

風紋・砂丘形成の数理モデル

明治大学 総合数理学部 現象数理学科4年 池田研究室所属

1. 研究目標

動機: 砂漠における風紋や砂丘が形成される過程、砂の挙動が知りたい

先行研究: 観測をもとに、砂の運動を単純化し、砂粒同士の相互作用や流体の運動を考慮しない数理モデルがある

研究目標: 先行研究では明らかにならなかった、

- ❖ 砂は跳ね方
- ❖ 特に流速が大きい状況で流速は風紋にどのような影響を及ぼすのか
- ❖ 先行研究の模型は拡散を刻んでいないようだが問題はないのかを明らかにし、
- いくつか種類がある風紋や砂丘はに対して、数理モデルは汎用性があるのかを追研究し確かめる



3. 風紋形成

数理モデル

Saltation

- [仮定]
* 同じ格子内の砂は同じ動きをするとする
* 風紋の波長も高さも数cmのスケールなので、流速は一定であるとする

飛距離

$$L(i, j) = L_0 + b h_n(i, j).$$

Lの値が0より大きい場合、 $b h_n(i, j)$ くらいのオーダーが適切である
具体的には $|h(i, j)| < \text{くらい} \rightarrow$

$$h_{n'}(i, j) = h_n(i, j) - Q,$$

$$h_{n'}(i + L(i, j), j) = h_n(i + L(i, j), j) + Q.$$

Qだけ砂を交換する
中間ステップ n' で

Creep

拡散の刻みなし

$$h_{n+1}(i, j) = h_n(i, j) + D \left[\frac{1}{6} \sum_{nn} h_{n'}(i, j) + \frac{1}{12} \sum_{nnn} h_{n'}(i, j) - h_{n'}(i, j) \right]$$

$\sum_{nn} h(i, j) = h(i+1, j) + h(i, j+1) + h(i-1, j) + h(i, j-1)$
 $\sum_{nnn} h(i, j) = h(i+1, j+1) + h(i+1, j-1) + h(i-1, j+1) + h(i-1, j-1)$

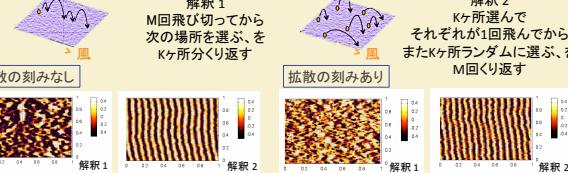
拡散の刻みあり

先行研究にはなかった手法 $dt = 0.1$ とし、10回かけて拡散するようにする

$$h_{n+1}(i, j) = h_n(i, j) + D dt \left[\frac{1}{6} \sum_{nn} h_{n'}(i, j) + \frac{1}{12} \sum_{nnn} h_{n'}(i, j) - h_{n'}(i, j) \right]$$

数値計算

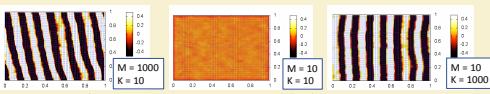
- "Saltationを繰り返す" ... 解釈が2通りある



解釈2では風紋が形成されるが、解釈1では風紋が形成されない

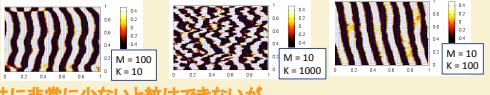
- SaltationとCreepの関係... M, Kの関係

拡散の刻みなし



- Mが大きいほど、Kが大きいほど、はっきりした紋ができる

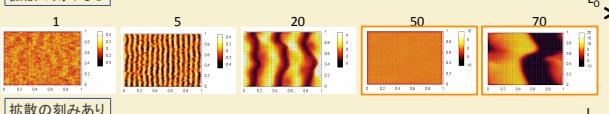
拡散の刻みあり



- M, Kが共に非常に少ない時はできないが、M, Kを大きくすると乱れるようになる
- 拡散刻みによらずM, Kに対して対称的な紋が得られる

- L_0 の変化... $L(i, j) = L_0 + b h_n(i, j)$

拡散の刻みなし



L_0 が大きいほど幅が長くなり、高低差も大きくなる

→ 現実で風が強いほど遠くに飛ばされることと一致

$L_0 = 1, 50$ では紋はできず、 $L_0 = 50$ を超えると、不安定な紋ができるようになる

拡散刻みありとなしでは紋の形が異なる

紋は消滅することなく維持される

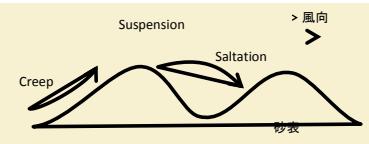
風向とは逆向きに進むように見える

2. 砂の運動形態

* Creep (表面這行)

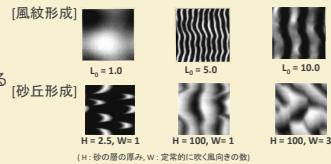
* Saltation (跳躍)

* Suspension (浮遊)



Saltationで飛んだ砂粒は着地した際、持っているエネルギーを周囲に渡すか、自分がもう一度飛ぶためSaltationを繰り返す
Saltationの繰り返し終了後、Creepによって高さをならす

先行研究



フィールドの定義

砂床表面を
N×Nの2次元格子に区切る

$h(i, j)$: 砂床の平均の高さ

初期条件: 砂の層は微小なランダムな凹凸を持つ

境界条件: 周期境界条件

変数設定

N フィールドの大きさ 100 1000(風紋拡散なし)
T 時間ステップ 10000(風紋拡散あり)
1000(砂丘)

飛ぶ砂の量 0.1

M Saltationの回数 1000(風紋拡散なし)
1000(砂丘)

飛ぶ砂の量 0.2

K Saltationする場所の数 100(風紋)
100(砂丘)

風紋を表す 5

D 拡散係数 1 L_0 (風紋)
 L_0 (砂丘)

風速を表す 10

4. 砂丘形成

数理モデル

Saltation

$q(i, j) = Q_0 \tan(\Delta h(i, j) + 1)$. * 上流側斜面では一定の流速で流れる

$l(i, j) = L_0 \tan(-\Delta h(i, j) + 1)$. * 頂上付近では流速の鋭いピークがある

$\Delta h(i, j) = h(i, j) - h(i-1, j)$

$h_{n'}(i, j) = h_n(i, j) - q(i, j)$,

$h_{n'}(i + l(i, j), j) = h_n(i + l(i, j), j) + q(i, j)$.

Creep

風紋形成と同じ

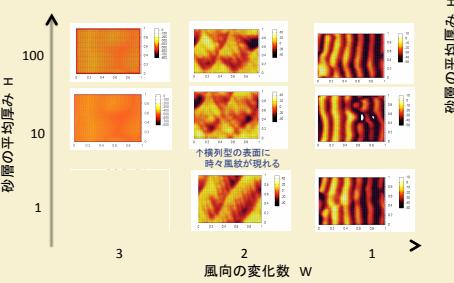
ある一定の深さの所に、それ以上掘り進めない固い地面があるとして、その高さを調整することで砂の量を調整できるようにする
砂の量や、風向の数による、砂丘パターンへの影響を調べる



地面

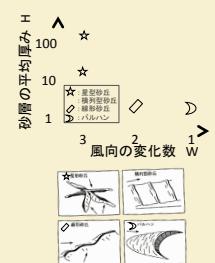
数値計算

結果



砂量・風向数と砂丘の種類の関係がわかった
星型砂丘とバルハーン、2方向の横列型砂丘は得られなかった

先行研究



5. 結論

* 風紋形成では、風紋ができる状況が詳しくわかり、現実に則した結果が得られた

- Saltationは少数ヶ所が多数回飛ぶ場合と、多数ヶ所が少数回飛ぶ場合がある

- 流速 L_0 小さい時は風紋はできず、 L_0 を大きくするほど風紋の間隔は広くなり、全長の1/2ではできなくなる

- さらに L_0 を増やすと再び不安定な紋ができるようになる

* 風紋形成で拡散を刻むと異なる結果が得られた

- K, Mが大きすぎると紋が乱れる

- L_0 が大きいほど風紋の間隔は広くなり、全長の1/2ではできなくなる

紋の形が異なる

- さらに L_0 を増やすと不安定な紋が現れた

* 砂丘形成では、深さと風向を変化させることで、様々な種類の砂丘が得られた

- 横列型砂丘、線形砂丘は得られた

- 星型砂丘、バルハーン、2方向の横列型砂丘は得られなかった