\mathcal{T}^\bullet)^1\otimes_C M$ をこれらの同型によって得られる自然な射影とす

る．ただし $i \neq r$ かつ $j \neq s$ のときは、$\pi(C_{(a_i \otimes b_j)(a_r \otimes b_s)}) = 0$ と定義する．ここで、$\{a_i \otimes b_j \in C | 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ に、$i < s$, または $i = s$ かつ $j > t$ のとき $a_i \otimes b_j < a_s \otimes b_t$ という順序を入れて、$\mathcal{C}(\underline{a_i \otimes b_j}; M)^\bullet$ を定義する．すると、次のダイヤグラム

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{C}(\underline{a_i \otimes b_j}; M)^1 & \xrightarrow[\hat{d}]{} & \mathcal{C}(\underline{a_i \otimes b_j}; M)^2 \\
{\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\
(\{2\}\mathcal{T}^\bullet)^0 \otimes_C M & \xrightarrow{(\{2\}\theta^\bullet)^0 \otimes 1} & (\{2\}\mathcal{T}^\bullet)^1 \otimes_C M
\end{array}$$

は可換になる．このダイヤグラムの可換性より、$f\left(\mathrm{Ker}(\hat{d})\right) \subset \mathrm{Ker}\left((\{2\}\theta^\bullet)^0 \otimes 1\right)$ は明らかである．

逆を示す．

$$x = \left(\frac{x_{i,j}}{(a_i \otimes b_j)^u} : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\right) \in \mathcal{C}(\underline{a_i \otimes b_j}; M)^1$$

とし、$\left(\left((\{2\}\theta^\bullet)^0 \otimes 1\right) \cdot f\right)(x) = 0$ とする．ただし、$\dfrac{x_{i,j}}{(a_i \otimes b_j)^u} \in M_{a_i \otimes b_j}$ とする．$1 \leq i < s \leq m$, $1 \leq j < t \leq n$ とする．$\mathcal{C}(\underline{a_i \otimes b_j}; M)^2$ の直和因子 $M_{(a_i \otimes b_j)(a_s \otimes b_t)}$ への $\hat{d}(x)$ の像は、$-\dfrac{(a_s \otimes b_t)^u x_{i,j}}{(a_i a_s \otimes b_j b_t)^u} + \dfrac{(a_i \otimes b_j)^u x_{s,t}}{(a_i a_s \otimes b_j b_t)^u}$ となっている．これが 0 になることを示せばよい．すなわち

$$(a_i a_s \otimes b_j b_t)^v \left(-(a_s \otimes b_t)^u x_{i,j} + (a_i \otimes b_j)^u x_{s,t}\right) = 0$$

をみたす $v > 0$ が存在することを示す． 仮定より、$\mathcal{C}(\underline{a_i \otimes b_j}; M)^2$ の直和因子 $M_{(a_i \otimes b_j)(a_s \otimes b_j)}$ への $\hat{d}(x)$ の像は 0 である。従って、$-\dfrac{(a_s \otimes b_j)^u x_{i,j}}{(a_i a_s \otimes b_j^2)^u} + \dfrac{(a_i \otimes b_j)^u x_{s,j}}{(a_i a_s \otimes b_j^2)^u} = 0$ となる．よって、

$$(a_i a_s \otimes b_j^2)^{v_1} \left(-(a_s \otimes b_j)^u x_{i,j} + (a_i \otimes b_j)^u x_{s,j}\right) = 0 \tag{3.1}$$

をみたす $v_1 > 0$ が存在する．同様に $\mathcal{C}(\underline{a_i \otimes b_j}; M)^2$ の直和因子 $M_{(a_s \otimes b_j)(a_s \otimes b_t)}$ への $\hat{d}(x)$ の像は 0 であるから、

$$(a_s^2 \otimes b_j b_t)^{v_2} \left((a_s \otimes b_t)^u x_{s,j} - (a_s \otimes b_j)^u x_{s,t}\right) = 0 \tag{3.2}$$

をみたす $v_2 > 0$ が存在する．ここで、充分大きくとれば、$v_1 = v_2$ としてよい．これをあらためて v とおく．あとは $(a_s \otimes b_t)^{(u+v)} \times (3.1) - (a_i \otimes b_j)^{(u+v)} \times (3.2)$ を計算すれば求めるべき式が得られる．$1 \leq i < s \leq m$, かつ $1 \leq t < j \leq n$ の場合も同様に証明できる．

以上より、$f|_{K(M)} : K(M) \to \mathrm{Ker}\left((\{2\}\theta^{\bullet})^0 \otimes 1\right)$ は C-同型となり、この射によって同型な自然変換が得られる．

(2) であるが、$\left(\varinjlim_{l\in\mathbb{N}_0} \mathrm{Ext}^i_C\left((A_+C\cdot B_+C)^l, -\right)\right)_{i\in\mathbb{N}}$ は例 3.3 の通り、negative strongly connected sequence である．

(3) を示す．$(\{2\}\mathcal{T}^{\bullet})^i$ の直和因子 $A_{a_{s_1}\cdots a_{s_p}} \otimes_K B_{b_{t_1}\cdots b_{t_q}}$ は $C_{(a_{s_1}\otimes 1)\cdots(1\otimes b_{t_q})}$ と同型であり、よって C 上平坦であるから $(\{2\}\mathcal{T}^{\bullet})^i$ も平坦である．従って、上下の水平列が完全であるような C 加群の可換図

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & L & \longrightarrow & M & \longrightarrow & N & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & L' & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & N' & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

に対し、複体の可換図

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & (\{2\}\mathcal{T}^{\bullet})^{\bullet} \otimes_C L & \longrightarrow & (\{2\}\mathcal{T}^{\bullet})^{\bullet} \otimes_C M & \longrightarrow & (\{2\}\mathcal{T}^{\bullet})^{\bullet} \otimes_C N & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & (\{2\}\mathcal{T}^{\bullet})^{\bullet} \otimes_C L' & \longrightarrow & (\{2\}\mathcal{T}^{\bullet})^{\bullet} \otimes_C M' & \longrightarrow & (\{2\}\mathcal{T}^{\bullet})^{\bullet} \otimes_C N' & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

における上下の水平列は完全となる．この可換図より、各 i に対し連結射が存在し、上下の水平列がコホモロジーの長完全列となる可換図

$$\begin{array}{ccccc}
\cdots \to H^i\left((\{2\}\mathcal{T}^{\bullet})^{\bullet} \otimes_C M\right) & \longrightarrow & H^i\left((\{2\}\mathcal{T}^{\bullet})^{\bullet} \otimes_C N\right) & \longrightarrow & H^{i+1}\left((\{2\}\mathcal{T}^{\bullet})^{\bullet} \otimes_C L\right) \to \cdots \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\cdots \to H^i\left((\{2\}\mathcal{T}^{\bullet})^{\bullet} \otimes_C M'\right) & \longrightarrow & H^i\left((\{2\}\mathcal{T}^{\bullet})^{\bullet} \otimes_C N'\right) & \longrightarrow & H^{i+1}\left((\{2\}\mathcal{T}^{\bullet})^{\bullet} \otimes_C L'\right) \to \cdots
\end{array}$$

が誘導される． よって、$\left(H^i\left((\{2\}\mathcal{T}^{\bullet})^{\bullet} \otimes_C -\right)\right)_{i\in\mathbb{N}_0}$ は negative strongly connected sequence となる．

最後に (4) を示す．E を入射 C 加群とする．$i \geq 1$ のとき、任意の $l > 1$ に対し、$\mathrm{Ext}^i_C\left((A_+C\cdot B_+C)^l, E\right) = 0$ である．よって

$$\varinjlim_{l\in\mathbb{N}} \mathrm{Ext}^i_C\left((A_+C\cdot B_+C)^l, E\right) = 0$$

である．あとは任意の $i \geq 1$ に対し、$H^i\left((\{2\}\mathcal{T}^{\bullet})^{\bullet} \otimes_C E\right) = 0$ であることを示せばよい．複体の完全列

$$0 \longrightarrow \mathcal{T}^{\bullet} \otimes_C E \longrightarrow \mathcal{Q}^{\bullet} \otimes_C E \longrightarrow \mathcal{S}^{\bullet} \otimes_C E \longrightarrow 0$$

からコホモロジーの長完全列

$$
\begin{array}{llllllll}
0 & \longrightarrow & H^0(\mathcal{T}^\bullet \otimes_C E) & \longrightarrow & H^0(\mathcal{Q}^\bullet \otimes_C E) & \longrightarrow & H^0(\mathcal{S}^\bullet \otimes_C E) & \longrightarrow \\
 & \longrightarrow & H^1(\mathcal{T}^\bullet \otimes_C E) & \longrightarrow & H^1(\mathcal{Q}^\bullet \otimes_C E) & \longrightarrow & H^1(\mathcal{S}^\bullet \otimes_C E) & \longrightarrow \\
 & \longrightarrow & \cdots & & & & & \\
 & \longrightarrow & H^i(\mathcal{T}^\bullet \otimes_C E) & \longrightarrow & H^i(\mathcal{Q}^\bullet \otimes_C E) & \longrightarrow & H^i(\mathcal{S}^\bullet \otimes_C E) & \longrightarrow \\
 & \longrightarrow & H^{i+1}(\mathcal{T}^\bullet \otimes_C E) & \longrightarrow & \cdots & & &
\end{array}
$$

が誘導される．$(A_+C)+(B_+C)$ の生成元が $a_1 \otimes 1, \cdots, a_m \otimes 1, 1 \otimes b_1, \cdots, 1 \otimes b_n$ であることに注意すれば、補題 3.8 より、$\mathcal{Q}^\bullet \otimes_C E \cong \mathcal{C}(a_1 \otimes 1, \cdots, a_m \otimes 1, 1 \otimes b_1, \cdots 1 \otimes b_n; E)^\bullet$ であるから、$i \geq 0$ に対し、

$$H^i(\mathcal{Q}^\bullet \otimes_C E) \cong H^i_{(A_+C)+(B_+C)}(E)$$

が成り立つ．さらに E は入射加群であるから、$i \geq 1$ において $H^i(\mathcal{Q}^\bullet \otimes_C E) = 0$ である．また、$\mathcal{S}^\bullet \otimes_C E$ の $i \geq 2$ におけるコホモロジーを求めると

$$H^i(\mathcal{S}^\bullet \otimes_C E) \cong H^i_{A_+C}(E) \oplus H^i_{B_+C}(E)$$

である．従って、$i \geq 2$ において $H^i(\mathcal{S}^\bullet \otimes_C E) = 0$ となる．
よって上の長完全列より、$i \geq 1$ に対し

$$H^i\left((\{2\}\mathcal{T}^\bullet)^\bullet \otimes_C E\right) = H^{i+2}(\mathcal{T}^\bullet \otimes_C E) = 0$$

が成り立つ． 証明終

定義 3.10 R をネーター環とし、I を R のイデアルとする．R 加群 M に対し、R 加群 $D_I(M)$ を

$$D_I(M) = \varinjlim_{l \in \mathbb{N}_0} \operatorname{Hom}_R\left(I^l, M\right)$$

で定義する．

注意 3.11 $D_I(-)$ は $\mathscr{C}(R)$ から自身への関手である、命題 3.9 の証明において述べたように、$D_I(-)$ と I の生成元に関する Čech 複体の 1 番目の微分作用素の核 $K(-)$ との間には同型な自然変換が存在する．

注意 3.11 と前命題、局所コホモロジーの基本性質より、次の同型が存在する．

系 3.12　M を C 加群とする．任意の $i \geq 0$ に対し、次の同型が存在する．

$$
\begin{aligned}
H^i\left((\{2\}\mathcal{T}^\bullet)^\bullet \otimes_C M\right) &\cong \varinjlim_{l\in\mathbb{N}} \operatorname{Ext}^i_C\left((A_+C\cdot B_+C)^l, M\right) \\
&\cong \begin{cases} \operatorname{Ker}\hat{d}^1 & (i=0) \\ \\ H^{i+1}_{A_+C\cdot B_+C}(M) & (i\geq 1) \end{cases}
\end{aligned}
$$

ただし、$\hat{d}^1 : \mathcal{C}(\underline{a_i\otimes b_j}; M)^1 \to \mathcal{C}(\underline{a_i\otimes b_j}; M)^2$ は $\mathcal{C}(\underline{a_i\otimes b_j}; M)^\bullet$ の 1 番目の微分作用素とする．

定理 3.13　M を有限生成 $\mathbb{Z}$ 次数付 A 加群、N を有限生成 $\mathbb{Z}$ 次数付 B 加群とする．また、$(p,q)\in\mathbb{N}^2$ とする．C 加群 $M\otimes_K N$ の $J_C(p,q)$ に関する局所コホモロジー加群 $H^i_{J_C(p,q)}(M\otimes_K N)$ は次のように記述できる．

$$
H^i_{J_C(p,q)}(M\otimes_K N) \cong \begin{cases}
\dfrac{\left(H^0_{A_+}(M)\otimes_K N\right)\oplus\left(M\otimes_K H^0_{B_+}(N)\right)}{H^0_{A_+}(M)\otimes_K H^0_{B_+}(N)} & (i=0) \\
\\
\dfrac{D_{A_+}(M)\otimes_K D_{B_+}(N)}{\left(M/H^0_{A_+}(M)\right)\otimes_K\left(N/H^0_{B_+}(N)\right)} & (i=1) \\
\\
\left(D_{A_+}(M)\otimes_K H^2_{B_+}(N)\right)\oplus\left(H^2_{A_+}(M)\otimes_K D_{B_+}(N)\right) & (i=2) \\
\\
\left(D_{A_+}(M)\otimes_K H^i_{B_+}(N)\right)\oplus\left(H^i_{A_+}(M)\otimes_K D_{B_+}(N)\right) & (i>2) \\
\qquad \oplus\left(\displaystyle\bigoplus_{\substack{p+q=i+1\\ p,q\geq 2}} H^p_{A_+}(M)\otimes_K H^q_{B_+}(N)\right) &
\end{cases}
$$

特に、上の局所コホモロジーは $(p,q)\in\mathbb{N}^2$ のとり方によらない．

証明　$A_+C+B_+C = (a_1\otimes 1,\cdots,a_m\otimes 1, 1\otimes b_1,\cdots 1\otimes b_n)$ であるから、補題 3.8 より任意 $i\geq 0$ に対し

$$
\begin{aligned}
H^i_{A_+C+B_+C}(M\otimes_K N) &\cong H^i\left(\mathcal{Q}^\bullet\otimes_C (M\otimes_K N)\right) \\
&\cong H^i\left(\operatorname{Tot}\left(\mathcal{C}(a_1,\cdots,a_m;M)^\bullet\otimes_K \mathcal{C}(b_1,\cdots,b_n;N)^\bullet\right)\right)
\end{aligned}
$$

が成立する．これに Künneth の公式を適用することで

$$
H^i_{A_+C+B_+C}(M\otimes_K N) \cong \bigoplus_{p+q=i} H^p_{A_+}(M)\otimes_K H^q_{B_+}(N)
$$

が得られる．また、複体の同型

$$\begin{aligned}\mathcal{C}(a_1\otimes 1,\cdots,a_m\otimes 1;M\otimes_K N)^\bullet &\cong \mathcal{C}(a_1,\cdots,a_m;M)^\bullet\otimes_K N\\ \mathcal{C}(1\otimes b_1,\cdots,1\otimes b_n;M\otimes_K N)^\bullet &\cong M\otimes_K \mathcal{C}(b_1,\cdots,b_n;N)^\bullet\end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned}H^i_{A_+C}(M\otimes_K N) &\cong H^i_{A_+}(M)\otimes_K N\\ H^i_{B_+C}(M\otimes_K N) &\cong M\otimes_K H^i_{B_+}(N)\end{aligned}$$

が得られる．これらの同型と Mayer Vietoris 完全列 [1, 3.2.3] より、

$$\begin{array}{llll}0 \longrightarrow & H^0_{A_+}(M)\otimes_K H^0_{B_+}(N) & \longrightarrow & \left(H^0_{A_+}(M)\otimes_K N\right)\oplus\left(M\otimes_K H^0_{B_+}(N)\right)\\ \longrightarrow & H^0_{J_C(p,q)}(M\otimes_K N) & \longrightarrow & \bigoplus_{p+q=1} H^p_{A_+}(M)\otimes_K H^q_{B_+}(N)\\ \longrightarrow & \cdots & & \\ \longrightarrow & \bigoplus_{p+q=i} H^p_{A_+}(M)\otimes_K H^q_{B_+}(N) & \longrightarrow & \left(H^i_{A_+}(M)\otimes_K N\right)\oplus\left(M\otimes_K H^i_{B_+}(N)\right)\\ \longrightarrow & H^i_{J_C(p,q)}(M\otimes_K N) & \longrightarrow & \bigoplus_{p+q=i+1} H^p_{A_+}(M)\otimes_K H^q_{B_+}(N)\\ \longrightarrow & \cdots & & \end{array}$$

という長完全列が得られる．

$$\bigoplus_{p+q=1} H^p_{A_+}(M)\otimes_K H^q_{B_+}(N)\to\left(H^1_{A_+}(M)\otimes_K N\right)\oplus\left(M\otimes_K H^1_{B_+}(N)\right)$$

が自然に定義された単射であることから、短完全列

$$0\to H^0_{A_+}(M)\otimes_K H^0_{B_+}(N)\to\left(H^0_{A_+}(M)\otimes_K N\right)\oplus\left(M\otimes_K H^0_{B_+}(N)\right)\to H^0_{J_C(p,q)}(M\otimes_K N)\to 0$$

が得られ、

$$H^0_{J_C(p,q)}(M\otimes_K N)\cong\frac{\left(H^0_{A_+}(M)\otimes_K N\right)\oplus\left(M\otimes_K H^0_{B_+}(N)\right)}{H^0_{A_+}(M)\otimes_K H^0_{B_+}(N)}$$

が得られる．

次に $H^1_{J_C(p,q)}(M\otimes_K N)$ を求める．命題 3.9 と Künneth の公式より、

$$\begin{aligned}D_{A_+C\cdot B_+C}(M\otimes_K N) &\cong H^0\left((\{2\}\mathcal{T}^\bullet)^\bullet\otimes_C(M\otimes_K N)\right)\\ &\cong D_{A_+}(M)\otimes_K D_{B_+}(N)\end{aligned}$$

が得られる．よって、完全列

$$0 \to H^0_{A_+C\cdot B_+C}(M\otimes_K N) \to M\otimes_K N \to D_{A_+}(M)\otimes_K D_{B_+}(N) \to H^1_{A_+C\cdot B_+C}(M\otimes_K N) \to 0$$

が得られる． この完全列の $M \otimes_K N$ から $D_{A_+}(M) \otimes_K D_{B_+}(N)$ への射の像は $\left(M/H^0_{A_+}(M)\right) \otimes_K \left(N/H^0_{B_+}(N)\right)$ であり、

$$H^1_{J_C(p,q)}(M \otimes_K N) \cong \frac{D_{A_+}(M) \otimes_K D_{B_+}(N)}{\left(M/H^0_{A_+}(M)\right) \otimes_K \left(N/H^0_{B_+}(N)\right)}$$

が得られる．

命題 3.1 と定理 3.9 より $i \geq 2$ に対し、

$$\begin{aligned} H^i_{J_C(p,q)}(M \otimes_K N) &\cong H^i_{A_+C\cdot B_+C}(M \otimes_K N) \\ &\cong \varinjlim_{l\in\mathbb{N}} \mathrm{Ext}^{i-1}_C\left((A_+C \cdot B_+C)^l, M \otimes_K N\right) \\ &\cong H^{i-1}\left((\{2\}\mathcal{T}^\bullet)^\bullet \otimes_C (M \otimes_K N)\right) \end{aligned}$$

である．これと Künneth の公式より、$i \geq 2$ のとき

$$H^i_{J_C(p,q)}(M\otimes_K N) \cong \begin{cases} \left(D_{A_+}(M) \otimes_K H^2_{B_+}(N)\right) \oplus \left(H^2_{A_+}(M) \otimes_K D_{B_+}(N)\right) & (i = 2) \\ \left(D_{A_+}(M) \otimes_K H^i_{B_+}(N)\right) \oplus \left(H^i_{A_+}(M) \otimes_K D_{B_+}(N)\right) & (i > 2) \\ \qquad \oplus \left(\displaystyle\bigoplus_{\substack{p+q=i+1 \\ p,q\geq 2}} H^p_{A_+}(M) \otimes_K H^q_{B_+}(N)\right) & \end{cases}$$

が得られる． 証明終

$\mathbb{Z}^2$ 次数付加群 L に対し、

$$L_\Delta = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} L_{(n,n)}$$

とおく．

注意 3.14 C_Δ は A と B の Segre 積 $A\#B$ である．また、$\mathbb{Z}$ 次数付 A-加群 M、$\mathbb{Z}$ 次数付 B-加群 N に対しても

$$(M \otimes_K N)_\Delta = M\#N$$

である．$M\#N$ は次数付 $A\#B$ 加群である．

系 3.15　有限生成 $\mathbb{Z}$ 次数付 A-加群 M と有限生成 $\mathbb{Z}$ 次数付 B-加群 N の Segre 積 $M\#N$ の $(C_\Delta)_+$ に関する局所コホモロジー加群 $H^i_{(C_\Delta)_+}(M\#N)$ は次のように記述できる.

$$H^i_{(C_\Delta)_+}(M\#N) \cong \begin{cases} \dfrac{\Big(H^0_{A_+}(M)\#N\Big) \oplus \Big(M\#H^0_{B_+}(N)\Big)}{H^0_{A_+}(M)\#H^0_{B_+}(N)} & (i=0) \\[2ex] \dfrac{D_{A_+}(M)\#D_{B_+}(N)}{\Big(M/H^0_{A_+}(M)\Big)\#\Big(N/H^0_{B_+}(N)\Big)} & (i=1) \\[2ex] \Big(D_{A_+}(M)\#H^2_{B_+}(N)\Big) \oplus \Big(H^2_{A_+}(M)\#D_{B_+}(N)\Big) & (i=2) \\[2ex] \Big(D_{A_+}(M)\#H^i_{B_+}(N)\Big) \oplus \Big(H^i_{A_+}(M)\#D_{B_+}(N)\Big) & (i>2) \\ \quad \oplus \left(\displaystyle\bigoplus_{\substack{p+q=i+1 \\ p,q\geq 2}} H^p_{A_+}(M)\#H^q_{B_+}(N) \right) & \end{cases}$$

証明　$C_\Delta \subset C$ より、C_Δ 加群としての同型 $H^i_{J_C(1,1)}(M\otimes_K N) \cong H^i_{(C_\Delta)_+}(M\otimes_K N)$ が存在する. よって、

$$\begin{aligned} H^i_{J_C(1,1)}(M\otimes_K N)_\Delta &\cong H^i_{(C_\Delta)_+}(M\otimes_K N)_\Delta \\ &\cong H^i_{(C_\Delta)_+}(M\#N) \end{aligned}$$

となる. これと前定理より求めるべき同型が得られる.　**証明終**

$H^0_{A_+}(M) = H^1_{A_+}(M) = 0$ のとき、完全列

$$0 \to H^0_{A_+}(M) \to M \to D_{A_+}(M) \to H^1_{A_+}(M) \to 0$$

より、$M \cong D_{A_+}(M)$ となる. 同様に、$H^0_{B_+}(N) = H^1_{B_+}(N) = 0$ のとき、$N \cong D_{B_+}(N)$ となる. よって系 3.15 より、$i \geq 2$ に対して、Goto-Watanabe [2] による Segre 積の局所コホモロジーの計算公式

$$H^i_{(C_\Delta)_+}(M\#N) \cong \Big(M\#H^i_{B_+}(N)\Big) \oplus \Big(H^i_{A_+}(M)\#N\Big) \oplus \left(\bigoplus_{p+q=i+1} H^p_{A_+}(M)\#H^q_{B_+}(N) \right)$$

が得られる.

例 3.16　$A = K[X_1, \cdots, X_m]$, $B = K[Y_1, \cdots, Y_n]$ を体 K 上の多項式環とする．$C = A \otimes_K B$ の $J_C(1,1)$ に関する局所コホモロジー加群 $H^i_{J_C(1,1)}(C)$ を求めよう．

$i > m$ のとき、$\mathcal{C}(X_1, \cdots, X_m; A)^i = 0$ である．また、$X_1, \cdots, X_m$ は A-正則列である．従って、A の斉次極大イデアル A_+ に関する A の局所コホモロジー加群は、$i \neq m$ のとき $H^i_{A_+}(A) = 0$ である．同様に B の斉次極大イデアル B_+ に対し、$i \neq n$ のとき $H^i_{B_+}(B) = 0$ である．また、

$$D_{A_+}(A) = \begin{cases} K[X_1^{\pm 1}] & (m = 1) \\ A & (m \geq 2) \end{cases}, \qquad D_{B_+}(B) = \begin{cases} K[Y_1^{\pm 1}] & (n = 1) \\ B & (n \geq 2) \end{cases}$$

である．よって、定理 3.13 を適用することで、m と n の場合分けにより $H^i_{J_C(1,1)}(C)$ は次のように記述できる．

- $m, n = 1$ のとき

$$H^i_{J_C(1,1)}(C) \cong \begin{cases} \dfrac{K[X_1^{\pm 1}, Y_1^{\pm}]}{K[X_1, Y_1]} & (i = 1) \\ 0 & (i \neq 1) \end{cases}$$

- $m = 1$, $n \geq 2$ のとき

$$H^i_{J_C(1,1)}(C) \cong \begin{cases} \dfrac{K[X_1^{\pm 1}]}{K[X_1]} \otimes_K B & (i = 1) \\ K[X_1^{\pm 1}] \otimes_K H^n_{B_+}(B) & (i = n) \\ 0 & (i \neq 1, n) \end{cases}$$

- $m \geq 2$, $n = 1$ のとき

$$H^i_{J_C(1,1)}(C) \cong \begin{cases} A \otimes_K \dfrac{K[Y_1^{\pm 1}]}{K[Y_1]} & (i = 1) \\ H^m_{A_+}(A) \otimes_K K[Y_1^{\pm 1}] & (i = m) \\ 0 & (i \neq 1, m) \end{cases}$$

- $m, n \geq 2$, $m \neq n$ のとき

$$H^i_{J_C(1,1)}(C) \cong \begin{cases} \left(H^m_{A_+}(A) \otimes_K B\right) & (i = m) \\ \left(A \otimes_K H^n_{B_+}(B)\right) & (i = n) \\ H^m_{A_+}(A) \otimes_K H^n_{B_+}(B) & (i = m + n - 1) \\ 0 & (i \neq m, n, m + n - 1) \end{cases}$$

- $m, n \geq 2$, $m = n$ のとき

$$H^i_{J_C(1,1)}(C) \cong \begin{cases} \Big(A \otimes_K H^n_{B_+}(B)\Big) \oplus \Big(H^m_{A_+}(A) \otimes_K B\Big) & (i = m = n) \\ H^m_{A_+}(A) \otimes_K H^n_{B_+}(B) & (i = m + n - 1) \\ 0 & (i \neq m, n, m + n - 1) \end{cases}$$

謝辞

本論文を作成するにあたり、指導教官の藏野和彦教授から、丁寧かつ熱心なご指導を賜りました．ここに感謝の意を表します．また、毎回のゼミを通し、多くの知識や示唆を頂いた藏野研究室の皆様にも、併せて感謝致します．

参考文献

[1] M.P.Brodman & R.Y.Sharp, *Local Cohomology : An algebraic introduction with geometric applications*, Cambridge studies in advanced mathematics 60 (Cambridge University Press, 1986).

[2] S.Goto & K.Watanabe, *On graded rings.I.* J.Math.Soc.Japan 30 (1978), no.2, 179-213.