2006 年度蔵野ゼミ卒業論文
「ルービックキューブの群構造」

明治大学理工学部数学科
新井 宣弘
小池 拓也
嶋作 泰洋
鈴木 秀典
寺田 陽一

平成 19 年 2 月 23 日

1　序

ルービックキューブは色の付いた正方形で構成されている $3\times3\times3$ の立方体の形をした立体型ローテイティングピースパズルであり、各列 (行) ごとに自由に回転させることができます。その遊び方は、キューブを回して色をバラバラに崩し、それを再度揃えるだけというものです。そのシンプルさから最初は誰にでもすぐに完成できると思いがちになりますが、一旦揃えた場所を崩さずに他の場所を揃えることは、それは簡単なことではありません。このような奥の深さもあって、ルービックキューブは世界的な大ヒットパズルとなりました。

このルービックキューブを発明したのはハンガリーの建築学者エルノー・ルービック (Erno Rubic) です。ルービックは、考案当時はブタペスト芸術アカデミーの助教授で、基礎造形、空間と形態などの科目を担当していました。講義をしている中で、学生たちに、もっとダイナミックに空間と形態などを学ばせる方法を模索していました。そんな中ルービックは、1974 年夏、$2\times2\times2$ キューブの回転機構を完成、続いて $3\times3\times3$ 機構も開発したといわれます。そして 1975 年 1 月、特許を申請し、1976 年にハンガリーで発売されました。その後は全世界に広まり、ルービックキューブが市場に出て以後の人気は、異常と呼ぶべきもので、玩具自体も考案者ルービックも多くの賞を獲得しました。このルービックキューブが日本に紹介されたのは 1980 年のことで、他の国と同様に大流行し、その様子は一家に一個はあったといわれるほどだったそうです。

ルービックキューブが発表された後にも、$4\times4\times4$ の形のルービックリベンジや、$5\times5\times5$ の形のプロフェッサーキューブ、$2\times2\times2$ の形のポケットキューブが発売されました。そのほかにも、正四面体や正十二面体の形をしているものであったり、形状は立方体だが立方体の角が回転するスキューブ、八角柱や立方八面体の形のものといった様々なバリエーションが発売されています。また全国大会や世界大会が現在も開かれるなど、ルービックキューブの人気は今も続いています。

またルービックキューブには、単なるパズルということのほかに、あるひとつの群が対応していることがわかっています。その群の構造を調べることにより、ルービックキューブにはどのような局面があって、またその局面は何通りあるのかといったことを知ることができます。

そこで、この卒論の目的はルービックキューブがどのような群構造を持っているのかということを調べることにあります。

第 2 章では、ルービックキューブ群の解析の準備として、群の分裂する完全列と半直積構造の関係を復習します。

第 3 章ではルービックキューブの構造を調べるために必要不可欠となるある群 C と、ルービックキューブ群 G の定義をします。群 G の位数が、ルービックキューブの局面の数になっています。

第 4 章では群 C の構造を解析します。

第 5 章ではルービックキューブ群 G の構造を解析します。

この卒論の大部分は、丸山直昌先生によるルービックキューブ群の構造に関するすばらしい解説文 (「数学セミナー」 1981 年 8 月号、23p–40p) を、自分達のことばで書き直したものになっています。

2 分裂する短完全列と半直積

定義 2.1 A, B, C を群とする。(演算は積であらわす) $\xi : A \to B, \mu : B \to C$ が共に準同型で、ξ は単射、μ は全射、$\mathrm{Im}(\xi) = \mathrm{Ker}(\mu)$ が成立するとき、

$$1 \to A \xrightarrow{\xi} B \xrightarrow{\mu} C \to 1$$

を群の**短完全列**という。

また 準同型 $s : C \to B$ で $\mu \circ s = \mathrm{id}_C$ を充たすものが存在するとき、この短完全列は**分裂する**といい、s を分裂準同型写像という。

短完全列の左右の 1 は、それぞれ群 A と C の単位元を表している。よって、群の単位元を 0 あるいは e と表すときは、短完全列の左右には、0 や e が現れることに注意する。

この章の目標は B の群構造と、 A や C の群構造の関係を表すことである。

以下この章では

$$1 \to A \xrightarrow{\xi} B \xrightarrow{\mu} C \to 1$$

は分裂する短完全列とし、s は分裂準同型写像とする。

命題 2.2 $A \times C$ は、A と C の直積集合であるとする。B と $A \times C$ の間に、次のような写像を考える。

$a \in A, b \in B, c \in C$ として、

$$\begin{array}{rccc} \phi: & A \times C & \to & B \\ & (a, c) & \mapsto & a \cdot s(c) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \psi: & B & \to & A \times C \\ & b & \mapsto & (b \cdot s(\mu(b))^{-1}, \mu(b)) \end{array}$$

とする。

このとき、ϕ, ψ は互いに逆写像であり、したがって、共に全単射である。

$A \times C$ に直積群の構造を入れたとき、上の ϕ, ψ は群の準同型になるとは限らない。ϕ, ψ は、単なる写像であることに注意する。

証明 まずは　$b \cdot s(\mu(b))^{-1} \in A = \mathrm{Im}(\xi)$ であることを示す。

$A = \mathrm{Ker}(\mu)$ であるので、$\mu(b \cdot s(\mu(b))^{-1}) = 1$ がいえれば良い。

$\mu \circ s = \mathrm{id}_C$ に注意すれば、

$$\mu(b \cdot s(\mu(b))^{-1}) = \mu(b) \cdot \mu(s(\mu(b)))^{-1} = \mu(b) \cdot \mu(b)^{-1} = 1$$

が成立する。よって、$b \cdot s(\mu(b))^{-1} \in A$ が証明された。ここで、ϕ, ψ は、well-defined であることがわかった。

次に ϕ, ψ が互いに逆写像であることを示そう。そのためには、$\phi \circ \psi = \mathrm{id}_B$ と $\psi \circ \phi = \mathrm{id}_{A \times C}$ がいえればよい。

$b \in B$ に対して、

$$\phi \circ \psi(b) = \phi((b \cdot s(\mu(b))^{-1}, \mu(b))) = b \cdot s(\mu(b))^{-1} \cdot s(\mu(b)) = b$$

である。よって、$\phi \circ \psi = \mathrm{id}_B$ がいえた。

$a \in A, c \in C$ に対して、

$$\psi \circ \phi((a, c)) = \psi(a \cdot s(c)) = (a \cdot s(c) \cdot s(\mu(a \cdot s(c)))^{-1}, \mu(a \cdot s(c)))$$

である。この式の第 2 成分は

$$\mu(a \cdot s(c)) = \mu(a) \cdot \mu(s(c)) = 1 \cdot c = c$$

となる。これを利用すると第 1 成分は

$$a \cdot s(c) \cdot s(\mu(a \cdot s(c)))^{-1} = a \cdot s(c) \cdot s(c)^{-1} = a$$

となる。したがって $\psi \circ \phi((a,c)) = (a,c)$ がわかった。

よって $\psi \circ \phi = \mathrm{id}_{A\times C}$ がいえた。 証明終

定義 2.3 $a_1,\ a_2 \in A, c_1,\ c_2 \in C$ に対して、

$$(a_1,c_1) \times (a_2,c_2) \overset{\mathrm{def}}{=} \psi(\phi(a_1,c_1) \times \phi(a_2,c_2))$$

により、直積集合 $A \times C$ に演算を定義する。(ようするに、全単射 ϕ, ψ によって、B の群構造を、直積集合 $A \times C$ に導入したわけである。よって、この群構造を考えれば、全単射 ϕ, ψ は同型写像になる。)

このようにしてできた群を直積群と区別するために、$A \rtimes C$ と表し、A と C の**半直積**という。

注意 2.4 半直積における積 $(a_1,c_1) \times (a_2,c_2)$ を、μ と s を使い表してみよう。

$$\begin{aligned} & (a_1,c_1) \times (a_2,c_2) = \psi(\phi((a_1,c_1)) \times \phi((a_2,c_2)) = \psi(a_1 \cdot s(c_1) \cdot a_2 \cdot s(c_2)) \\ = \ & (a_1 \cdot s(c_1) \cdot a_2 \cdot s(c_2) \cdot s(\mu(a_1 \cdot s(c_1) \cdot a_2 \cdot s(c_2)))^{-1}), \mu(a_1 \cdot s(c_1) \cdot a_2 \cdot s(c_2))) \end{aligned}$$

である。この式の第 *2* 成分は

$$\mu(a_1 \cdot s(c_1) \cdot a_2 \cdot s(c_2)) = \mu(a_1) \cdot \mu(s(c_1)) \cdot \mu(a_2) \cdot \mu(s(c_2))$$

となり、$\mu(a_1) = \mu(a_2) = 1, \mu \circ s = \mathrm{id}_C$ なので、

$$\mu(a_1) \cdot \mu(s(c_1)) \cdot \mu(a_2) \cdot \mu(s(c_2)) = c_1 \cdot c_2$$

となる。

よって、第 *1* 成分は

$$a_1 \cdot s(c_1) \cdot a_2 \cdot s(c_2) \cdot s(\mu(a_1 \cdot s(c_1) \cdot a_2 \cdot s(c_2))^{-1}) = a_1 \cdot s(c_1) \cdot a_2 \cdot s(c_2) \cdot s(c_1 \cdot c_2)^{-1}$$

となり、

$$s(c_1 \cdot c_2)^{-1} = s(c_2)^{-1} \cdot s(c_1)^{-1}$$

なので

$$a_1 \cdot s(c_1) \cdot a_2 \cdot s(c_2) \cdot s(c_1 \cdot c_2)^{-1} = a_1 \cdot s(c_1) \cdot a_2 \cdot s(c_1)^{-1}$$

となる。

以上により

$$(a_1,c_1) \times (a_2,c_2) = (a_1 \cdot s(c_1) \cdot a_2 \cdot s(c_1)^{-1}, c_1 \cdot c_2)$$

であることがわかった。

このとき

$$\begin{array}{rccc} \rho: & C & \to & \mathrm{Aut}(A) \\ & c & \mapsto & \rho_c \end{array}$$

を考える。ただし、$\rho_c : A \to A$ は、$\rho_c(a) = s(c) \cdot a \cdot s(c)^{-1}$ で定まる群 A の自己同型である。このとき、ρ は、準同型写像である。$A \rtimes C$ は、ρ によって定まる通常の半直積と一致している。

3　ルービックキューブ群の定義

ルービックキューブは外見上 27 個の小 6 面体が集まった形をしている。このうち 8 個は自分自身の 6 面のうち 3 面を外に向け、12 個は 2 面を外に向け、6 個は 1 面を外に向けている。それぞれを **3** 面体、**2** 面体、**1** 面体 と呼ぶ。

ルービックキューブで、表面に出ている 26 個のピースは、全て異なったものであることに注意する。

さらに、各面に次のように名前をつけておく。

F : キューブに向かって正面の面で、1 面体は黄色
B : キューブに向かって奥の面で、1 面体は緑色
R : キューブに向かって右の面で、1 面体はオレンジ色
L : キューブに向かって左の面で、1 面体は赤色
U : キューブに向かって上の面で、1 面体は白色
D : キューブに向かって下の面で、1 面体は青色

定義 3.1　2 面体、3 面体を 6 面の色がそろった状態から一度取り外して、2 面体は 2 面体の場所のどこかに、3 面体は 3 面体の場所のどこかに付け直してできる局面全体を C とする。また、$c_1 \in C$ は、全ての面の色がそろった局面とする。

注意 3.2　2 面体の場所の入れ替えは 12! 通りで、それぞれ向きの取り方が 2 通りなので、2 面体の付け方は $12! \times 2^{12}$ 通り。3 面体の場所の入れ替えは 8! 通りで、それぞれ向きの取り方が 3 通りなので、3 面体の付け方は $8! \times 3^8$ 通り。
よって集合 C の元の個数は

$$\begin{aligned} {}^\sharp C &= 12! \times 2^{12} \times 8! \times 3^8 \\ &= 2^{29} \times 3^{15} \times 5^3 \times 7^2 \times 11 \\ &= 5\text{ 垓 }1902\text{ 京 }4039\text{ 兆 }2938\text{ 億 }7827\text{ 万 }2000 \end{aligned}$$

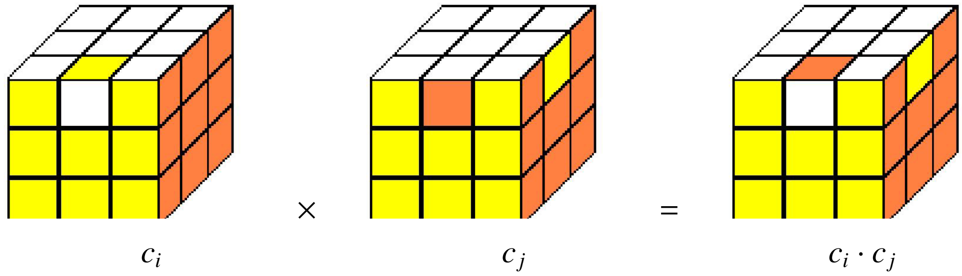
である。

定義 3.3 $c_i, c_j \in C$ に対して $c_i \cdot c_j$ を

$$c_i \cdot c_j \stackrel{\text{def}}{=} c_1 \text{から} c_i \text{を作る操作を} c_j \text{に施してできる局面}$$

と定める。この $\cdot$ は C 上の演算になる。

例 3.4 演算の例



命題 3.5 定義 3.3 で定めた演算で C は群になる。

証明 まず、結合法則を検証する。

$$c_j \cdot c_k = c_1 \text{から} c_j \text{を作る操作を} c_k \text{に施してできる局面}$$

なので

$c_i{\cdot}(c_j{\cdot}c_k) = c_k$に c_1から c_jを作る操作を施し、さらに c_1から c_iを作る操作を施した局面

である。一方

$$(c_i \cdot c_j) \cdot c_k = c_1 \text{から} c_i \cdot c_j \text{を作る操作を} c_k \text{に施してできる局面}$$

であるが、

$$c_i \cdot c_j = c_1 \text{から} c_i \text{を作る操作を} c_j \text{に施してできる局面}$$

なので c_1から $c_i \cdot c_j$ を作る操作というのは

c_1から c_jを作る操作を施した後さらに c_1から c_iを作る操作を施す操作

になる。よって、

$(c_i{\cdot}c_j){\cdot}c_k = c_k$に c_1から c_jを作る操作を施し、さらに c_1から c_iを作る操作を施した局面

である。よって、

$$c_i \cdot (c_j \cdot c_k) = (c_i \cdot c_j) \cdot c_k$$

が成立する。以上より結合法則は成り立つ。

次に、単位元について考える。

$$\begin{aligned} c_i \cdot c_1 &= c_1 \text{に } c_1 \text{から } c_i \text{を作る操作を施してできる局面} \\ &= c_i \end{aligned}$$

が成立する。また、

$$\begin{aligned} c_1 \cdot c_i &= c_i \text{に } c_1 \text{から } c_1 \text{を作る操作を施してできる局面} \\ &= c_i \end{aligned}$$

である。よって C の単位元は c_1 である。

最後に、逆元の存在について議論する。

$c_i \in C$ に対して c_i' を

$$c_i' \overset{\text{def}}{=} c_i \text{を } c_1 \text{に戻す操作を } c_1 \text{に施してできる局面}$$

とすると、

$$c_i' \cdot c_i = c_1 \text{から } c_i' \text{を作る操作を } c_i \text{に施してできる局面}$$

であり、c_i' の定義から $c_i' \cdot c_i = c_1$ である。さらにこの両辺に左から c_i をかけると

$$c_i \cdot (c_i' \cdot c_i) = c_i \cdot c_1$$

を得る。よって

$$(c_i \cdot c_i') \cdot c_i = c_i$$

が成立する。C では

$$c_k \cdot c_i = c_i \Rightarrow c_k = c_1$$

が成り立つことから、

$$c_i \cdot c_i' = c_1$$

となる。よって c_i' が c_i の逆元である。

以上より C は群である。 証明終

ここで $\mathbf{f}, \mathbf{b}, \mathbf{r}, \mathbf{l}, \mathbf{u}, \mathbf{d} \in C$ を次のように定義する。

$\mathbf{f}$: c_1の面 F をキューブの外側から見て時計回りに 90°回転させてできる局面
$\mathbf{b}$: c_1の面 B をキューブの外側から見て時計回りに 90°回転させてできる局面
$\mathbf{r}$: c_1の面 R をキューブの外側から見て時計回りに 90°回転させてできる局面
$\mathbf{l}$: c_1の面 L をキューブの外側から見て時計回りに 90°回転させてできる局面
$\mathbf{u}$: c_1の面 U をキューブの外側から見て時計回りに 90°回転させてできる局面
$\mathbf{d}$: c_1の面 D をキューブの外側から見て時計回りに 90°回転させてできる局面

定義 3.6 C の部分群 G を

$$G \overset{\text{def}}{=} < \mathbf{f}, \mathbf{b}, \mathbf{r}, \mathbf{l}, \mathbf{u}, \mathbf{d} >$$

で定める。この G をルービックキューブ群という。(ただし、$< \cdots >$ は、$\cdots$ で生成された群を表すものとする。)
群 G の位数は、c_1 に対して6つの面の回転を繰り返して出てくる局面の数に等しい。

4 群 C の解析

命題 4.1 C の部分集合 C_2, C_3 を

$$C_2 \overset{\text{def}}{=} \{c \in C \mid c \text{ の 3 面体は、} c_1 \text{ と同じ状態}\}$$

$$C_3 \overset{\text{def}}{=} \{c \in C \mid c \text{ の 2 面体は、} c_1 \text{ と同じ状態}\}$$

とすると、C_2, C_3 は C の部分群になる。

証明 注意 3.2 より C は有限群なので、C_2 や C_3 が演算で閉じていることだけを示せばよい。
　$c_i, c_j \in C_2$ とすると、c_1 から c_i を作る操作も、c_1 から c_j を作る操作も 3 面体を全くいじらないから

$$c_i \cdot c_j \in C_2$$

である。
C_3 についても同様に演算で閉じていることがわかる。　証明終

命題 4.2 $C \simeq C_2 \times C_3$

証明 証明にあたって、$c_i \in C_2, c_j \in C_3$ について

$$c_i \cdot c_j = c_j \cdot c_i$$

であることに注意する。
　写像 $\pi : C_2 \times C_3 \to C$ を

$$\pi((c_i, c_j)) = c_i \cdot c_j$$

で定めると、任意の $(c_i, c_j), (c_i', c_j') \in C_2 \times C_3$ について

$$\begin{aligned}
\pi((c_i, c_j) \cdot (c_i', c_j')) &= \pi((c_i \cdot c_i', c_j \cdot c_j')) \\
&= (c_i \cdot c_i') \cdot (c_j \cdot c_j') \\
&= (c_i \cdot c_j) \cdot (c_i' \cdot c_j') \\
&= \pi((c_i, c_j)) \cdot \pi((c_i', c_j'))
\end{aligned}$$

が成立する。よってこの写像 π は準同型写像である。
次に、単射性について調べる。
$(c_i, c_j) \in \mathrm{Ker}(\pi)$ とすると

$$\pi((c_i, c_j)) = c_i \cdot c_j = c_1 \tag{1}$$

であるが、$c_i \neq c_1$ と仮定すると、$c_i \cdot c_j$ の 2 面体は動いてしまっている。これは上の式 (1) に矛盾する。よってこの時 $c_i = c_1$ となる。同様に $c_j = c_1$ も言えて

$$\mathrm{Ker}(\pi) = \{(c_1, c_1)\}$$

である。以上より π は単射であることがわかった。
次に、全射性について調べる。
$c_i \in C$ に対して、

$c_{i_2} \overset{\mathrm{def}}{=} c_1$から$c_i$を作る操作を2面体のみに施し、3面体は全くいじらないでできる局面

$c_{i_3} \overset{\mathrm{def}}{=} c_1$から$c_i$を作る操作を3面体のみに施し、2面体は全くいじらないでできる局面

とすると

$$\pi((c_{i_2}, c_{i_3})) = c_{i_2} \cdot c_{i_3} = c_i$$

が成立する。よって π は全射である。
以上より π は同型写像で、$C \simeq C_2 \times C_3$ であることが、証明された。　　証明終

これ以降、ルービックキューブの 2 面体がある 12 個の 場所、3 面体がある 8 個の 場所 に適当に番号をつけることにする。

ここで、我々はルービックキューブの 2 面体や 3 面体のピースに番号をつけるのではなく、あくまでも 場所 に番号をつけていることに注意する。例えば面 F・面 R・面 U の角の 3 面体の場所を 1、面 B・面 R・面 U の角の 3 面体の場所を 2、. . . という具合である。

また、$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ を $\mathbb{Z}_2$、$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ を $\mathbb{Z}_3$ と書くことにする。

定義 4.3 $(\mathbb{Z}_2)^{12} \ni \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{12})$、$(\mathbb{Z}_3)^8 \ni \beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_8)$ に対して

写像 $\xi_2 : (\mathbb{Z}_2)^{12} \to C_2$、$\xi_3 : (\mathbb{Z}_3)^8 \to C_3$を

$\xi_2(\alpha) \overset{\mathrm{def}}{=} c_1$に対して次の操作を施してできる局面

- $\alpha_i = 0$ である i に関しては、場所 i にある 2 面体は、場所も向きも替えない
- $\alpha_i = 1$ である i に関しては、場所 i にある 2 面体は、場所は替えずに向きだけを替える
- 3 面体は全く動かさない

$\xi_3(\beta) \overset{\mathrm{def}}{=} c_1$に対して次の操作を施してできる局面

- $\beta_j = 0$ である j に関しては、場所 j にある 3 面体は、場所も向きも替えない
- $\beta_j = 1$ である j に関しては、場所 j にある 3 面体を、場所は替えずに向きを頂点を外から見て時計回りに 120°回す
- $\beta_j = -1$ である j に関しては、場所 j にある 3 面体を、場所は替えずに向きを頂点を外から見て反時計回りに 120°回す
- 2 面体は全く動かさない

で定める。
また、写像 $\mu_2 : C_2 \to \mathfrak{S}_{12}$、$\mu_3 : C_3 \to \mathfrak{S}_8$ を

$$\mu_2(c_k) \overset{\mathrm{def}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & 12 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{12} \end{pmatrix}$$

$$\mu_3(c_\ell) \overset{\mathrm{def}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & 8 \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_8 \end{pmatrix}$$

で定める。
ただし c_1 から c_k を作る操作で場所 i にあった 2 面体が移った場所を a_i、c_1 から c_ℓ を作る操作で場所 j にあった 3 面体が移った場所を b_j とした。

命題 4.4 上で定めた $\xi_2, \xi_3, \mu_2, \mu_3$ は準同型写像であり

$$0 \to (\mathbb{Z}_2)^{12} \xrightarrow{\xi_2} C_2 \xrightarrow{\mu_2} \mathfrak{S}_{12} \to e \qquad (ア)$$

$$0 \to (\mathbb{Z}_3)^{8} \xrightarrow{\xi_3} C_3 \xrightarrow{\mu_3} \mathfrak{S}_{8} \to e \qquad (イ)$$

は完全列である。

証明 (ア) について示す。
$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{12})$、$\alpha' = (\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_{12}) \in (\mathbb{Z}_2)^{12}$ とする。

まず、ξ_2 が準同型写像であることを示す。

$$\xi_2(\alpha+\alpha') = \xi_2(\alpha_1+\alpha'_1, \alpha_2+\alpha'_2, \ldots, \alpha_{12}+\alpha'_{12})$$

$= c_1$に対して次の操作を施してできる局面

- $\alpha_i + \alpha'_i = 0$ である i に関しては、場所 i にある 2 面体は場所も向きも替えない
- $\alpha_i + \alpha'_i = 1$ である i に関しては、場所 i にある 2 面体を場所は替えずに向きだけを替える
- 3 面体は全く動かさない

であるから $\xi_2(\alpha+\alpha')$ の 2 面体は c_1 と比べて

$\alpha_i = \alpha'_i$である i については、場所 i にある 2 面体は全く替わらない
$\alpha_i \neq \alpha'_i$である i については、場所 i にある 2 面体は向きが替わっている

が成立する。一方

$\xi_2(\alpha)\cdot\xi_2(\alpha') = c_1$から$\xi_2(\alpha)$ を作る操作を$\xi_2(\alpha')$ に施してできる局面

なので、$\xi_2(\alpha)\cdot\xi_2(\alpha')$ の 2 面体は

$\alpha_i = \alpha'_i = 0$ である i については、場所 i にある 2 面体は全く替わらない
$\alpha_i = \alpha'_i = 1$ である i については、場所 i にある 2 面体は 2 回向きを替えるので元に戻る
$\alpha_i \neq \alpha'_i$である i については、場所 i にある 2 面体は 1 回向きを替える

となっている。従って $\xi_2(\alpha)\cdot\xi_2(\alpha')$ の 2 面体は c_1 と比べて

$\alpha_i = \alpha'_i$である i については、場所 i にある 2 面体は全く替わらない
$\alpha_i \neq \alpha'_i$である i については、場所 i にある 2 面体は向きが替わっている

が成立する。よって全ての 2 面体の向きが同じなので

$$\xi_2(\alpha+\alpha') = \xi_2(\alpha)\cdot\xi_2(\alpha')$$

が成立し、ξ_2 は準同型写像である。
次に、ξ_2 の単射性を示そう。
$\alpha \in \mathrm{Ker}(\xi_2)$ とする。もし $\alpha_i = 1$ を充たす i があれば、その i に関しては、場所 i にある 2 面体の向きは替わってしまい、$\alpha \in \mathrm{Ker}(\xi_2)$ に矛盾。よって

$$\mathrm{Ker}(\xi_2) = \{(0,0,\ldots,0)\}$$

となり、ξ_2 は単射である。
　次に、μ_2 が準同型写像であることを示そう。
　$c_k, c'_k \in C_2$ を取り

$$\mu_2(c_k) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & 12 \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_{12} \end{pmatrix}$$

$$\mu_2(c'_k) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & 12 \\ q_1 & q_2 & \cdots & q_{12} \end{pmatrix}$$

とする。このとき

$$\begin{aligned} \mu_2(c_k) \cdot \mu_2(c'_k) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & 12 \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_{12} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & 12 \\ q_1 & q_2 & \cdots & q_{12} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & 12 \\ p_{q_1} & p_{q_2} & \cdots & p_{q_{12}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である。一方

$$c_k \cdot c'_k = c_1 \text{から } c_k \text{を作る操作を } c'_k \text{に施してできる局面}$$

なので、c_1 から $c_k \cdot c'_k$ を作る時、場所 i にある 2 面体はまず場所 q_i に移り、その後さらに場所 p_{q_i} に移る。従って

$$\mu_2(c_k \cdot c'_k) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & 12 \\ p_{q_1} & p_{q_2} & \ldots & p_{q_{12}} \end{pmatrix}$$

であり、

$$\mu_2(c_k) \cdot \mu_2(c'_k) = \mu_2(c_k \cdot c'_k)$$

なので、μ_2 は準同型写像である。
　μ_2 の全射性は明らかである。
　$\mathrm{Im}(\xi_2) = \mathrm{Ker}(\mu_2)$ であることを示す。
　$c_k \in \mathrm{Im}(\xi_2)$ はどのピースも場所は動かしていないから、

$$\mu_2(c_k) = e$$

であり、$c_k \in \mathrm{Ker}(\mu_2)$ である。よって $\mathrm{Im}(\xi_2) \subseteq \mathrm{Ker}(\mu_2)$ が成立する。逆に $c_k \in \mathrm{Ker}(\mu_2)$ とすると、c_1 から c_k を作る操作ではどの 2 面体の場所も動かさないから

$$c_k \in \mathrm{Im}(\xi_2)$$

である。よって $\mathrm{Ker}(\mu_2) \subseteq \mathrm{Im}(\xi_2)$ も成り立つので

$$\mathrm{Im}(\xi_2) = \mathrm{Ker}(\mu_2)$$

である。

以上より (ア) は完全列である。

同様にして (イ) についても示される。　証明終

この命題4.4 と命題4.2 から、

$$0 \to (\mathbb{Z}_2)^{12} \times (\mathbb{Z}_3)^8 \xrightarrow{\xi_2 \times \xi_3} C \xrightarrow{\mu_2 \times \mu_3} \mathfrak{S}_{12} \times \mathfrak{S}_8 \to e \tag{ウ}$$

という C の完全列が得られる。

定義 4.5 次の様に写像 s_2, s_3 を定める。

$$s_2 \colon \mathfrak{S}_{12} \longrightarrow C_2$$

$$s_3 \colon \mathfrak{S}_8 \longrightarrow C_3$$

各 2 面体の場所に対して 2 面の場所うち一方の場所には甲、他方の場所には乙と名前を付ける。2 面体のピースの面に甲、乙と書き込むのではなく、それぞれの 2 面体の二つの面の場所を甲、乙と指定するのである。(このような方法は 2^{12} 通りあるが、そのうちの任意の一つを選ぶ。)

$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & 12 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{12} \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_{12}$、$i = 1, 2, \dots, 12$ に対して、c_1 の第 i 番目の場所の 2 面体は第 a_i 番目の場所に、甲の文字は甲の文字に重なるように付け替え、3 面体は c_1 の状態のままであるような C_2 の元を $s_2(a)$ と定める。

s_3 についても同様に、各 3 面体の場所に対して、3 面の一つの場所に甲と名前を付け、時計回りに乙、丙と名前を付ける。3 面体のピースの面に甲、乙、丙と書き込むのではなく、それぞれの 3 面体の三つの面の場所を甲、乙、丙と指定するのである。(このような方法は 3^8 通りあるが、そのうちの任意の一つを選ぶ。)

$b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & 8 \\ b_1 & b_2 & \dots & b_8 \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_8$、$j = 1, \dots, 8$ に対して c_1 の第 j 番目の場所の 3 面体は第 b_j 番目の場所に、甲の文字は甲の文字に重なるように付け替え、2 面体は c_1 の状態のままであるような C_3 の元を $s_3(b)$ と定める。

命題 4.6 次の短完全列 (ア)、(イ) は、それぞれ分裂準同型 s_2, s_3 により分裂する。

$$0 \to (\mathbb{Z}_2)^{12} \xrightarrow{\xi_2} C_2 \xrightarrow{\mu_2} \mathfrak{S}_{12} \to e \tag{ア}$$

$$0 \to (\mathbb{Z}_3)^{8} \xrightarrow{\xi_3} C_3 \xrightarrow{\mu_3} \mathfrak{S}_{8} \to e \tag{イ}$$

証明 (ア): s_2 が準同型であり、$\mu_2 \cdot s_2 = \mathrm{id}_{\mathfrak{S}_{12}}$ であることを示せばよい。

まず、準同型であることを示す。$a, b \in \mathfrak{S}_{12}$ とする。$s_2(a)s_2(b)$ は、3 面体は c_1 の状態と同じである。また、c_1 の場所 i の 2 面体は $s_2(b)$ では場所 b_i にある。積の定義より、$s_2(b)$ の場所 b_i の 2 面体は $s_2(a)s_2(b)$ では場所 a_{b_i} にある。さらに、場所 i

の甲の面は $s_2(b)$ では場所 b_i の甲の面にあり、$s_2(a)s_2(b)$ では場所 a_{b_i} の甲の面にある。よって $s_2(a)s_2(b) = s_2(ab)$ である。これで、s_2 が準同型であることがわかった。

次に、$\mu_2 \cdot s_2 = \mathrm{id}_{\mathfrak{S}_{12}}$ であることを示す。$a \in \mathfrak{S}_{12}$ に対して $s_2(a)$ では、3 面体は c_1 のままである。2 面体については、c_1 の場所 i の 2 面体は、$s_2(a)$ では場所 a_i にある。よって、$\mu_2 s_2(a) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & 12 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{12} \end{pmatrix} = a$ である。したがって、$\mu_2 \cdot s_2 = \mathrm{id}_{\mathfrak{S}_{12}}$ となる。(ア) は分裂することがわかった。

(イ):s_3 が準同型であり、$\mu_3 \cdot s_3 = id_{\mathfrak{S}_8}$ であることを示せばよい。

まず、準同型であることを示す。$a, b \in \mathfrak{S}_8$ とする。$s_3(a)s_3(b)$ は、２面体は c_1 の状態と同じである。また、c_1 の場所 j の 3 面体は $s_3(b)$ では場所 b_j にある。積の定義より、$s_3(b)$ の場所 b_j の 3 面体は $s_3(a)s_3(b)$ では場所 a_{b_j} にある。さらに、場所 j の甲の面は $s_3(b)$ で場所 b_j の甲の面にいき、$s_3(a)s_3(b)$ では場所 a_{b_j} の甲の面にいく。乙の面や丙の面も同様である。よって $s_3(a)s_3(b) = s_3(ab)$ である。これで、s_3 が準同型であることがわかった。

次に、$\mu_3 \cdot s_3 = \mathrm{id}_{\mathfrak{S}_8}$ であることを示す。$c \in \mathfrak{S}_8$ に対して、$s_3(a)$ では、２面体は c_1 の状態のままである。3 面体については、c_1 の場所 j の 3 面体は、$s_3(a)$ では場所 a_j にある。よって、$\mu_3 s_3(a) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & 8 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_8 \end{pmatrix} = a$ である。したがって、$\mu_3 s_3 = id_{\mathfrak{S}_8}$ である。(イ) は分裂することがわかった。 証明終

注意 4.7 (ア)、(イ) と命題 2.2 より、それぞれ次の同型写像が存在する。

$$\psi_2 \colon C_2 \longrightarrow (\mathbb{Z}_2)^{12} \rtimes \mathfrak{S}_{12}$$
$$\psi_3 \colon C_3 \longrightarrow (\mathbb{Z}_3)^{8} \rtimes \mathfrak{S}_{8}$$

ここで、$(\alpha, a), (\beta, b) \in (\mathbb{Z}_2)^{12} \rtimes \mathfrak{S}_{12}$ に対して、

$$(\alpha, a) \times (\beta, b) = (\alpha + (s_2(a)\beta s_2(a)^{-1}), ab)$$

であった。また、$(\alpha, a), (\beta, b) \in (\mathbb{Z}_3)^{8} \rtimes \mathfrak{S}_{8}$ に対して、

$$(\alpha, a) \times (\beta, b) = (\alpha + (s_3(a)\beta s_3(a)^{-1}), ab)$$

であった。

命題 4.8 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{12}) \in (\mathbb{Z}_2)^{12}$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_8) \in (\mathbb{Z}_3)^8$ とする。$(\alpha, a) \in (\mathbb{Z}_2)^{12} \rtimes \mathfrak{S}_{12}$, $(\beta, b) \in (\mathbb{Z}_3)^8 \rtimes \mathfrak{S}_8$ に対して、

$$s_2(a)\alpha s_2(a)^{-1} = (\alpha_{a^{-1}(1)}, \dots, \alpha_{a^{-1}(12)})$$
$$s_3(b)\beta s_3(b)^{-1} = (\beta_{b^{-1}(1)}, \dots, \beta_{b^{-1}(8)})$$

が成立する。

証明　$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{12}) \in (\mathbb{Z}_2)^{12}, a^{-1}, a \in \mathfrak{S}_{12}$ とする。

$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & 12 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{12} \end{pmatrix}, a^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & 12 \\ a'_1 & a'_2 & \dots & a'_{12} \end{pmatrix}$ とすれば、$\alpha_{a^{-1}(i)} = \alpha_{a'_i}$ である。

場所 i の 2 面体は $s_2(a)^{-1}$ で場所 a'_i に向きを変えずに移る。その後 α によりその 2 面体は、$\alpha_{a'_i} = 0$ なら向きを変えず、$\alpha_{a'_i} = 1$ なら向きを変える。更にその 2 面体は $s_2(a)$ により、場所 i に向きを変えずに移る。つまり、場所 i の 2 面体は $s_2(a)\alpha s_2(a)^{-1}$ によって、$\alpha_{a'_i} = 0$ なら向きを変えず、$\alpha_{a'_i} = 1$ なら向きを変える。このことから、$s_2(a)\alpha s_2(a)^{-1} = (\alpha_{a'_i}, \dots, \alpha_{a'_{12}})$ がわかった。

同様に $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_8) \in (\mathbb{Z}_3)^8$ $b, b^{-1} \in \mathfrak{S}_8$ とする。

$b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & 8 \\ b_1 & b_2 & \dots & b_8 \end{pmatrix}, b^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & 8 \\ b'_1 & b'_2 & \dots & b'_8 \end{pmatrix}$ とすれば、$\beta_{b^{-1}(i)} = \beta_{b'_j}$ である。

場所 j の 3 面体は $s_3(b)^{-1}$ で場所 b'_j に向きを変えずに移る。その後 β により、その 3 面体は、$\beta_{b'_j} = 0$ なら向きを変えず、$\beta_{b'_j} = 1$ なら時計回りに 120° 回し、$\beta_{b'_j} = -1$ なら反時計回りに 120° 回す。更にその 3 面体は $s_3(b)$ により、場所 j に向きを変えずに移る。つまり、場所 j の 3 面体は $s_3(b)\beta s_3(b)^{-1}$ によって、$\beta_{b'_j} = 0$ なら向きを変えず、$\beta_{b'_j} = 1$ なら時計回りに 120° 回し、$\beta_{b'_j} = -1$ なら反時計回りに 120° 回す。このことから、$s_3(b)\beta s_3(b)^{-1} = (\beta_{b'_1}, \dots, \beta_{b'_8})$ がわかった。　証明終

命題 4.8 のような半直積構造をリース (Wreath) 積という。

このことより、$C = C_2 \times C_3$ に対して

$$\begin{aligned} \xi &= \xi_2 \times \xi_3 \colon (\mathbb{Z}_2)^{12} \times (\mathbb{Z}_3)^8 \longrightarrow C \\ \mu &= \mu_2 \times \mu_3 \colon C \longrightarrow \mathfrak{S}_{12} \times \mathfrak{S}_8 \\ s &= s_2 \times s_3 \colon \mathfrak{S}_{12} \times \mathfrak{S}_8 \longrightarrow C \end{aligned}$$

が定義され、

$$0 \longrightarrow (\mathbb{Z}_2)^{12} \times (\mathbb{Z}_3)^8 \xrightarrow{\xi} C \xrightarrow{\mu} \mathfrak{S}_{12} \times \mathfrak{S}_8 \longrightarrow e$$

は、分裂する短完全列であることがわかった。(つまり $\mu \cdot s = \mathrm{id}_{\mathfrak{S}_{12} \times \mathfrak{S}_8}$ である。）

5　ルービックキューブ群の構造

定義 5.1　G をルービックキューブ群とする。$SG = \mu(G), KG = \mathrm{Ker}(\mu) \cap G$ と定める。

命題 5.2　次の列は短完全列である。

$$0 \to KG \xrightarrow{\eta} G \xrightarrow{\nu} SG \to e$$

ただし、$\nu = \mu|_G$、$\eta = \xi|_{KG}$ とする。

証明　ξ は単射であるので、η も単射である。$SG = \mu(G)$ より、ν は全射である。$\mathrm{Ker}(\nu) = \mathrm{Ker}(\mu) \cap G = KG = \mathrm{Im}(\eta)$ より、この列は完全列である。　証明終

定義 5.3 $KG_2 = KG \cap (\mathbb{Z}_2)^{12}$, $KG_3 = KG \cap (\mathbb{Z}_3)^8$ とおく。

注意 5.4 以下で見るように、$KG = KG_2 \times KG_3$ が成立する。

$KG_2 \times KG_3 \subset KG \subset (\mathbb{Z}_2)^{12} \times (\mathbb{Z}_3)^8$ であるので、$KG \subset KG_2 \times KG_3$ を示せばよい。

KG の任意の元 (α, β) に対して、

$$4(\alpha, \beta) = (0, \beta) \in KG_3$$
$$3(\alpha, \beta) = (\alpha, 0) \in KG_2$$

が成立する。よって、$KG \subset KG_2 \times KG_3$ が成立する。したがって、$KG = KG_2 \times KG_3$ が成立する。

定理 5.5 次が成立する。

(1) $SG = (\mathfrak{S}_{12} \times \mathfrak{S}_8) \cap \mathfrak{A}_{20}$, (ただし、$\mathfrak{S}_{12} \times \mathfrak{S}_8$ は自然に $\mathfrak{S}_{20}$ の部分群と考える。)

(2) $KG_2 = \{(\alpha_1, \ldots, \alpha_{12}) \mid \sum_{i=1}^{12} \alpha_i = 0\}$, $KG_3 = \{(\beta_1, \ldots, \beta_8) \mid \sum_{j=1}^{8} \beta_j = 0\}$.

(3) $s(SG) \subset G$.

証明 (1) を示す。まず、

$A = (\mathfrak{S}_{12} \times \mathfrak{S}_8) \cap \mathfrak{A}_{20}$ とおく。

ここで、

$$A = \{(\sigma, \tau) \in \mathfrak{S}_{12} \times \mathfrak{S}_8 \mid \mathrm{sgn}(\sigma) = \mathrm{sgn}(\tau)\}$$

であることに注意する。

まず、$SG \subset A$ を示す。$\mu(\mathbf{u}) = (\sigma, \tau)$ としよう。σ, τ はともに長さ 4 の巡回置換であるので、σ, τ は共に奇置換である。よって、$(\sigma, \tau) \in \mathfrak{A}_{20}$ である。したがって、$(\sigma, \tau) = \mu(\mathbf{u}) \in A$ が言える。同様に、$\mu(\mathbf{d}), \ldots, \mu(\mathbf{b}) \in A$ となる。$G = \langle \mathbf{u}, \ldots, \mathbf{b} \rangle$ より、$\mu(G) \subset A$ であるので、$SG \subset A$ であることがわかった。

次に、$SG \supset A$ を示そう。$\sigma' \in \mathfrak{S}_{12} \setminus \mathfrak{A}_{12}$, $\tau' \in \mathfrak{S}_8 \setminus \mathfrak{A}_8$ をとる。このとき、

$$\mu(u)(\sigma', \tau') = (\sigma\sigma', \tau\tau') \in \mathfrak{A}_{12} \times \mathfrak{A}_8$$

が成立する。よって、A は $\mathfrak{A}_{12} \times \mathfrak{A}_8$ の元と $\mu(\mathbf{u})$ で生成されることがわかる。

$\mu(\mathbf{u}) \in A$ であることは既に示したので、あと、$\mathfrak{A}_{12} \times e \subset SG$ と $e \times \mathfrak{A}_8 \subset SG$ を示せば、$SG \supset A$ がわかる。

$\mathfrak{A}_{12} \times e \subset SG$ を示そう。

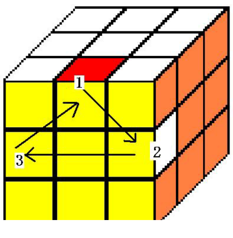


図 1

図 1 は同じ面にある 3 つの 2 面体 1、2、3 の位置を巡回させたものである。(その向きはどのようにとってもよい。) 図 1 の局面を、$V \in C$ とする。そのとき、

$$V = \mathbf{u}^2 \cdot \mathbf{f} \cdot \mathbf{r}^{-1} \cdot \mathbf{l} \cdot \mathbf{u}^2 \cdot \mathbf{l}^{-1} \cdot \mathbf{r} \cdot \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}^2 \in G$$

が成立する。次に、2 面体の任意に選んだ 3 つの場所を i, j, k として、$\big((i, j, k), e\big) \in \mathfrak{S}_{12} \times \mathfrak{S}_8$ が、SG の元であることを示したい。3 つの 2 面体 i, j, k は、ある元 $g \in G$ で、それぞれ $1, 2, 3$ の場所に移すことが出来る。ただし、g は, その 3 つの 2 面体の場所以外はどのように動かしてもよいものとする。そのことは、非常に簡単に証明できるので、ここでは省略する。

このとき、$g^{-1} \cdot V \cdot g$ は、場所 i, j, k の 2 面体を、それぞれ場所 j, k, i に移して、他の 2 面体、3 面体は動かさない。よって、$((i, j, k), e) \in SG$ であることがわかった。

次に、$e \times \mathfrak{A}_8 \subset SG$ を示す。

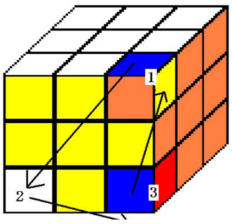


図 2

図 2 は同じ面にある 3 つの 3 面体 1、2、3 の位置を巡回させたものである。図 2 の局面を $W \in C$ とする。

$$W = \mathbf{f} \cdot (\mathbf{r}^{-1} \cdot \mathbf{u}^{-1} \cdot \mathbf{r} \cdot \mathbf{u})^3 \cdot \mathbf{f}^{-1} \cdot (\mathbf{r}^{-1} \cdot \mathbf{u}^{-1} \cdot \mathbf{r} \cdot \mathbf{u})^3 \in G$$

である。3 面体の任意に選んだ 3 つの場所を、i, j, k とすると、$(e, (i, j, k)) \in SG$ であることは、上と同様なやり方で示せる。

交代群は長さ 3 の巡回置換で生成されるので、$\mathfrak{A}_{12} \times e \subset SG$ と $e \times \mathfrak{A}_8 \subset SG$ が示された。以上により、$SG = (\mathfrak{S}_{12} \times \mathfrak{S}_8) \cap \mathfrak{A}_{20}$ が示された。

次に (2) を証明しよう。ここで

$$\begin{aligned} K_2 &= \{(\alpha_1, \ldots, \alpha_{12}) \in (\mathbb{Z}_2)^{12} \mid \sum_{i=1}^{12} \alpha_i = 0\} \\ K_3 &= \{(\beta_1, \ldots, \beta_8) \in (\mathbb{Z}_3)^8 \mid \sum_{j=1}^{8} \beta_j = 0\} \end{aligned}$$

とおく。

まずはじめに、$KG_2 \supset K_2$ を示す。$1 \leq i \neq j \leq 12$ に対して、第 i 成分、第 j 成分が 1 で、残りは 0 であるベクトルを

$$e_{ij} = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$$

とおくと、

$$\{e_{ij} \mid 1 \le i \neq j \le 12\}$$

は K_2 の生成元である。

今、２面体の場所 k, l が、下図のような位置にあったとする。

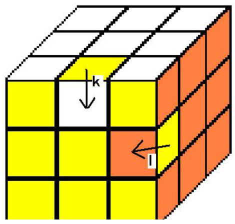


図３

この局面は、e_{kl} である。このとき、

$$e_{kl} = \mathbf{r}^{-2} \cdot \mathbf{b}^{-1} \cdot \mathbf{u}^{2} \cdot \mathbf{r} \cdot \mathbf{l}^{-1} \cdot \mathbf{f} \cdot \mathbf{r} \cdot \mathbf{l}^{-1} \cdot \mathbf{d} \cdot \mathbf{r} \cdot \mathbf{l}^{-1} \cdot \mathbf{d} \cdot \mathbf{r} \cdot \mathbf{l}^{-1} \cdot \mathbf{b}^{2} \cdot \mathbf{r}^{-1} \cdot \mathbf{l} \cdot \mathbf{d} \cdot \mathbf{r}^{-1} \cdot \mathbf{l} \cdot \mathbf{f} \cdot \mathbf{r}^{-1} \cdot \mathbf{l} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{r}^{2} \in G$$

である。

次に、一般に $e_{ij} \in G$ を示そう。ここで場所 i, j, k, l が図４の位置にあったとする。(i, j が別の場所である場合も、以下と全く同様な方法で証明される。)

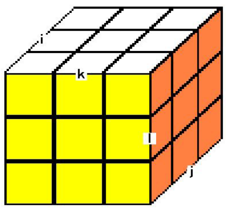


図４

e_{lj} はルービックキューブを場所 j, l が場所 k, l に重なるようにに持ち替えてから e_{kl} を行い、再び白の１面体が上に、黄色の１面体が正面にくるように持ち直したものである。よって、$e_{lj} \in G$ である。同様に　$e_{ik} \in G$ も証明できる。よって、

$$e_{ij} = e_{jl} \cdot e_{kl} \cdot e_{ki}$$

であるので、$e_{ij} \in G$ が成立する。これで、$KG_2 \supset K_2$ が示された。

次に、$KG_3 \supset K_3$ を示す。

$1 \le m \neq n \le 8$ に対して、第 m 成分が 1、第 n 成分が -1 で、残りは 0 であるベクトルを

$$h_{mn} = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0, -1, 0, \ldots, 0) \in (\mathbb{Z})^8$$

とおくと、

$$\{h_{mn} \mid 1 \le m \neq n \le 8\}$$

は、K_3 の生成系である。３面体の場所 s, t が、下図の位置にあったとする。

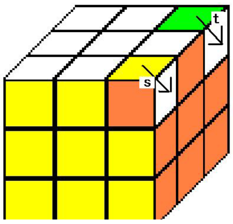


図５

図５の局面は、h_{st} である。このとき、

$$h_{st} = \mathbf{b}^{-2} \cdot \mathbf{l}^{-2} \cdot (\mathbf{l}^{-1} \cdot \mathbf{u}^{-1} \cdot \mathbf{l} \cdot \mathbf{u})^3 \cdot \mathbf{l}^2 \cdot \mathbf{b}^2 \cdot (\mathbf{f}^{-1} \cdot \mathbf{u}^{-1} \cdot \mathbf{f} \cdot \mathbf{u})^3 \in G$$

が成立する。

次に、一般に、３面体の場所 m, n に対して、$h_{mn} \in G$ を証明する。

ここで場所 s, t, m, n が図６のようであったとする。(そうでない場合でも、全く同じようにして証明される。)

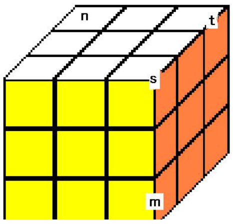


図６

h_{ms} は、ルービックキューブの場所 m が場所 s に、場所 s が場所 t に重なるようにに持ち替えてから h_{st} を行い、再び白の１面体が上に、黄色の１面体が正面にくるように持ち直したものである。よって、$h_{ms} \in G$ である。同様に、$h_{tn} \in G$ も証明できる。このとき、

$$h_{mn} = h_{tn} \cdot h_{st} \cdot h_{ms}$$

であるので、$h_{mn} \in G$ が成立する。これで、$KG_3 \supset K_3$ が示された。

ここで、次の主張を示す。これは、ルービックキューブの群構造の決定において、最も重要な内容を含んでいる。

主張 5.6 分裂準同型 $s : \mathfrak{S}_{12} \times \mathfrak{S}_8 \longrightarrow C$ を持つ短完全列

$$0 \longrightarrow (\mathbb{Z}_2)^{12} \times (\mathbb{Z}_3)^8 \xrightarrow{\xi} C \xrightarrow{\mu} \mathfrak{S}_{12} \times \mathfrak{S}_8 \longrightarrow e$$

から誘導される同型

$$\psi : C \longrightarrow ((\mathbb{Z}_2)^{12} \times (\mathbb{Z}_3)^8) \rtimes (\mathfrak{S}_{12} \times \mathfrak{S}_8)$$

について、考える。

$c \in C$ について、$\psi(c) = (\alpha, \beta, a, b)$ とする。

このとき、$c \in G$ であれば、$\alpha \in K_2, \beta \in K_3$ が成立する。

これが証明できれば、$\alpha \in KG_2 \subset G$ に対して、$\psi(\alpha) = (\alpha, 0, e, e)$ である (すぐ下の、証明内の ψ の定義を見よ) ので、$\alpha \in K_2$ となり、$KG_2 \subset K_2$ がわかる。$KG_3 \subset K_3$ も同様に証明できる。

証明 命題 2.2 で見たように、

$$\psi(g) = (g \cdot (s(\mu(g)))^{-1}, \mu(g))$$

で定まる群の同型

$$\psi : C \longrightarrow ((\mathbb{Z}_2)^{12} \times (\mathbb{Z}_3)^8) \rtimes (\mathfrak{S}_{12} \times \mathfrak{S}_8)$$

がある。

$(\alpha, \beta, a, b), (\alpha', \beta', a', b') \in C$ としよう。(ただし、$\alpha, \alpha' \in (\mathbb{Z}_2)^{12}, \beta, \beta' \in (\mathbb{Z}_3)^8, a, a' \in \mathfrak{S}_{12}, b, b' \in \mathfrak{S}_8$ である。) このとき、

$$(\alpha, \beta, a, b) \cdot (\alpha', \beta', a', b') = \left(\alpha + \sigma_a(\alpha'), \beta + \tau_b(\beta'), a \cdot a', b \cdot b'\right)$$

である。(注意 2.4 と命題 4.8 を参照。) ここで、$\alpha' = (\alpha'_1, \ldots, \alpha'_{12}), \beta' = (\beta'_1, \ldots, \beta'_8)$ とすると、

$$\begin{aligned} \sigma_a(\alpha') &= s_2(a) \cdot \alpha' \cdot s_2(a)^{-1} = (\alpha'_{a^{-1}(1)}, \ldots, \alpha'_{a^{-1}(12)}) \\ \tau_b(\beta') &= s_3(b) \cdot \beta' \cdot s_3(b)^{-1} = (\beta'_{b^{-1}(1)}, \ldots, \beta'_{b^{-1}(8)}) \end{aligned}$$

であった。よって、$\alpha' \in K_2$ ならば $\sigma_a(\alpha') \in K_2$ である。したがって、$\alpha, \alpha' \in K_2$ ならば $\alpha + \sigma_a(\alpha') \in K_2$ である。同様に、$\beta, \beta' \in K_3$ ならば $\beta + \tau_b(\beta') \in K_3$ である。

このことより、主張 5.6 は、G のある生成系に対して証明すれば十分であることがわかる。よって、$g \in G$ は、$\mathbf{u}, \mathbf{r}, \mathbf{l}, \mathbf{f}, \mathbf{d}, \mathbf{b}$ のどれかとしてもよい。以下の議論では簡単のため、$g = \mathbf{u}$ としよう。$\psi(\mathbf{u})$ を考える。

今、ルービックキューブの 2 面体と 3 面体に図のように番号と向きを付ける。(図 7 には、$\mathbf{u}$ に関係する部分の番号と向きのみを書いた。また、2 面体の番号と 3 面体の番号を区別するために、2 面体の番号を ①, ②, ③, ④ と、3 面体の番号を 1, 2, 3, 4 と書いた。)

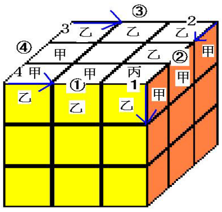
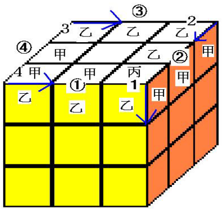


図 7

今、図 7 のように、2 面体と 3 面体の場所に番号と向きを定めたが、以下の議論はルービックキューブの 2 面体と 3 面体の番号と向きの付け方によらないことが、後ほど証明される。

u を行ってみる。



$\stackrel{\mathbf{u}}{\Longrightarrow}$

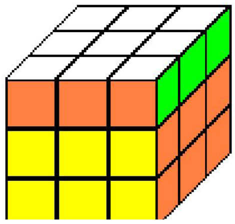


図 7　　　　図 8

$\psi(\mathbf{u}) = \left(\mathbf{u}\left(s(\mu(\mathbf{u}))\right)^{-1}, \mu(\mathbf{u})\right)$ であることを思い出そう。

$\psi(\mathbf{u}) = (\alpha, \beta, a, b)$ とおく。まず、$\mu(\mathbf{u})$ について考える。各 2 面体、3 面体は場所 1 にあったものは場所 4 に移り、場所 2 にあったものは場所 1 に、場所 3 にあったものは場所 2 に、場所 4 にあったものは場所 3 にそれぞれ移る。よって、$a = (1, 4, 3, 2)$, $b = (1, 4, 3, 2)$ である。

次に、$\mathbf{u} \cdot \left(s(\mu(\mathbf{u}))\right)^{-1}$ について考える。まず、

$$s(\mu(\mathbf{u}))^{-1} = s(\mu(\mathbf{u})^{-1}) = s(((1, 4, 3, 2), (1, 4, 3, 2))^{-1}) = s(((1, 2, 3, 4), (1, 2, 3, 4)))$$

に注意する。

よって、

$$\mathbf{u} \cdot \left(s(\mu(\mathbf{u}))\right)^{-1} = \mathbf{u} \cdot s(((1, 2, 3, 4), (1, 2, 3, 4)))$$

である。

2 面体について考える。場所 1 にある 2 面体を場所 2 に向きを合わせるように移ると、黄色の面が上面に、白の面が右面に移る。さらにこれは、**u** で場所 1 に戻すと、元々場所 1 にあった向きと逆向きになる。場所 2 にある 2 面体を場所 3 に向きを合わせるように移し、**u** で場所 2 に戻すと、元々場所 2 にあった向きと一致する。場所 3 にある 2 面体を場所 4 に向きを合わせるように移すと、白の面が左面に移る。さらにこれを、**u** で場所 3 に戻すと、元々場所 3 にあった向きと逆向きになる。場所 4 にある 2 面体を場所 1 に向きを合わせるように移し、**u** で場所 4 に戻すと、元々場所 4 にあった向きと一致する。

次に 3 面体について考える。場所 1 にある 3 面体を場所 2 に向きに合わせるように移すと、黄色の面が上面に移る。さらに、**u** で場所 1 に戻すと、元々場所 1 にあった向きと時計回りに 120°回転した向きになる。場所 2 にある 3 面体を場所 3 に向きを合わせるように移し、**u** で場所 2 に戻すと、元々場所 2 にあった向きと一致する。場所 3 にある 3 面体を場所 4 に向きを合わせるように移すと、白面が前面に移る。さらに、**u** で場所 3 に戻すと、元々場所 3 にあった向きを時計回りに 120°回転した向きになる。場所 4 にある 3 面体を場所 1 に向きに合わせるように移すと、白面が右面に移る。さらに、**u** で場所 4 に戻すと、元々場所 4 にあった向きを時計回りに 120°回転した向きになる。

よって、

$$
\begin{aligned}
\alpha &= (1,0,1,0,\dots,0),\\
\beta &= (1,0,1,1,0,\dots,0)
\end{aligned}
$$

である。

このときは、$\alpha \in K_2, \beta \in K_3$ となっている。$\alpha \in K_2, \beta \in K_3$ であることが、２面体、３面体の番号付け、向き付けによらないことを示す必要がある。（それができれば、$\alpha \in K_2, \beta \in K_3$ は $\mathbf{u}$ だけではなく、$\mathbf{r}, \mathbf{l}, \mathbf{f}, \mathbf{b}, \mathbf{d}$ においても成り立つことがわかるであろう。）

番号付けによらないことは、明らかであろう。よって、向き付けのみ議論する。

まず、２面体について考える。

場所 1 にある 2 面体の向きをはじめに定めた向きと逆にしよう。すると、新しい向きによって出てくる α は、もとの α の第 1 成分と第 4 成分のそれぞれに 1 を加えたものになる。両方に 1 を加えるので、$\sum_{i=1}^{12} \alpha_i = 0$ という条件は保たれる。即ち、場所 1 にある 2 面体の向きをはじめに定めた向きと変えても、α は K_2 に含まれる事がわかる。

同様に場所２、３、４にある 2 面体の向きをはじめに定めた向きと変えても、α は向きを変えた場所の成分と、その行き先となる場所の成分に 1 加えた結果が得られる。このことから、２面体の向きによらず $\sum_{i=1}^{12} \alpha_i = 0$ という条件が保たれる。

次に 3 面体について考える。

場所 1 にある 3 面体の向きをはじめに定めた向きから時計回りに 120°回転させた向きに変えよう。すると、新しい向きによって出てくる β はもとの β の第 1 成分に -1 を加え、第 4 成分に 1 を加えたものになる。よって $\sum_{j=1}^{8} \beta_j = 0$ の条件は保たれる。即ち、場所 1 にある 3 面体の向きをはじめに定めた向きと変えても、β は K_3 に含まれる事がわかる。

同様に場所２、３、４にある 3 面体の向きをはじめに定めた向きと変えても、β は向きを変えた場所の成分と、その行き先となる場所の成分のそれぞれに $-1, 1$ を加えた結果が得られる。このことから、３面体の向きによらず $\sum_{j=1}^{8} \beta_j = 0$ という条件が保たれる。

よって、２面体、３面体の向きの決め方によらず、$\alpha \in K_2, \beta \in K_3$ である。

このことから $\psi(\mathbf{d}),\dots,\psi(\mathbf{b})$ に対しても、$\alpha \in K_2, \beta \in K_3$ が証明された。

これで、主張 5.6 の証明が完了した。

これを使って、(3) を示そう。主張 5.6 より、

$$
\psi(G) \subset (KG_2 \times KG_3) \times SG \subset ((\mathbb{Z}_2)^{12} \times (\mathbb{Z}_3)^8) \rtimes (\mathfrak{S}_{12} \times \mathfrak{S}_8)
$$

であることがわかる。このとき ψ は単射であることに注意する。すると、

$$
{}^\sharp\psi(G) = {}^\sharp G = {}^\sharp\{(KG_2 \times KG_3)\} \times {}^\sharp\{SG\} = {}^\sharp\{(KG_2 \times KG_3) \times SG\}
$$

が成立する。このことから、

$$\psi(G) = (KG_2 \times KG_3) \times SG$$

がわかる。

よって、$c \in C$ に対して、$\psi(c) = (\alpha, \beta, a, b)$ とすると、

$$c \in G \Leftrightarrow \psi(c) \in \psi(G) \Leftrightarrow \alpha \in KG_2,\ \beta \in KG_3,\ (a, b) \in SG$$

が成立する。

ところが、$(a, b) \in SG$ に対して、

$$\psi \circ s(a, b) = \Big(s(a, b)\big(s \cdot \mu(s(a, b))\big)^{-1}, \mu(s(a, b))\Big) = (0, 0, a, b) \in \psi(G)$$

ということがわかるので、$s(SG) \subset G$ であることが示せた。　証明終

注意 5.7 命題 5.2 と定理 5.5 を使えば、ルービックキューブ群の位数がわかる。

$$\begin{aligned}
{}^\sharp C &= {}^\sharp(\mathbb{Z}_2)^{12} \times (\mathbb{Z}_3)^8 \times {}^\sharp(\mathfrak{S}_{12} \times \mathfrak{S}_8) \\
{}^\sharp G &= {}^\sharp KG \times {}^\sharp SG \\
&= {}^\sharp KG_2 \times {}^\sharp KG_3 \times {}^\sharp \{(\mathfrak{S}_{12} \times \mathfrak{S}_8) \cap \mathfrak{A}_{20}\} \\
&= \frac{{}^\sharp(\mathbb{Z}_2)^{12}}{2} \times \frac{{}^\sharp(\mathbb{Z}_3)^8}{3} \times \frac{{}^\sharp(\mathfrak{S}_{12} \times \mathfrak{S}_8)}{2} \\
&= \frac{{}^\sharp C}{12} \\
&= \frac{2^{29} \times 3^{15} \times 5^3 \times 7^2 \times 11}{12} \\
&= 2^{27} \times 3^{14} \times 5^3 \times 7^2 \times 11 \\
&= 4325\text{京}\,2003\text{兆}\,2744\text{億}\,8985\text{万}\,6000
\end{aligned}$$

である。

位数に関して、${}^\#\{C\} = 12 \cdot {}^\#\{G\}$ という式が成り立っていることに注意しよう。つまり、C の元を勝手に選んだとき、それが G の元になる、すなわち、6 つの面の回転によって各面の色をそろえることができる確率は、1/12 なのである。

例 5.8 G において、図 9 のような局面は無い。

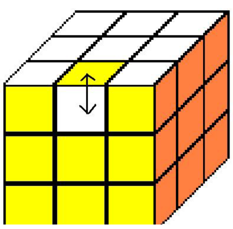


図 9

このことを、証明しよう。
図の局面を g とすると、

$$\psi(g) = \left(g\left(s \cdot \mu(g)\right)^{-1}, \mu(g)\right) = (g, e, e)$$

である。図 9 の、向きが変わっている 2 面体の場所を i としよう。第 i 成分が 1 で、残りが 0 であるベクトルを

$$e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$$

とおくと、。$g = (e_i, 0, e, e)$ と表すことができる。ここで、明らかに、$e_i \notin KG_2$ である。よって、$g \notin G$ である。
ここの議論は、注意 5.10 でもっと詳しく議論される。

命題 5.9 $s' = s|_{SG}$ とおく。このとき、分裂準同型 s' によって、

$$0 \to KG \xrightarrow{\eta} G \xrightarrow{\nu} SG \to e$$

は分裂する短完全列になる。

証明 これが、短完全列であることは、すでに命題 5.2 で証明した。定理 5.5 により、$s' : SG \to G$ が定義される。このとき、$\sigma \in SG$ に対して、

$$\nu \cdot s'(\sigma) = \mu \cdot s'(\sigma) = \mu \cdot s(\sigma) = \mathrm{id}_{\mathfrak{S}_{12} \times \mathfrak{S}_8}(\sigma) = \sigma$$

である。よって、$\nu \cdot s' = id_{SG}$ となる。 証明終

注意 5.10 命題 5.9 により、$(\alpha, \beta, a, b) \mapsto \eta(\alpha, \beta) \cdot s(a, b)$ で定まる全単射

$$\phi : KG \times SG \to G$$

がある。
この全単射により、C のどのような元が G の元になるかが、完全にわかったことになる。つまり、G の元は、必ず次のように記述されるのである。
「$a \in \mathfrak{S}_{12}$ と $b \in \mathfrak{S}_8$ を、$\mathrm{sgn}(a) = \mathrm{sgn}(b)$ となるようにとる。まず、元 $s(a, b)$ を作る。その後さらに、偶数個の 2 面体 (同じものを複数個選んでもよい) の向きをひっくり返し、次に、3 の倍数個の 3 面体 (同じものを複数個選んでもよい) を、時計回りに 120° 回転させる 」