
組合せ回路

コンピュータ基礎 (5)

菊池浩明

講義概要

■ 教科書

- 3章 論理回路

- 3. 組合せ回路

 - » 主加法標準形

 - » 簡単化 (カルノー図)

 - » 様々な組合せ回路 (加算器, エンコーダー)

問題

- 問4) 論理式を証明せよ

$$(3) AB \vee BC \vee \sim AC = AB \vee \sim AC$$

$$(4) AB \vee CD = (A \vee C) (A \vee D) (B \vee C) (B \vee D)$$

積項・和項

■ 定義

- 変数 x とその否定 $\sim x$ をリテラルという.
- 各変数のリテラルを高々一つしか持たない論理積を積項という.
- 積項の論理和を論理和形式(加法)という.
- 各変数のリテラルを高々一つしか持たない論理和を和項といい, 和項の論理積を論理積を論理積形式(乗法)という.

■ 例)

- $x_1 \sim x_2 \vee x_2$, (加法形式)
- $(x_1 \vee \sim x_2)(x_2 \vee x_3)$ (乗法形式)

最小項(基本積)と真理値表

■ 定義

□ 全ての変数についてリテラルが含まれる積項を最小項という.

» 例) $x_1 \sim x_2$ は最小項, x_2 は最小項でない(単積項)

» 和項の場合は, 最大項

» $F = x_1 \sim x_2 \vee \sim x_1 x_2$

x_1	x_2	$x_1 x_2$	$x_1 \sim x_2$	$\sim x_1 x_2$	$\sim x_1 \sim x_2$	F
0	0	0	0	0	1	0
0	1	0	0	1	0	1
1	0	0	1	0	0	1
1	1	1	0	0	0	0

主加法標準形・主乗法標準形

■ 定義

□ 最小項の論理和で表される論理式を主加法標準形という.

□ 最大項(基本和)の論理積で表される論理式を主乗法標準形という.

□ 例)

$$F = x_1 \sim x_2 x_3 \vee x_1 x_2 \sim x_3 \vee x_1 x_2 x_3,$$

$$G = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) (x_1 \vee x_2 \vee \sim x_3) (x_1 \vee \sim x_2 \vee x_3) (x_1 \vee \sim x_2 \vee \sim x_3) (\sim x_1 \vee x_2 \vee x_3)$$

例1) 主加法標準形

- 論理関数の主加法標準形を求めよ.

$$\square F = x_1 \sim x_2 x_3 \vee x_1 x_2 \sim x_3 \\ \vee x_1 x_2 x_3$$

$$\square G =$$

x1	x2	x3	F	G
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	0
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	0

例2) 論理式からの変形

- 次の加法標準形を求めよ.

$$\square AB \vee BC \vee \sim AC$$

$$= AB(CV\sim C) \vee BC(AV\sim A) \vee \sim AC(BV\sim B)$$

$$= ABC \vee AB\sim C \vee \sim ABC \vee \sim A\sim BC$$

$$\square AB \vee \sim AC$$

$$=$$

例3) 主乗法標準形

■ 論理関数の主加法標準形を求めよ.

□ 加法 (F=1の積項)

$$F = \sim x_1 x_2 \sim x_3 \vee x_1 \sim x_2 x_3$$

$$\vee x_1 x_2 \sim x_3 \vee x_1 x_2 x_3$$

□ 乗法 (F=0の和項)

$$F = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)$$

$$(\sim x_1 \vee \sim x_2 \vee \sim x_3)$$

$$(x_1 \vee \sim x_2 \vee \sim x_3)$$

$$(\sim x_1 \vee x_2 \vee x_3)$$

□ G =

x1	x2	x3	F	G
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

加法から乗法への変換

■ 手順

- 入力: 主加法標準形 F
- 1. $\sim F$ の真理値表を求める.
- 2. $\sim F$ の主加法標準形 G を求める.
- 3. $\sim G$ をドモルガンで展開する.

簡単化

■ 課題

□主加法(主乗法)標準形は, 一般に冗長な論理式である.

» 例) $ABC \vee AB\sim C \vee \sim ABC \vee \sim A\sim BC$ (標準形)
= $AB \vee \sim AC$ (簡単)

■ 簡単化

□最もリテラルを減らした式に変形すること.

□(1) ブール代数, (2) ベン図, (3) カルノー図

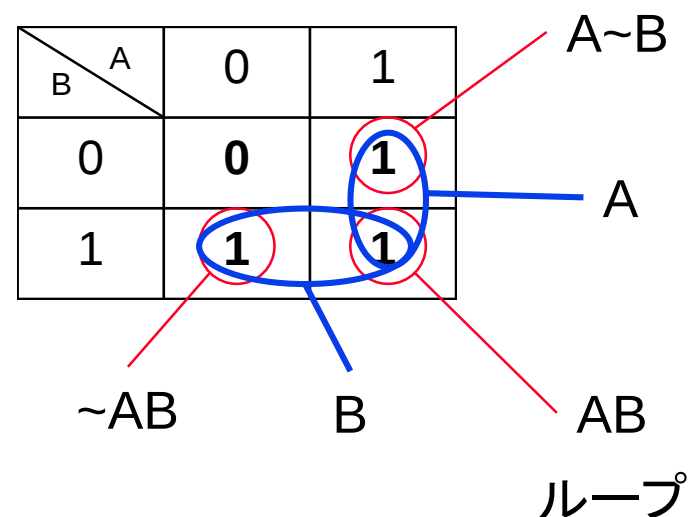
カルノー図

■ Karnaugh Diagram

□ 論理式の表現形式. 真理値表をセルで表す.

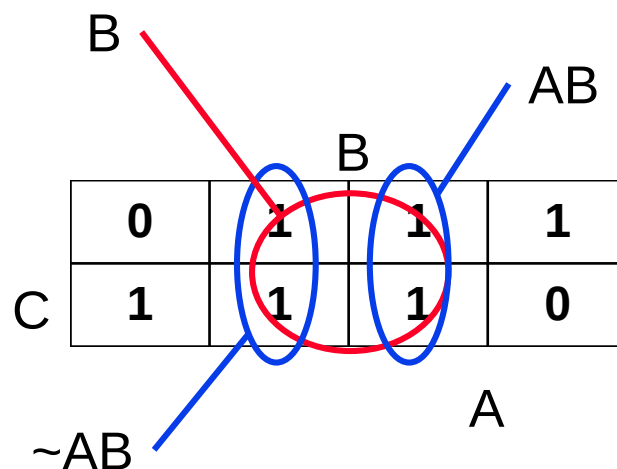
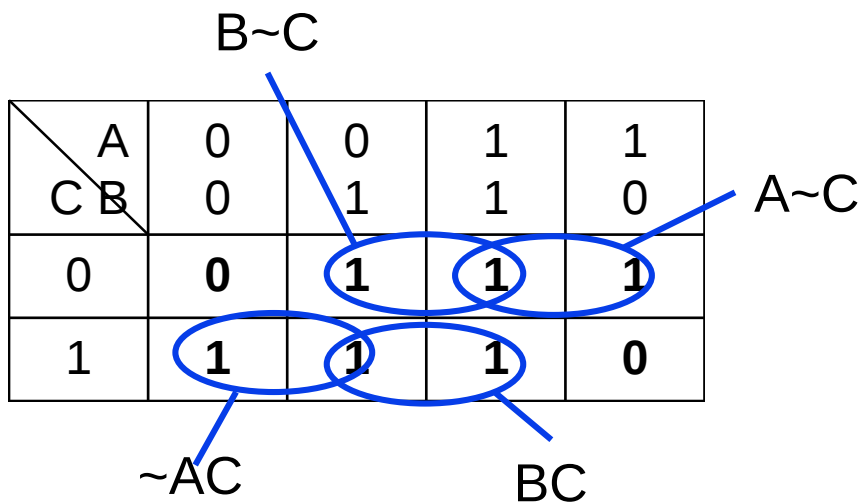
□ 例) $F = A \sim B \vee AB \vee \sim AB = A \vee B$

A	B	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1



3変数カルノー図

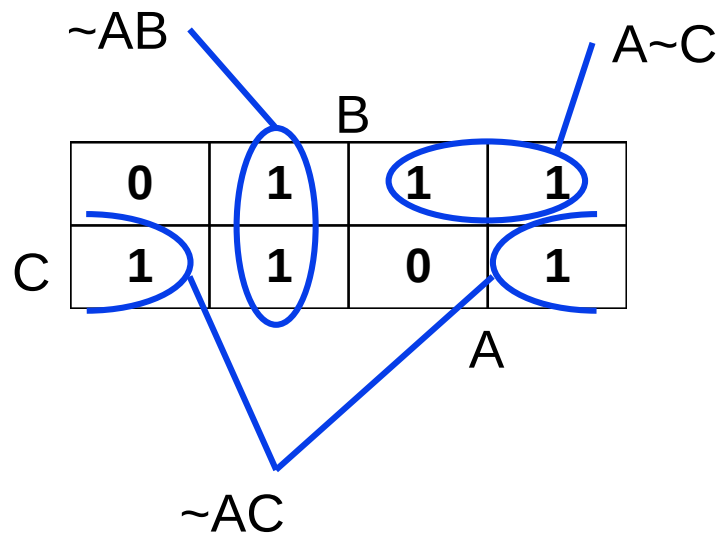
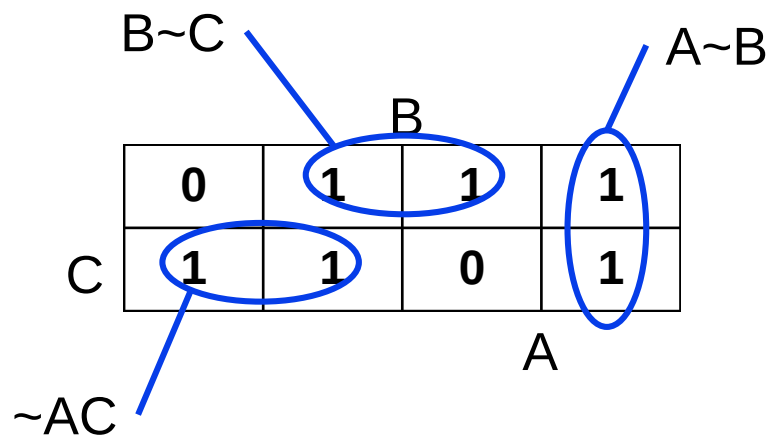
■ $F2 = \sim AB \sim C \vee AB \sim C \vee A \sim B \sim C \vee$
 $\sim A \sim BC \vee \sim ABC \vee ABC$
 $=$



簡単化と一意性

■ $F3 = B\sim C \vee A\sim B \vee \sim AC$
 $= \sim AB \vee A\sim C \vee \sim AC$

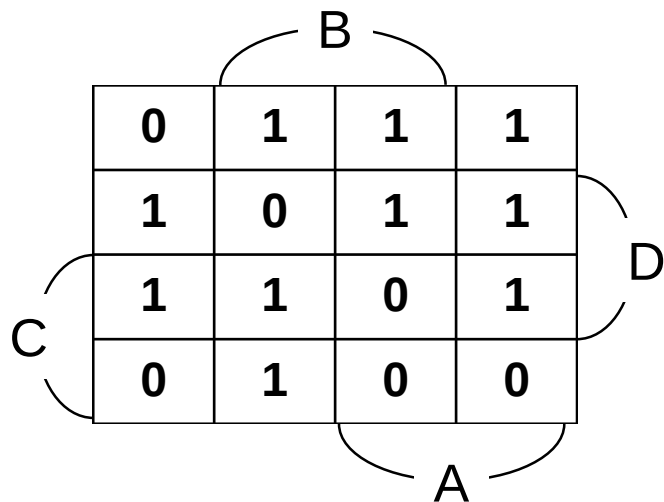
(簡単化された式は一意に決まらない)



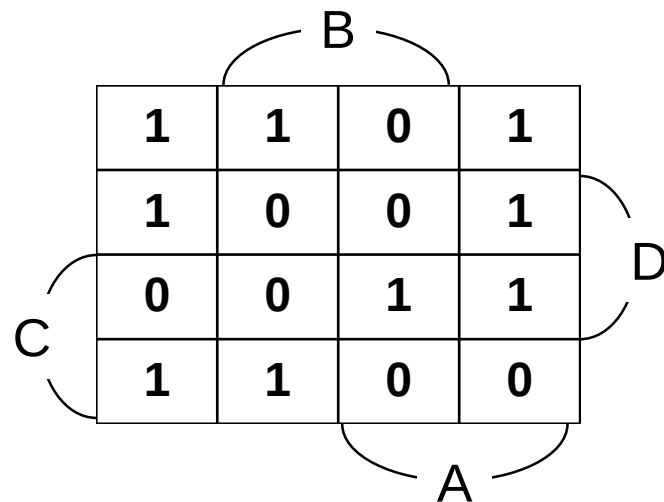
4変数の例

- 次のカルノー図を簡単化せよ

F4=



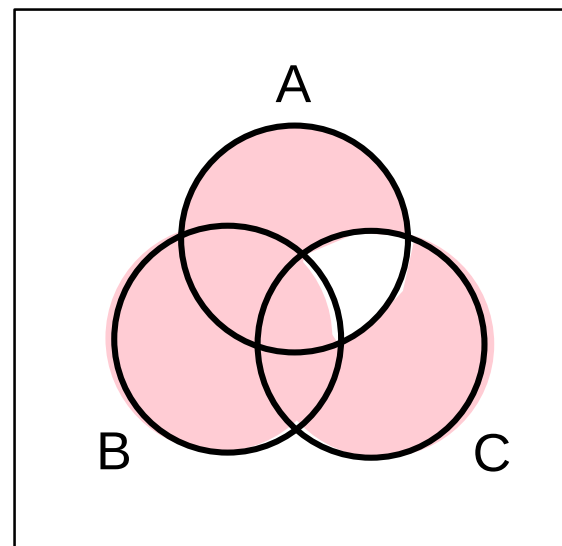
F5=



ベン図での簡単化

■ $F2 = B \vee A \sim C \vee \sim AC$

	B			
	0	1	1	1
C	1	1	1	0
	A			



NANDのみによる実現

- 否定

- $\sim A = \text{NAND}(A, A)$
 $= \sim(A \wedge A) = \sim A$

- 積

- $A \wedge B = \sim \text{NAND}(A, B)$
 $= \sim \sim A \wedge B = A \wedge B$

- 和

- $A \vee B = \text{NAND}(\sim A, \sim B)$
 $= \sim(\sim A \wedge \sim B) = \sim \sim A \vee \sim \sim B = A \vee B$

- NAND表現

- 1. 加法形式Fにする
 - 2. 二重否定 $\sim \sim F$
 - 3. $\sim F$ をドモルガン展開

- 1. $F = A \sim B \vee \sim A B$
 - 2. $\sim \sim (A \sim B \vee \sim A B)$
 - 3. $\sim(\sim(A \sim B) \wedge \sim(\sim A B))$

回路1: 加算器

- 半加算器 Half Adder (HA)

- $s_0 = a_0 \oplus b_0$

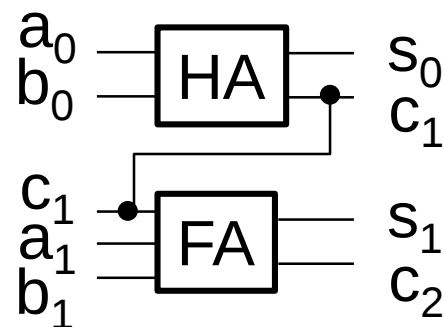
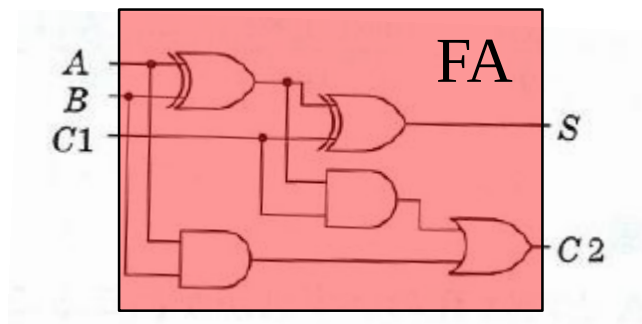
- $c_1 = a_0 \wedge b_0$

- 全加算器 Full Adder (FA)

- $s_1 = a_1 \oplus b_1 \oplus c_1$

- $c_2 = a_1 b_1 \vee a_1 c_1 \vee b_1 c_1$

$$\begin{array}{r} c_2 \ c_1 \ . \\ a_1 \ a_0 \\ + \ b_1 \ b_0 \\ \hline s_2 \ s_1 \ s_0 \end{array}$$



加算器のカルノー図

■ FA(a_1, b_1, c_1)

$$\square s_1 = a_1 \oplus b_1 \oplus c_1$$

$$= \sim a_1 \sim b_1 c_1 \vee \sim a_1 b_1 \sim c_1 \vee a_1 \sim b_1 \sim c_1 \vee a_1 b_1 c_1$$

$$\square c_2 = a_1 b_1 \vee a_1 c_1 \vee b_1 c_1$$

		b1			
		0	1	0	1
c1	1	1	0	1	0
		a1			

		b1			
		0	0	1	0
c1	0	0	1	1	1
		a1			

回路2: 多数決回路

- $V(a_1, b_1, c_1)$

- $c_2 = a_1 b_1 \vee a_1 c_1 \vee b_1 c_1$

回路3: エンコーダー

- 符号器 Encoder(z_0, z_1, z_2, z_3)
 - $z_0, \dots, z_3$ の選択肢を2進数(A,B)で表す.
 - » $A = z_2 \vee z_3, B = z_1 \vee z_3$
- 復号器 Decoder(A,B)
 - 2進数(A,B)を $z_0, \dots, z_3$ に変換する.
 - » $z_0 = \sim A \sim B, z_1 = \sim AB$

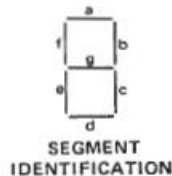
A	B	z_0	z_1	z_2	z_3
0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	0	0
1	0	0	0	1	0
1	1	0	0	0	1

BCD-7 セグメント・デコーダ



■ SN5447

<http://www.tij.co.jp/jp/lit/ds/symlink/sn5447a.pdf>



'46A, '47A, 'LS47 FUNCTION TABLE (T1)

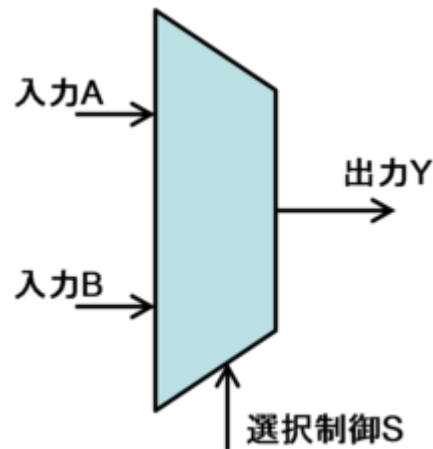
DECIMAL OR FUNCTION	INPUTS						$\overline{\text{BI}}/\text{RBO}^\dagger$	OUTPUTS							NOTE
	$\overline{\text{LT}}$	$\overline{\text{RBI}}$	D	C	B	A		a	b	c	d	e	f	g	
0	H	H	L	L	L	L	H	ON	ON	ON	ON	ON	ON	OFF	1
1	H	X	L	L	L	H	H	OFF	ON	ON	OFF	OFF	OFF	OFF	
2	H	X	L	L	H	L	H	ON	ON	OFF	ON	ON	OFF	ON	
3	H	X	L	L	H	H	H	ON	ON	ON	ON	OFF	OFF	ON	
4	H	X	L	H	L	L	H	OFF	ON	ON	OFF	OFF	ON	ON	
5	H	X	L	H	L	H	H	ON	OFF	ON	ON	OFF	ON	ON	
6	H	X	L	H	H	L	H	OFF	OFF	ON	ON	ON	ON	ON	
7	H	X	L	H	H	H	H	ON	ON	ON	OFF	OFF	OFF	OFF	
8	H	X	H	L	L	L	H	ON	ON	ON	ON	ON	ON	ON	
9	H	X	H	L	L	H	H	ON	ON	ON	OFF	OFF	ON	ON	
10	H	X	H	L	H	L	H	OFF	OFF	OFF	ON	ON	OFF	ON	
11	H	X	H	L	H	H	H	OFF	OFF	ON	ON	OFF	OFF	ON	
12	H	X	H	H	L	L	H	OFF	ON	OFF	OFF	OFF	ON	ON	
13	H	X	H	H	L	H	H	ON	OFF	OFF	ON	OFF	ON	ON	
14	H	X	H	H	H	L	H	OFF	OFF	OFF	ON	ON	ON	ON	
15	H	X	H	H	H	H	H	OFF	OFF	OFF	OFF	OFF	OFF	OFF	
BI	X	X	X	X	X	X	L	OFF	OFF	OFF	OFF	OFF	OFF	OFF	2
RBI	H	L	L	L	L	L	L	OFF	OFF	OFF	OFF	OFF	OFF	OFF	3
LT	L	X	X	X	X	X	H	ON	ON	ON	ON	ON	ON	ON	4

回路4: マルチプレクサー

- multiplexer (切替え器)

- MP(A,B,S)

- » $Y = AS \vee B \sim S$



宿題

■ 3章

☐ 問7

☐ 問9

☐ 問10

☐ 問11

☐ 問12

☐ 問16

まとめ

- 全てのリテラルを含む積項を()項とい
い, その論理和で表される論理式を
()標準形という.
- カルノー図では, 真理値表を()で表現
し, 積項を()で表すことで式を簡単化
する. 簡単化された論理式は()に決まら
ない.
- 加算器や符号器()などの(状態を持た
ない)回路を()回路という.