2値論理と論理回路

コンピュータ基礎 (4)

菊池浩明

講義概要

- 教科書
  - 3章論理回路
  - 1. 集合
  - 2. 2値論理と基本論理回路
    - ブール代数, 論理式, 真理値表
    - 基本論理回路, ゲート, 負論理

問題

- 次のプログラムの無駄を指摘せよ.

```
1. for(int i = 1; i < 10; ++i){
2.     if(i > 5 && i % 2 == 0 || i%2 != 0){
3.         print(i + ", ");
4.     }
5. }
```

ヒント

- 次のプログラムの無駄を指摘せよ.

```
for(int i = 1; i < 10; ++i){
    if(i > 5 && i % 2 == 0 || i%2 != 0){
       A    ∧      B          ∨      ~B
        print(i + ", ");
    }
}
```

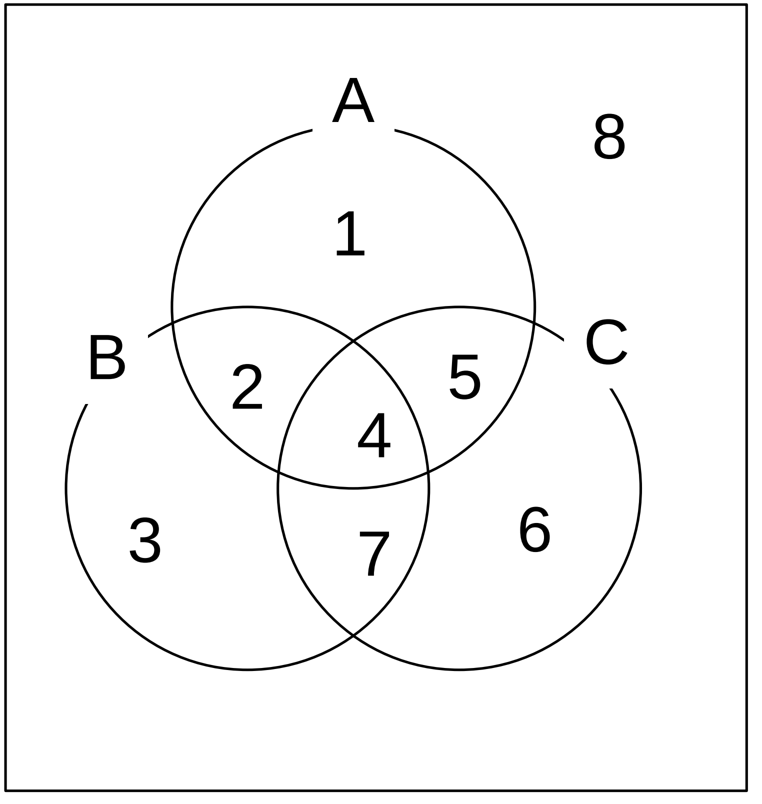
- $A \land B \lor {\sim}B = A \lor {\sim}B$

1. 集合

- 基本定義
  - 要素a が集合Aに属することを，2∈A と書く
  - 全体集合 U = {1, 2, …, 10}
  - 部分集合 C={4, 8}の時 C⊆A
  - 和集合 A∪B
  - 積集合 A∩B
  - 補集合 $\overline{A}$

ベン図

- 次の式を表す集合
  - ❑ A∩B = {2, 4}
  - ❑ (A∪B)∩C =
  - ❑ A∩B∪A =
  - ❑ (A∪B)∩$\bar{C}$ =
  - ❑ A∩B∩ $\bar{C}$ =



集合演算の性質

- 集合
  - 最大元　　$U \cup A = U$
  - 最小元　　$\varphi \cap A = \varphi$
  - 交換則　　$A \cup B = B \cup A$
  - 結合則　　$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
  - 分配則　　$(A \cup B) \cap C = A \cap C \cup B \cap C$
  - 吸収則　　$A \cup (A \cap B) = A$
  - ドモルガン則　$\sim(A \cup B) = \sim A \cap \sim B$

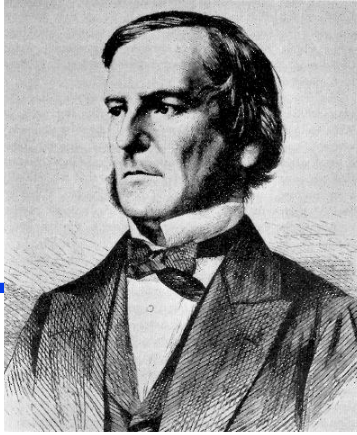
ベン図での証明

- ベン図の上で両辺の等価を確認
  - 例1) 分配律　$(A \cup B) \cap C = A \cap C \cup B \cap C$
  - 例2) ドモルガン律 $\sim(A \cup B) = \sim A \cap \sim B$
  - 例3) 吸収律 $A \cup (A \cap B) = A$

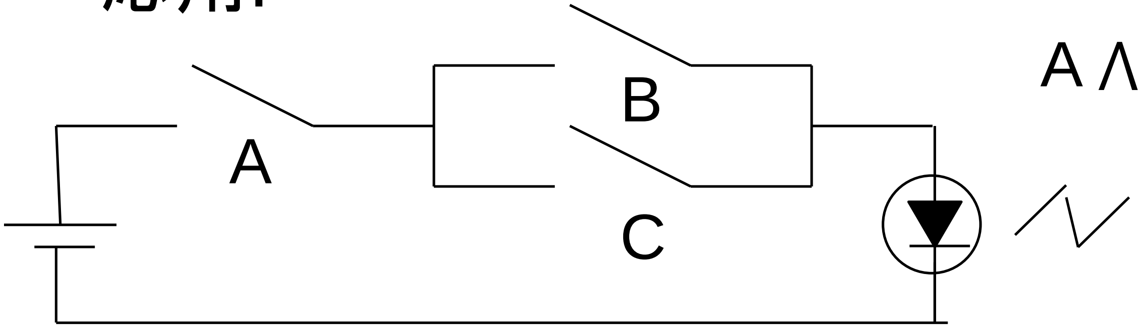
集合に関するよくある誤解

- どこか誤っているだろうか？
  - ❑ $\{1, 2, 3\} \neq \{2, 1, 3\}$
  - ❑ $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$, $A \cup B = \{1, 2, 2, 3\}$
  - ❑ $\emptyset \in A$

2. ブール代数



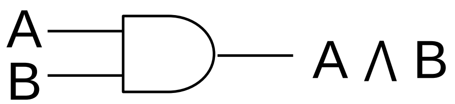
- Boole Algebra
  - G. Boole によって提案された2値論理を扱う代数（集合と演算の法則群）
    - » boolean x = true (false); 「ブールの」
  - C. E. Shannon によってスイッチング回路に応用.



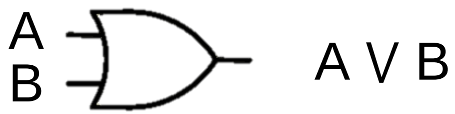
A ∧ (B ∨ C)

論理回路(ゲート)

- AND
  - Y = A ∧ B = AB



- OR
  - Y = A ∨ B (=A + B)

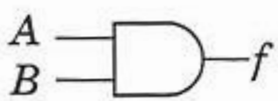
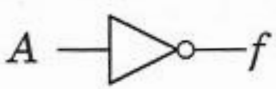
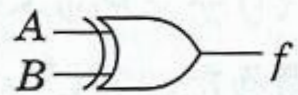


A	B	AB
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

真理値表

A	B	A∨B
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

MIL規格

回路名	回路記号	論理式	回路名	回路記号	論理式
OR		論理和 $f=A+B$	NOR		否定論理和 $f=\overline{A+B}$
AND		論理積 $f=A\cdot B$	NAND		否定論理積 $f=\overline{A\cdot B}$
NOT		否定 $f=\overline{A}$	XOR		排他的論理和 $f=\overline{A}\cdot B+A\cdot\overline{B}$

命題論理

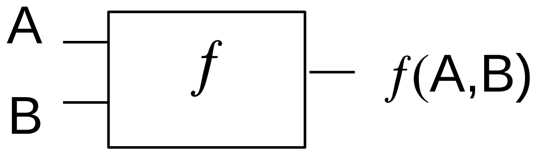
- 論理学
  - ❑ 命題論理：　真偽を取る（文＝命題）の論理
    A＝「12は3の倍数である」
  - ❑ 述語論理：　述語（人間(x)）の論理,
    「すべての∀～」「ある∃～」などの限定子
    例）B(x)=「xは3の倍数である」
  - ❑ 命題論理もブール代数のモデルである.

ブール代数

- ブール代数
  - 最大元　$1 \vee A = 1$,　$0 \wedge A = 0$
  - 最小元　$1 \wedge A = A$,　$0 \vee A = A$
  - 相補律　$A \vee \sim A = 1$,　$A \wedge \sim A = 0$
  - 二重否定　$\sim\sim A = A$
  - 交換律　$A \vee B = B \vee A$,　$A \wedge B = B \wedge A$
  - 結合律　$(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$,　$(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$
  - 分配律　$(A \vee B) \wedge C = A \wedge C \vee B \wedge C$, $(A \wedge B) \vee C = A \vee C \wedge A \vee C$
  - 吸収律　$A \vee A \wedge B = A$, $A \wedge (A \vee B) = A$
  - ドモルガン律　$\sim(A \vee B) = \sim A \wedge \sim B$,　$\sim(A \wedge B) = \sim A \vee \sim B$

論理関数

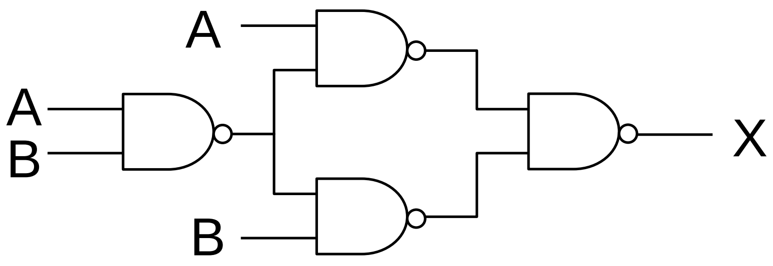
- 論理式
  - 論理値 0, 1
  - ブール値を取る論理変数A, B, C,..
  - 論理式と論理式の論理和，論理積，否定
- 論理関数
  - 論理式で表現される関数
    Z= f(A,B,C)
  - 例) Z = f(A,B) = ~AB V A~B



A	B	f(A,B)
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

例1

- 次を論理式で表せ.



- 次の論理式を表す回路図を書け.

  $Y = (\sim A \wedge B) \vee (A \wedge \sim B)$

例2

- 次の論理式の真理値表を求めよ.

X = (A∧B) V ~B

Y = AV ~B

A	B	A∧B	~B	X
0	0			
0	1			
1	0			
1	1			

A	B	~B	Y
0	0		
0	1		
1	0		
1	1		

ブール代数による証明

- 例1

$X = \sim(\sim(A\wedge\sim(A\wedge B)) \wedge \sim(B \wedge\sim(A\wedge B)))$

$= \sim\sim(A\wedge\sim(A\wedge B)) \vee \sim\sim(B \wedge\sim(A\wedge B))$　ドモルガン

$= (A\wedge\sim(A\wedge B)) \vee (B \wedge\sim(A\wedge B))$　二重否定

$= (A\wedge\sim A \vee\sim B)) \vee (B \wedge(\sim A \vee \sim B))$　ドモルガン

$= (A\wedge\sim A \vee A\wedge\sim B) \vee B \wedge\sim A \vee B\wedge\sim B$　分配

$= (0 \vee A\wedge\sim B) \vee B \wedge\sim A \vee 0$　相補律

$= A\wedge\sim B \vee B \wedge\sim A = Y$　最小元

ブール代数による証明

- 例2

$X = (A \land B) \lor \sim B$

$= (A \lor \sim B) \land (B \lor \sim B)$ 　~Bの分配律

$= (A \lor \sim B) \land 1$ 　相補律

$= A \lor \sim B$ 　最小元

$= Y$

例題3

- 次の式を証明せよ

  (2) $(A \vee B) \wedge \sim(A \wedge B)$

  $= (A \vee B) \wedge (\sim A \vee \sim B)$ ドモルガン律

  $= A \wedge (\sim A \vee \sim B) \vee B \wedge (\sim A \vee \sim B)$ 分配律

  $= A \wedge \sim A \vee A \wedge \sim B \vee B \wedge \sim A \vee B \wedge \sim B$ 分配律

  $= 0 \vee A \wedge \sim B \vee B \wedge \sim A \vee 0$ 相補律

  $= A \wedge \sim B \vee B \wedge \sim A$ 最小項

例題3

- (1) $\sim(\sim A \vee \sim B) = A \wedge B$
- (3) $(A \vee B) \wedge (B \vee C) \wedge (C \vee A)$
  $= (A \wedge B) \vee (B \wedge C) \vee (C \wedge A)$
- (4) $\sim(A \wedge \sim B \vee \sim A \wedge B) = A \wedge B \vee \sim A \wedge \sim B$
- (5) $\sim A \wedge B \vee \sim A \wedge \sim C \vee A \wedge B \wedge C$

論理式と論理関数

- 等価な論理式

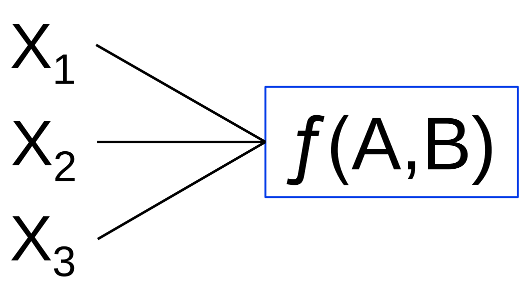
$X_1 = (A \land B) \lor \sim B$

$X_2 = A \lor \sim B$

$X_3 = (A \land \sim B) \lor B$

A	B	X
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

  - 論理関数f(A,B)は真理値表で表される
  - ある論理関数f(A,B)を表す論理式は一つではない(X_1, X_2, X_3)



論理関数と真理値表の大きさ

n=2

A	B	X
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

行数 4

論理関数の総数 2^4

n=3

A	B	C	X
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

行数 8

論理関数の総数 2^8

…

n

A	B	C	…	X
0	0	0		1
0	0	1		0
0	1	0		1
0	1	1		1
1	0	0		0
1	0	1		0
1	1	0		1
1	1	1		1
..				
1	1	1	..	0

行数

論理関数の総数

論理方程式

- 次の論理式が成立しているとき，各変数の論理値を求めよ．
  - A∧~B∧C = 1
    A = 1, B = 0, C = 1
  - A∨~B ∨C = 0
    A =   , B=   , C =
  - A∧~B∧C = 1, B∧C = A∧D
    A =1, B =   , C=   , D =

ブール代数の公理

- 公理 (Axiom: 最初に正しいと定義する）
  - A in {0, 1}
  - 最大元 $1 \vee A = A \vee 1 = 1$
  - 最小元 $0 \wedge A = 0 \wedge A = 0$
  - 二重否定 $\sim\sim 0 = 1$
- 定理 (Theorem: 公理から導かれる恒等式）
  - べき等律 $A \vee B = B \vee A$
  - 相補律 $A \vee \sim A = 1$, $A \wedge \sim A = 0$
  - 結合則 $(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$
  - 分配則 $(A \vee B) \wedge C = A \wedge C \vee B \wedge C$
  - 吸収則 $A \vee A \wedge B = A$
  - ドモルガン則 $\sim(A \vee B) = \sim A \wedge \sim B$

集合と論理（ブール代数）

- 論理式
  - 最大元 1∨A = 1
  - 最小元 0∧A = 0
  - 交換則 A∨B = B∨A
  - 結合則
    (A∨B) ∨C = A∨ (B∨C)
  - 分配則 (A∨B)∧C =
    A∧C∨ B∧C
  - 吸収則 A∨A∧B = A
  - ドモルガン則
    ~(A∨B) = ~A ∧ ~B
- 集合
  - 最大元 U ∪A =U
  - 最小元 φ ∩A =φ
  - 交換則 A∪B = B∪A
  - 結合則
    (A∪B) ∪C = A∪ (B∪C)
  - 分配則 (A∪B)∧C =
    A∩C∪ B∩C
  - 吸収則 A∪A∧B = A
  - ドモルガン則
    ~(A∪B) = ~A ∩ ~B

負論理

■ 回路と論理式

回路

A	B	X
L	L	L
L	H	H
H	L	H
H	H	H

L (Low) 3.3V未満
H (High) 3.3V以上

正論理

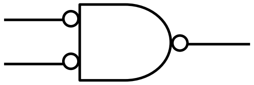
A	B	X
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

$X = A \vee B$
(ORゲート）

負論理

A	B	X
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

X = A　　B
(　　　　ゲート）



宿題

- 3章
  - 問1 （ベン図）
  - 問2 （要素の個数n(A)）
  - 問3 （論理方程式）
  - 問4 （ブール代数証明）
  - 問5 （ベン図）
  - 問6 （n変数ドモルガン）

まとめ

- 集合は（　　　）図で表すことが出来る.
- 命題論理と論理回路は,（　　　　　　）代数のモデルである.
- n変数の論理関数を表す真理値表の行数は（　　　）個であり, その関数を表す論理式は（　　　）個ある. 3変数論理関数の総数は（　　　）個である.
- $A \vee (A \wedge B) = A$を（　　　　）といい, $(A \vee B) \wedge C = A \wedge C \vee B \wedge C$を（　　　　　　）という. これらの定理を用いて恒真式が証明できる.