

自由境界条件下での球形微生物の運動モデル

明治大学大学院 先端数理科学研究科 現象数理学専攻 博士前期課程2年 池田ゼミ

1. 背景

流体力学 × 微生物 = 微生物流体力学

流体の運動方程式 u, p : 流体の速度, 圧力, ρ, μ : 流体の密度, 粘性係数, 流体: 水や空気など

非圧縮Navier-Stokes方程式 **非線形**

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u}$$

微生物の情報①
微生物の小さい
 $Re \approx 0$



↓ 時間微分項と非線形項を無視

Stokes方程式 連続の式

$$\nabla p = \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

微生物の情報②
境界の形状が自由に変形する

自由境界条件
→ 形状は微生物が流体に及ぼす力で決定 **非線形**

方程式は線形だが、境界条件が非線形で解くのが難しい

Squirmerモデル

M. J. Lighthill (1952), J. R. Blake (1971)

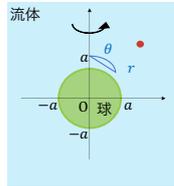
流体中の球形微生物が、表面の微小振動で、どの程度推進できるのかを検討する数理モデル。(応用例: ボルボックスの遊泳)

方程式

Stokes方程式 連続の式

$$\nabla p = \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

微生物の情報③
ボルボックスのような球形微生物



↓ 極座標変換して軸対称性を仮定

$$\nabla^4(r u_r) = 0, \quad (u_r, u_\theta): \text{流体の速度場}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(r^2 u_r \sin \theta) + \frac{\partial}{\partial \theta}(r u_\theta \sin \theta) = 0$$

境界条件 $P_l(t)$: Legendre多項式, $a(t)$: 微生物の半径

球表面での境界条件

$$u_r(r = a(t)) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l(t) P_l(\cos \theta)$$

$$u_\theta(r = a(t)) = \sum_{l=1}^{\infty} B_l(t) \frac{2}{\sin \theta} \int_{\cos \theta}^1 P_l(t) dt$$

無限遠での境界条件

$$u_r^\infty = -U \cos \theta$$

$$u_\theta^\infty = U \sin \theta$$

$$p^\infty = 0$$

解析解 (抜粋)

上記の境界値問題は u_r, u_θ, p, U について解ける。紙面の都合上 p, U のみ記す。

$$p = \mu \sum_{l=2}^{\infty} \frac{2l-1}{l+1} (lA_l - 2B_l) \frac{a^l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta), \quad U = \frac{1}{3} (2B_1 - A_1)$$

移動境界条件として境界上で速度を与えて非線形性を回避

問題点

- 球形微生物の運動モデルは元は自由境界条件下のはず
- 自由境界条件下での球形微生物の運動モデルは無い

2. 目標

- 自由境界条件下において、球形微生物の運動モデルを構築する。
- Squirmerモデルとの比較を行う。

3. 自由境界条件

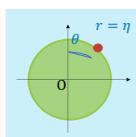
自由に変形する境界に対して与えられる条件

運動学的条件

仮定: 表面の粒子は時間経過後も表面に存在。

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = u_r$$

η : 表面の形状を表す未知関数



表面の形状 η は、
 $\eta = \eta(\theta, t)$
なる関数であり、
接線方向と時刻
に依存する。

力の釣り合い

仮定: 表面上では流体の応力と触れている物体との応力が釣り合う。

$$\sigma_{rr} = p - 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \sigma_{r\theta} = -\mu \left(\frac{1}{\eta} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{\eta} \right)$$

σ_{rr} : 球体の法線応力
 $\sigma_{r\theta}$: 球体の接線応力

自由境界条件 = 運動学的条件 + 力の釣り合い

4. 自由境界条件下での微生物のモデル

変更していない条件

方程式

$$\nabla p = \mu \nabla^2 \mathbf{u}, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

無限遠での境界条件

$$u_r^\infty = -U \cos \theta, \quad u_\theta^\infty = U \sin \theta$$

$$p^\infty = 0$$

変更している条件

球体表面での境界条件 (自由境界条件)

・運動学的条件

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = u_r, \quad \sigma_{rr} = p - 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \sigma_{r\theta} = -\mu \left(\frac{1}{\eta} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{\eta} \right)$$

○: 緑丸印は与える

Squirmerモデルの境界条件を自由境界条件にしたモデル

解析的に解いた場合

仮定1: $\forall t \geq 0, \forall l \in \mathbb{N} \cup \{0\}, D_l(t) < 1$ に対し,

仮定2: $\forall t \geq 0, \forall l \in \mathbb{N}, \varepsilon_l(t) \ll 1, a(t)$ に対し,

$$\sigma_{rr}(r = \eta) = \sum_{l=0}^{\infty} D_l(t) P_l(\cos \theta), \quad \eta(\theta, t) = a(t) + \sum_{l=1}^{\infty} \varepsilon_l(t) P_l(\cos \theta)$$

$D_l(t)$ と $\varepsilon_l(t)$ は微小であるから、これらの2次以降の項を無視する線形近似モデルを考案することができる。これより下記のような微分方程式のモデルを得ることができる。

表面 η に関する微分方程式 (抜粋)

$$\frac{da(t)}{dt} = \frac{D_0(t)a(t)}{4\mu}, \quad \frac{d\varepsilon_1(t)}{dt} = \frac{D_1(t)a(t)}{6\mu} - U, \quad \frac{d\varepsilon_l(t)}{dt} = \text{略}$$

球形微生物の推進速度

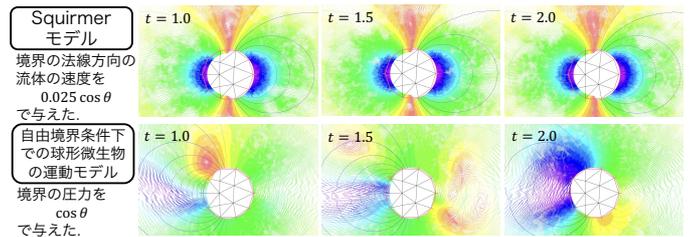
$D_0(t) = 0$ の場合で考えると、第1式より $a(t)$ は定数。 $\varepsilon_1(t)$ が周期 T の関数と仮定し、 $D_1(t)$ が定数であるとすると、Squirmerモデルで得られた推進速度と一致する。

推進速度はSquirmerモデルで得られるものと一致

数値計算で解いた場合

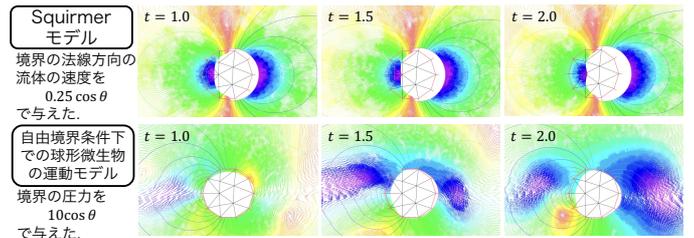
・初期位置: 中心の円形メッシュ
・流体速度: 赤 > 青 > 緑 > 黄 > 橙
・圧力: 等高線で表現, 赤 > 青

(i) 一定の小さい力を与えた場合 (微生物の周辺を拡大)



形状については、前者のモデルは右側が微かに膨らみ、後者は微小な縦長になった。一方で、現状では速度や圧力、推進速度などの定量的な比較はできていない。

(ii) 一定の大きい力を与えた場合 (微生物の周辺を拡大)



形状については、前者のモデルは右側が膨らみ、後者は三角形のような形になった。一方で、現状では速度や圧力、推進速度などの定量的な比較はできていない。

微生物の形状に着目すると、2つのモデルで異なっている数値誤差について

境界上の流速または圧力を上下対称に与えているため、微生物の形やその周りの流れが対称になるはずである。しかし、特に自由境界条件下での球形微生物の運動モデルでは全く対称になっていない。これは時間経過ごとにメッシュを取り直すとき、メッシュが上下対称にならなかったためだと考えられる。今後、改善が必要である。

5. 結論

- 自由境界条件下において、球形微生物の運動モデルを構築できた。
- Squirmerモデルと解析的に比較すると、線形近似の下では推進速度が一致した。数値計算で比較すると、微生物の形状が異なる可能性を示唆した。