心臓の数理モデルにおける進行波解の分岐解析

池田研究室 4年

1．研究背景　～心臓拍動メカニズムと不整脈～

心臓の拍動 ➡ 微小な電圧(活動電位)の波の規則正しい伝播 (図1)

波の不安定化

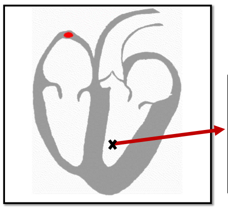
不整脈 (心室細動 、心室頻脈 、心房粗動 etc..)

心室頻脈 ＝ 心室における活動電位の螺旋波 (図2)

心室細動 ＝ 螺旋波の不安定化 (螺旋カオス)

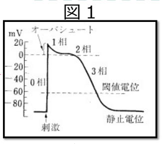
実際の人体でこれらを調べるのは困難

活動電位を表現したより良い数理モデルの考案とモデルの数値計算が研究課題として存在する



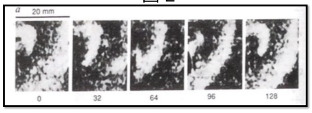
心臓の断面図

図 1



1つの心筋細胞における活動電位の波形

図 2



犬の心筋で実験によって得た螺旋波
白い部分が活動電位が発生している領域

2．数理モデル　～Aliev-Panfilov model～

Aliev-Panfilov model (反応拡散方程式)

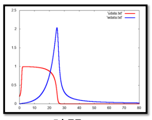
$$
\begin{cases}
u_t = d_u \Delta u + du(u-a)(1-u) - uv \\
v_t = d_v \Delta v + \varepsilon(u,v)(du(1+a-u) - v) \\
\varepsilon(u,v) = \varepsilon_0 + \dfrac{\mu_1 v}{u + \mu_2}
\end{cases}
$$

$u(x,t)$：活動電位の大きさ　a：活動電位の閾値

拡散項を除いた常微分方程式系

$$
\begin{cases}
u_t = ku(u-a)(1-u) - uv \\
v_t = \varepsilon(u,v)(du(1+b-u) - v)
\end{cases}
$$

数値計算 ➡



活動電位の大きさ

時間 t

━：活動電位 $u(t)$

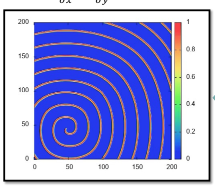
━：$v(t)$

➡ 活動電位の波形を再現できる

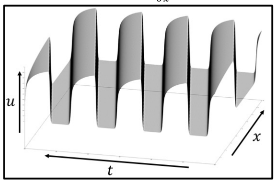
2次元の数値計算($\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$，ノイマン境界条件)　1次元の数値計算($\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$，周期境界条件)

活動電位が発生 ($u(x,y,t) = 1$)

活動電位が発生していない ($u(x,y,t) = 0$)



対応



螺旋波の中心から外側に向けて直線を引き断面図を見ると周期的な波を見ることができる
これは1次元での周期進行波解に対応している。1次元数値計算では周期境界条件を課す。

1次元進行波解の数値計算結果から2次元螺旋波へのフィードバックを与える

3．先行研究

先行研究でわかったこと

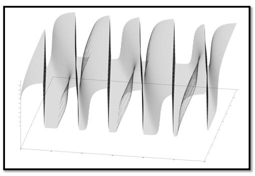
1：1次元の領域の長さと活動電位の閾値 a を変えたときに進行波の周期的な変形が発生

2：進行波が周期的に変形するパラメータで2次元の螺旋波を調べると螺旋カオスが発生

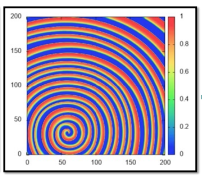
研究課題

aが他のパラメータがどのような意味を持っているのか先行研究では説明されていない

1次元進行波解の周期的な変形が発生するパラメータで2次元の数値計算

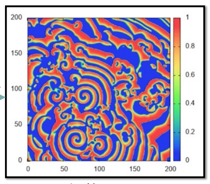


1次元進行波解の周期的な変形



不安定化した螺旋波

時間経過 ➡



螺旋カオス

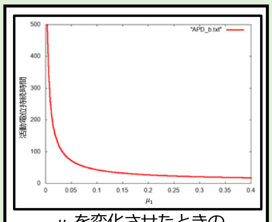
4．目標

先行研究では調べられていないパラメータを変化させたときの進行波解の挙動を調べる

5．数値計算結果

進行波解の周期的な変形 ➡ 1次元進行波解のパルス同士の相互作用によって発生

Aliev-Panfilov modelのパルス間の相互作用は強相互作用と呼ばれる。パルスとパルスが接近して衝突しようとする事で進行波解の周期的な変形が発生している。

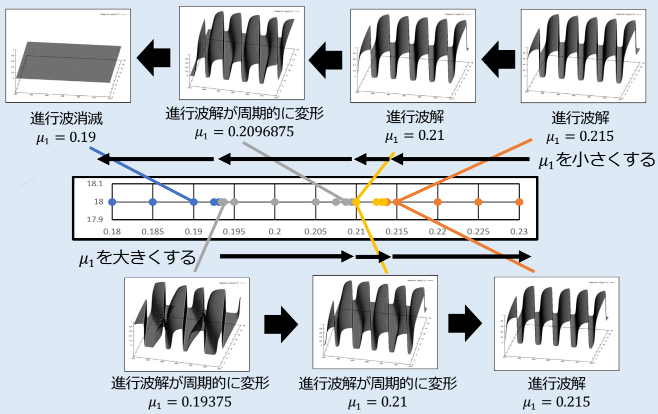


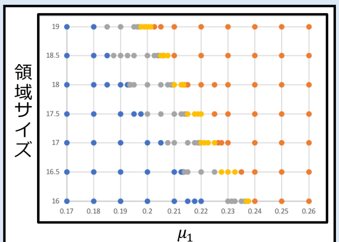
μ_1を変化させたときの活動電位の持続の変化

パルスの長さ
(活動電位が持続する時間の長さ)
に強く影響を与えるパラメータμ_1
を変化させる

1次元進行波解の分岐解析

1次元領域の長さは18.0とし、μ_1を変化させたときの進行波解の挙動の変化を調べる。
境界条件は周期境界条件を課す。





縦が領域サイズ 、横がμ_1の相図

●：進行波解が出現するパラメータ

●：進行波解と周期的に変形する進行波解が双安定となるパラメータ

●：周期的に変形する進行波解が出現するパラメータ

●：進行波解が出現しないパラメータ

周期境界条件を課しているため、進行波解のパルスの周期は1次元の領域のサイズに依存している。そこで、縦軸を領域サイズ横軸をμ_1とした相図を描くことで進行波解の挙動の変化を調べる。

μ_1を0.24付近から小さくした時と0.18付近から大きくした時で$u(x,t)$が進行波解になるか周期的に変形する進行波解になるか変化

進行波解にヒステリシス性が存在

補足説明：

ヒステリシス性があることから進行波解は亜臨界ピッチフォーク分岐が起きているということである

6：結論と今後の展望

Aliev-Panfilov modelは進行波解がμ_1の変化に対してヒステリシス性を持っている数理モデル

➡ μ_1以外のパラメータについても進行波解がヒステリシス性を持っているのかを確認する